ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

BÀI GIẢNG

Động lực học công trình

Mã số học phần: FIM421

Số tín chỉ: 02

Dạy cho ngành, khối ngành: Xây dựng công trình xây dựng

Khoa: Xây dựng và Môi trường

THÁI NGUYÊN - NĂM 2022

CHƯƠNG 0: MỞ ĐẦU

Mục đích:

- Cung cấp cho sinh viên những kiến thức cơ bản của môn học và việc mô hình hóa các bài toán động lực học công trình.

Yêu cầu:

- Sinh viên hình dung được bài toán động lực học công trình; Phân biệt bài toán động lực học công trình với bài toán tính toán tĩnh trong Cơ học kết cấu;
- Sinh viên nắm được nhiệm vụ của môn học Động lực học công trình;
- Nắm được các khái niệm về các loại tải trọng động, các dạng dao động, bậc tự do, phương pháp xây dựng phương trình chuyển động.

1. KHÁI NIỆM VỀ ĐỘNG LỰC HỌC CÔNG TRÌNH

Khái niệm về động lực học

Cơ học nói chung là khoa học về chuyển động và sự cân bằng dưới tác dụng của các lực khác nhau. Nếu chỉ xét các trạng thái cân bằng của vật thể dưới tác dụng của lực ngoài ta có bài toán của tĩnh học. Trạng thái cân bằng được hiểu là không có chuyển động, tức là khi đó vật thể có gia tốc và vận tốc bằng không. Suy luận này thông thường sẽ dẫn đến một quan niệm cho rằng tĩnh học đã bỏ qua yếu tố thời gian khi nghiên cứu trạng thái cân bằng của các vật thể. Và do đó, động lực học được hiểu là bộ phận của cơ học, trong đó có kể đến yếu tố thời gian. Thực chất, quan điểm này chưa đầy đủ. Yếu tố thời gian chỉ là điều kiện cần chứ chưa đủ của động lực học.

Động lực học là một bộ phận của cơ học nghiên cứu chuyển động của các vật thể có kể đến quán tính của chúng.

Quán tính là một thuộc tính của vật chất, có xu hướng bảo tồn trạng thái đang tồn tại, chống lại những tác động bên ngoài nhằm thay đổi trạng thái sẵn có của chúng. Quán tính được đặc trưng bởi khối lượng và lực quán tính được tính bằng khối lượng nhân với gia tốc của vật thể trong chuyển động. Như vậy, quán tính là dấu hiệu cốt lõi của động lực học. Nếu bỏ qua quán tính, tức là gia tốc bằng không, thì bài toán không còn là động lực học nữa mặc dù vẫn có thể nó đang chuyển động đều.

Nếu tĩnh học có lịch sử lâu dài cùng với Cơ học, thì động lực học chỉ thực sự trở thành một bộ phận của cơ học nhờ những phát minh của Niuton. Ba định luật cơ bản của Niutown trở thành những viên gạch đầu tiên xây nên bộ môn động lực học cổ điển.

Trong các định luật này, quan trọng nhất là định luật thứ hai “Tổng tất cả các lực ngoài tác dụng lên một vật có khối lượng m bằng ma với a là gia tốc của vật”. Tư tưởng cơ bản này của động lực học vẫn còn ý nghĩa cho đến ngày hôm nay trong cơ học.

Khái niệm về công trình

Trong Cơ học cổ điển của Niutown, người ta chỉ xét đến các chất điểm khi nghiên cứu đến các vật rắn tuyệt đối. Trong sự phát triển của cơ học sau này người ta đã mở rộng đối tượng sang các vật thể có thể biến dạng. Các vật thể này thường xác định bằng các hàm số phụ thuộc không chỉ vào thời gian mà còn cả tọa độ trong không gian chứa vật thể đó. Vì vậy các vật thể biến dạng tạo thành hệ cơ học với các tham số phân bố liên tục và thường được gọi là hệ liên tục hay hệ vô số bậc tự do.

Công trình là một hệ cơ học gồm nhiều vật thể biến dạng liên kết với nhau tạo thành một chỉnh thể thực hiện một số chức năng định sẵn.

Vì là một hệ cơ học phức tạp gồm nhiều thành phần khác nhau liên kết lại thành một đối tượng có hình dáng kích thước, nên công trình thực chất là một hệ vô số bậc tự do. Mô hình cơ học của công trình được gọi là kết cấu công trình. Các tham số của kết cấu công trình bao gồm các tham số hình học, vật liệu, liên kết giữa các phần tử và môi trường.

Như vậy động lực học công trình là khoa học nghiên cứu đặc trưng động lực học và trạng thái ứng suất biến dạng của công trình dưới tác dụng của các tải trọng ngoài có kể đến quán tính của chúng.

Các phương pháp mô hình hóa công trình

Việc tính toán động lực học công trình trở nên phức tạp do sự phụ thuộc vào lực quán tính của công trình mà chính lực quán tính này lại phụ thuộc vào khối lượng và chuyển vị của công trình. Các công trình là các hệ cơ học có khối lượng phân bố liên tục trong không gian nên lực quán tính cũng là một trường véc tơ phân bố trong không gian, do đó bài toán động lực học công trình thường được mô tả bằng các phương trình vi phân đạo hàm riêng rất phức tạp.

a) Phương pháp tập trung khối lượng

Nếu ta chấp nhận gần đúng rằng sự phân bố khối lượng liên tục trong không gian của công trình được quy về tập trung tại một số điểm nào đó thì bài toán động lực học công trình trở nên đơn giản hơn vì lực quán tính được xác định tại các điểm khối lượng tập trung. Lúc này, bài toán động lực học công trình được mô tả bởi hệ các phương trình vi phân thường. Tuy nhiên, việc tập trung bao nhiêu khối lượng và việc quy đổi khối lượng tại từng điểm như thế nào để đảm bảo độ chính xác của kết quả phân tích động lực học phụ thuộc vào kinh nghiệm và sự hiểu biết của từng chuyên gia đối với từng loại công trình cụ thể.

Hình 1. Dầm đơn giản và mô hình các khối lượng tập trung thay thế

b) Phương pháp tọa độ suy rộng

Dựa trên giả thiết rằng chuyển vị của hệ có thể biểu diễn ở dạng tổng chuỗi vô hạn các hàm trực giao $\Psi_n(x,y,z)$ đã biết thỏa mãn các điều kiện biên hình học

$$u(x,y,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\Psi_n(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n^c\cos(\omega_n t) + B_n^s\sin(\omega_n t)\right)\Psi_n(x,y,z)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} B_n\cos(\omega_n t + \alpha_n)\Psi_n(x,y,z)$$

Đối với mỗi dạng chuyển vị cho trước $\Psi_n(x,y,z)$, dạng dao động của công trình phụ thuộc vào biên độ B_n được xem là các tọa độ suy rộng của công trình. Độ chính xác của phương pháp tọa độ suy rộng sẽ tăng lên nếu ta lấy nhiều số hạng của chuỗi xấp xỉ, tuy nhiên khi đó khối lượng tính toán cũng tăng lên đáng kể.

c) Phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH)

Đây là một phương pháp cơ bản, hiện đại và thông dụng nhất dùng để mô hình hóa và phân tích tĩnh, động lực học các công trình. Nội dung của phương pháp PTHH như sau: Chia công trình thành một số hữu hạn các phần tử có kích thước tùy ý được liên kết với nhau tại các điểm nút có tọa độ xác định trong không gian. Trạng thái ứng suất, biến dạng tại các điểm bên trong phần tử có thể xác định được thông qua các hàm dạng là các hàm chuyển vị cho trước và các véc tơ chuyển vị nút. Sau đó từ các định luật, nguyên lý cơ bản của cơ học thiết lập được hệ phương trình vi phân thường đối với chuyển vị nút. Phương pháp PTHH thực chất là một dạng đặc biệt của phương pháp tọa độ suy rộng nhưng nó tỏ ra ưu việt hơn vì tính chất tự động hóa khi tính toán cũng như khối lượng tính toán giảm nhiều so với phương pháp tọa độ suy rộng.

2. NHIỆM VỤ CỦA BÀI TOÁN ĐỘNG LỰC HỌC CÔNG TRÌNH

Ở phần tĩnh học công trình của giáo trình cơ học kết cấu, chúng ta nghiên cứu các phương pháp tính toán công trình chịu tác dụng của tải trọng tĩnh. Trong thực tế, phần lớn các công trình xây dựng đều chịu tác dụng của tải trọng động.

Nhiệm vụ cơ bản của bài toán động lực học công trình là xác định chuyển vị và nội lực trong kết cấu công trình khi công trình chịu tác dụng của tải trọng thay đổi theo thời gian. Trên cơ sở đó, sẽ xác định các biến dạng và ứng suất cực đại để tính toán kiểm tra các công trình thực, đồng thời lựa chọn được kích thước kết cấu hợp lí đảm bảo biến dạng và ứng suất nhỏ để thiết kế các công trình mới, tránh các hiện tượng cộng hưởng.

Dưới tác dụng động của tải trọng thay đổi theo thời gian, hệ sẽ dao động và dao động đó được biểu thị dưới dạng chuyển vị của kết cấu. Do đó, khi phân tích và giải quyết bài toán động lực học công trình sẽ cho phép xác định được sự thay đổi của chuyển vị theo thời gian tương ứng với quá trình thay đổi của tải trọng động. Các tham số khác như nội lực, ứng suất, biến dạng,.... nói chung đều được xác định sau khi có sự phân bố chuyển vị của hệ. Tất cả các tham số đó đều là các hàm thay đổi theo biến thời gian phù hợp với tác dụng động bên ngoài. Tuy nhiên, đôi khi việc giải quyết bài toán động lực học công trình còn được tiến hành bằng việc đưa vào các hệ số động. Khi đó, nội lực chuyển vị và mọi tham số của hệ đều được tính toán thông qua hệ số động với các kết quả tính toán tĩnh. Tất cả các đại lượng đó đều là các giá trị cực đại ứng với một thời điểm xác định, không phải là các hàm theo biến thời gian.

3. CÁC ĐẶC ĐIỂM CƠ BẢN CỦA BÀI TOÁN ĐLH CÔNG TRÌNH

Việc tính toán động lực học công trình khác với việc tính toán tĩnh học công trình ở những đặc điểm cơ bản dưới đây:

❖ Trước hết, dưới tác dụng của tải trọng động thay đổi theo thời gian, trạng thái ứng suất biến dạng của hệ cũng sẽ biến đổi theo thời gian. Như vậy, bài toán động sẽ không có nghiệm duy nhất như bài toán tĩnh (chúng ta phải giải phương trình vi phân). Do đó, cần phải tìm sự liên tục của nghiệm tương ứng với mọi thời điểm thời gian biểu thị trạng thái thực của hệ. Chính vì thế mà việc tính toán động phức tạp và khó khăn hơn nhiều so với việc tính toán tĩnh.

❖ Mặt khác, đặc điểm cơ bản của bài toán động được phân biệt rõ so với bài toán tĩnh ở chỗ: ở bài toán tĩnh, dưới tác dụng của tải trọng tĩnh là tải trọng tác dụng chậm lên công trình, sự chuyển động của hệ là chậm và lực quán tính rất nhỏ có thể bỏ qua được. Ở bài toán động, tác dụng của tải trọng động lên công trình gây ra sự chuyển động của hệ với gia tốc lớn, và lực quán tính phụ thuộc vào gia tốc chuyển động (đạo hàm bậc hai của chuyển vị theo thời gian) là không thể bỏ qua được. Sự cần thiết phải kể đến lực quán tính là sự khác biệt cơ bản của bài toán động lực học với bài toán tĩnh học.

❖ Ngoài ra, việc xét đến ảnh hưởng của lực cản cũng là một đặc điểm cơ bản phân biệt bài toán động với bài toán tĩnh. Bản chất của lực cản chuyển động (lực tắt dần) rất phức tạp và đa dạng. Vì vậy, việc tính lực cản phức tạp hơn so với lực quán tính. Trong tính toán, đôi khi không xét đến ảnh hưởng của lực cản, đôi khi lực cản được tính toán một cách gần đúng với những giả thiết phù hợp. Nhưng phải luôn thấy rằng lực cản luôn luôn có mặt và tham gia vào quá trình chuyển động của cơ hệ.

4. CÁC DẠNG TẢI TRỌNG ĐỘNG TÁC DỤNG LÊN CÔNG TRÌNH

Bất kỳ một kết cấu xây dựng nào trong quá trình sử dụng đều phải chịu tác dụng của tải trọng động ở dạng này hay dạng khác. Tải trọng động là tải trọng bất kì có độ lớn, phương, vị trí thay đổi theo thời gian. Tải trọng động tác dụng lên công trình rất đa dạng và phức tạp. Theo các đặc trưng của nó, tải trọng động với một quy luật bất kì nào đó được phân ra là tải trọng có chu kì và tải trọng không có chu kì.

a. Các tải trọng có chu kỳ

Tải trọng có chu kỳ là tải trọng lặp đi lặp lại theo thời gian qua các chu kì. Chu kì của tải trọng có thể là liên tục mà cũng có thể là gián đoạn. Nếu tải trọng tác dụng có quy luật hình *sin* hoặc *cos* với chu kì liên tục thì gọi là tải trọng điều hoà đơn giản, hay tải trọng rung động (hình 1a). Tải trọng này phát sinh khi động cơ mô tơ có phần quay không cân bằng vì khối lượng đặt lệch tâm (hình 1b). Mô tơ đặt trên hệ sẽ phát sinh ra lực quán tính li tâm :

$$P = Mr^2ñ \quad (1)$$

Trong đó: M – khối lượng phần quay ;

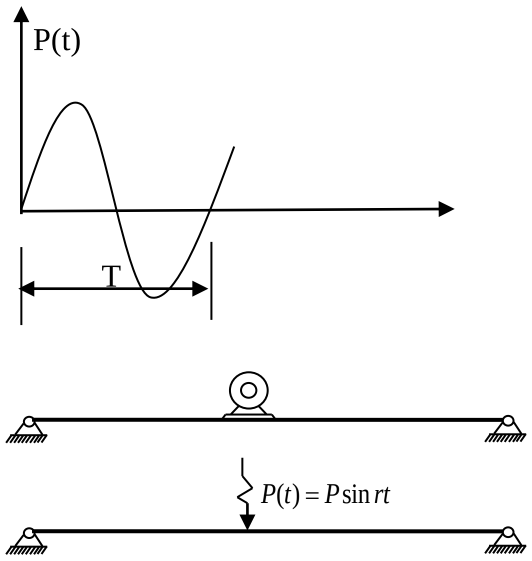
ñ - độ lệch tâm;

r – vận tốc góc của mô tơ.

$$r = \frac{2\pi n}{60} \text{ (1/s)} \quad (2)$$

n – số vòng quay của động cơ trong một phút.

a)
b)
c)



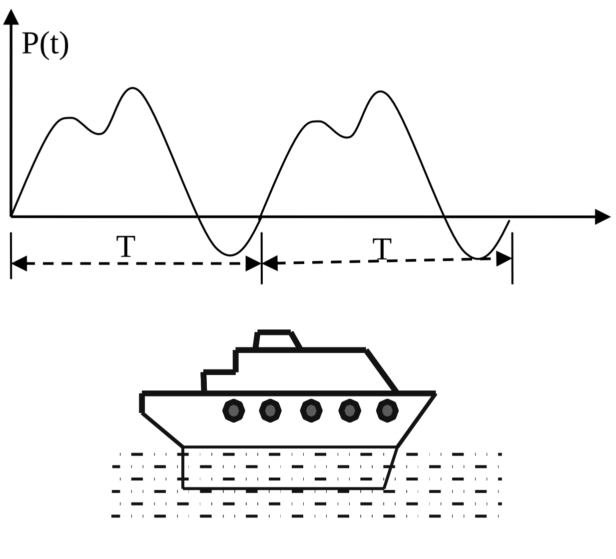
Hình 1

Lực li tâm sẽ gây ra tải trọng động tác dụng lên hệ theo phương thẳng đứng và phương ngang. Tải trọng động tác dụng lên hệ theo phương thẳng đứng sẽ là:

$$P(t) = P\sin rt \qquad (3)$$

Các dạng khác nhau của tải trọng có chu kì thường phức tạp hơn. Sự phức tạp biểu hiện ở quy luật thay đổi của tải trọng trong mỗi chu trình (hình 2a). Ví dụ: áp lực thuỷ động học do sự quay của cánh quạt tầu thuỷ (hình 2b).

a)
b)

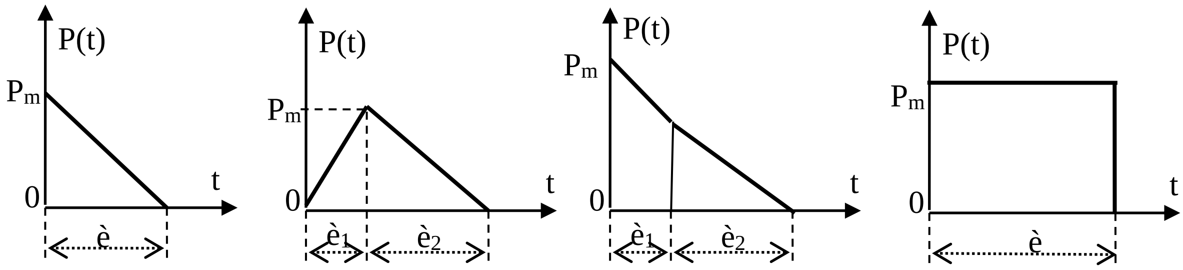


Hình 2

b. Tải trọng không có chu kỳ

Tải trọng không có chu kì có thể là các loại tải trọng ngắn hạn và các tải trọng dài hạn dạng tổng quát:

- *Tải trọng ngắn hạn:* Nguồn kích động đặc trưng của tải trọng ngắn hạn là các vụ nổ. Một số dạng tải trọng ngắn hạn cho ở hình 3.



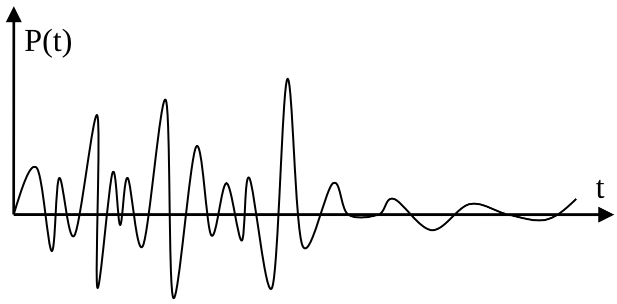
a) b) c) d)

Hình 3

Hình 3a: áp lực của sóng va chạm (sóng xung kích) tác dụng vào công trình do các vụ nổ trong không khí gây ra.

Hình 3b: áp lực của sóng nén tác dụng vào các công trình vùi sâu trong lòng đất do các vụ nổ trong đất gây ra.

- *Tải trọng động dài hạn:* Tồn tại sau nhiều chu kì dao động, là dạng tải trọng thường gặp, thí dụ như tác dụng của động đất đối với các công trình xây dựng đều thuộc loại tải trọng này. (Hình 4)



Hình 4

Ngoài ra còn có nhiều tải trọng động phức tạp như tải trọng gió bão, sự thay đổi đột ngột của nhiệt độ của môi trường, tác dụng của sóng biển,..... và các tải trọng ngẫu nhiên khác.

5. PHÂN LOẠI DAO ĐỘNG

Tuỳ theo sự phân bố khối lượng trên hệ, cấu tạo và kích thước của hệ, tính chất của các loại tải trọng và các tác dụng động bên ngoài, ảnh hưởng và sự tương tác của môi trường dao động, cũng như sự làm việc của hệ...... mà người ta có rất nhiều cách phân loại dao động khác nhau. Thông thường có một số cách phân loại như sau:

a. Phân theo số bậc tự do của hệ dao động

Theo cách phân loại này, hệ dao động có 3 loại sau:

- ❖ Dao động của hệ một bậc tự do.
- ❖ Dao động của hệ hữu hạn bậc tự do.
- ❖ Dao động của hệ vô hạn bậc tự do.

b. Phân theo tính chất và nguyên nhân gây ra dao động

Theo cách phân loại này, hệ dao động có 2 loại sau:

❖ Dao động tự do: *là dao động sinh ra do chuyển vị và tốc độ ban đầu của hệ.*

❖ Dao động cưỡng bức: *là dao động sinh ra do các tải trọng động và các tác dụng động bên ngoài khác.* Dao động cưỡng bức có rất nhiều loại: Dao động của hệ chịu tải trọng có chu kì, hệ chịu tải trọng ngắn hạn, hệ chịu tải trọng di động, tác động của gió, tác dụng của động đát,......

c. Phân theo sự tồn tại của lực

Theo cách phân loại này, hệ dao động có 2 loại:

- ❖ Dao động không tắt dần: *là dao động bỏ qua ảnh hưởng của lực cản.*
- ❖ Dao động tắt dần: *là dao động có xét đến ảnh hưởng của lực cản.*

d. Phân theo kích thước và cấu tạo của hệ

Theo cách phân loại này, hệ dao động có các loại sau:

- ❖ Dao động của hệ thanh(dầm, dàn, vòm, khung......),
- ❖ Dao động của tấm,
- ❖ Dao động của vỏ,
- ❖ Dao động của các khối móng,
- ❖ Dao động của hệ treo,
- ❖ Dao động của các công trình đặc biệt,.........

e. Phân theo dạng phương trình vi phân mô tả dao động

Theo cách phân loại này, hệ dao động có 2 loại sau:

❖ Dao động tuyến tính: *là dao động mà phương trình vi phân mô tả dao động là phương trình vi phân tuyến tính.*

❖ Dao động phi tuyến: *là dao động mà phương trình vi phân mô tả dao động là phương trình vi phân phi tuyến.*

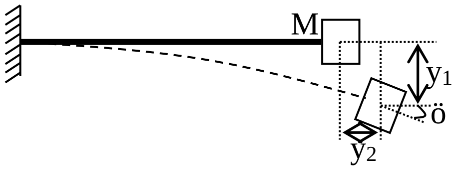
6. BẬC TỰ DO CỦA HỆ DAO ĐỘNG

Bậc tự do của hệ dao động là số các tham số độc lập cần thiết để xác định đầy đủ vị trí của tất cả các khối lượng của hệ khi dao động.

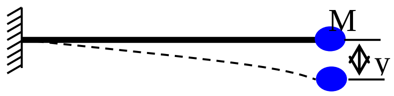
Trước hết, ta xét hệ với các khối lượng tập trung. Trong các hệ này có thể bỏ qua các lực quán tính của thanh và chỉ tính đến lực quán tính phát sinh do các khối lượng tập trung. Để tính bậc tự do, ta dùng các giả thiết sau:

- ✓ Coi các khối lượng tập trung của hệ là các chất điểm.
- ✓ Bỏ qua chiều dài co dãn do biến dạng uốn.

Ví dụ: Hệ cho ở hình 5



a)



b)

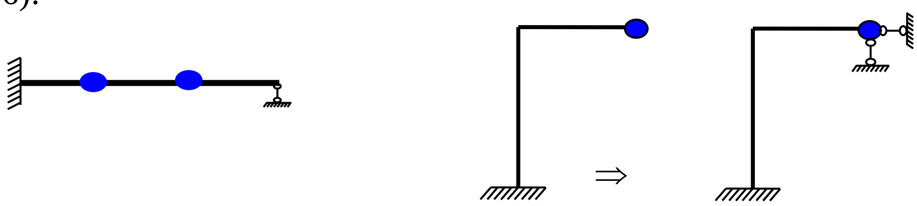
c)

Hình 5

Nếu không xét tới giả thiết trên, thì để xác định vị trí của khối lượng M cần phải có đủ ba tham số là y_1, y_2, ö. Vậy cơ hệ có 3 bậc tự do (hình 3a). Nhưng xét tới các giả thiết trên, để xác định vị trí của khối lượng M thì chỉ cần một tham số là y (hình 3b), khi đó hệ chỉ có 1 bậc tự do.

Ta có thể xác định số bậc tự do bằng cách: Đặt vào các khối lượng của hệ các liên kết laọi một vừa đủ để sao cho tất cả các khối lượng của hệ trở thành bất động (hình 5c).

Chú ý: Số bậc tự do của cơ hệ có thể nhỏ hơn, bằng, hoặc lớn hơn số khối lượng của hệ (Hình 6):



Hình 6. Bậc tự do

7. CÁC PHƯƠNG PHÁP XÂY DỰNG PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG

Nhiệm vụ cơ bản của bài toán động lực học công trình là xác định sự thay đổi của chuyển vị theo thời gian của một hệ đã cho dưới tác dụng của tải trọng động. Các biểu thức toán học để xác định các chuyển vị động được gọi là các phương trình chuyển động của hệ. Nó được biểu thị ở dạng các phương trình vi phân, hoặc sai phân (phương trình đạo hàm riêng), các phương trình này phản ánh đặc trưng dao động của hệ. Giải các phương trình chuyển động đó ta sẽ xác định được các hàm chuyển vị cần tìm theo thời gian.

Việc thiết lập và đưa ra các phương trình vi phân chuyển động của hệ là giai đoạn quan trọng nhất trong tất cả sự phân tích dao động của bất kỳ một hệ nào. Phương trình vi phân chuyển động của hệ có thể được xây dựng trên cơ sở phương pháp tĩnh hoặc dựa trên các nguyên lý biến phân năng lượng. Dưới đây sẽ trình bày một số phương pháp sau:

a. Phương pháp tĩnh động (phương pháp áp dụng nguyên lý Đalambe)

Phương pháp tĩnh động là phương pháp áp dụng nguyên lý Đalambe đối với bài toán động lực học công trình. Nó dựa vào điều kiện xét cân bằng lực của phần tĩnh học trong đó bổ sung thêm các lực quán tính đặt vào các khối lượng.

Như vậy, trên cơ sở nguyên lý Đalambe, để tìm phương trình vi phân chuyển động của các khối lượng trên hệ, ta chỉ việc viết các phương trình cân bằng lực của các khối lượng có kể đến các lực quán tính của chúng.

Các lực quán tính của các khối lượng được viết một cách tổng quát như sau:

$$F_{x,q} = -M\frac{d^2X(t)}{dt^2} = -M\ddot{X}(t)$$

$$F_{y,q} = -M\frac{d^2Y(t)}{dt^2} = -M\ddot{Y}(t) \qquad (4)$$

$$J_{u,q} = -J_o(u)\frac{d^2\alpha_u(t)}{dt^2} = -J_o(u)\ddot{\alpha}_u(t)$$

Trong đó : M – khối lượng tập trung của hệ;

X(t), Y(t) – chuyển vị tịnh tiến của khối lượng M theo phương x, y;

$\alpha_u(t)$ - chuyển vị xoay của khối lượng M quay quanh trục u là trục vuông góc với mặt phẳng xOy;

$F_{x,q}$, $F_{y,q}$, $J_{u,q}$ - các lực quán tính của khối lượng M tương ứng với các chuyển vị tịnh tiến theo phương x, y và chuyển vị xoay quanh trục u;

$J_o(u) = \int_M \rho_u^2 dm$ - là mômen quán tính của khối lượng M với trục u, ρ_u là khoảng cách từ phân tố khối lượng dm đến trục u.

Hệ phương trình chuyển động viết đối với hệ phẳng sẽ là:

$$\begin{aligned} &\sum X - \sum M\ddot{X}(t) = 0 \\ &\sum Y - \sum M\ddot{Y}(t) = 0 \\ &\sum J_u - \sum MJ_o(u)\ddot{\alpha}_u(t) = 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

Trong đó $\sum X$ gồm tổng hình chiếu lên phương X của tải trọng động, lực đàn hồi và lực tắt dần tác dụng vào khối lượng M.

Tương tự $\sum Y$ và $\sum J_u$.

Đôi khi, phương trình vi phân chuyển động của hệ nhận được từ việc tìm biểu thức chuyển vị của các khối lượng do các tải trọng động, lực tắt dần và lực quán tính đặt vào các khối lượng gây ra. Lúc này, ta hiểu rằng toàn hệ đạt trạng thái cân bằng sau khi đã bổ sung các lực cần thiết vào các khối lượng của hệ.

Nói chung đối với đa số các bài toán động học đơn giản, phương pháp tĩnh động cho phép thiết lập các phương trình chuyển động của hệ rất thuận tiện và đơn giản.

b. Phương pháp sử dụng nguyên lý di chuyển khả dĩ

Khi sơ đồ kết cấu công trình khá phức tạp, đặc biệt là hệ có các khối lượng phân bố và các liên kết đàn hồi,....thì phép ghi trực tiếp điều kiện cân bằng lực của tất cả các lực tác dụng lên hệ với các đại lượng vectơ là rất khó khăn. Khi đó cần phải thiết lập phương trình vi phân chuyển động từ các biểu thức đại lượng vô hướng của công hay năng lượng. Một phương pháp hợp lý được sử dụng tiện lợi là phương pháp dựa trên nguyên lý chuyển vị khả dĩ (hay di chuyển khả dĩ). Phù hợp với nguyên lý này, phương trình vi phân chuyển động của hệ được xác định từ biểu thức *công của tất cả các lực trên các chuyển vị khả dĩ bằng không.* Để nhận được phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ, ta tiến hành các bước sau:

- Xác định tất cả các lực đặt vào các khối lượng của hệ, trong đó kể cả lực quán tính được xác định phù hợp với nguyên lý Đalambe.
- Đưa vào các chuyển vị khả dĩ tương ứng với các bậc tự do của hệ.
- Tính biểu thức công của tất cả các lực trên các chuyển vị khả dĩ và cho bằng không.

c. Phương pháp ứng dụng nguyên lý Hamiltơn

Với các hệ phức tạp, người ta còn sử dụng phương pháp ứng dụng nguyên lý biến phân động học Hamiltơn. Phương pháp này sẽ đưa ra phương trình vi phân chuyển động từ biểu thức biến phân các hàm năng lượng của hệ. Nguyên lý Hamiltơn có thể biểu thị như sau:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T-U)dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta R dt = 0 \qquad (6)$$

Hay : $$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T-U+R)dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \delta R)dt = 0 \qquad (7)$$

Trong đó: δT , δU - biến phân của động năng và thế năng của hệ;

δR - biến phân công do các lực không bảo toàn tác dụng lên hệ gây ra,bao gồm lực cản chuyển động và tải trọng ngoài.

Phù hợp với nguyên lý này, biến phân của động năng, thế năng cộng với biến phân của công do tải trọng ngoài và lực tắt dần trong khoảng thời gian bất kỳ từ t_1 đến t_2 phải bằng không. Sử dụng phương pháp này có thể cho phép ta nhận được phương trình vi phân chuyển động của bất cứ một hệ đã cho nào. Phương pháp này khác với phương pháp sử dụng nguyên lý chuyển vị khả dĩ ở chỗ : các lực quán tính và lực đàn hồi đều không có mặt khi thiết lập phương trình vi phân chuyển động, thay vào chúng là các giá trị động năng và thế năng tương ứng. Với các hệ phức tạp sử dụng phương pháp này cũng rất tiện lợi, bởi vì phương trình (6) biểu thị các đại lượng vô hướng.

CH□ ƠNG 1: DAO ĐỘNG CỦA HỆ MỘT BẬC TỰ DO

Mục đích:

- Cung cấp cho sinh viên những kiến thức cơ bản bài toán động lực học công trình có bậc tự do bằng 1 dưới dạng dao động tự do hoặc dao động cưỡng bức.

Yêu cầu:

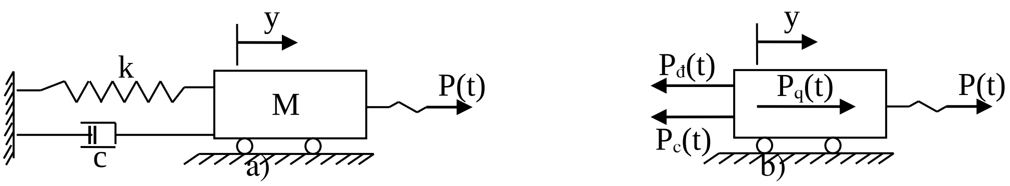
- Sinh viên cần nhớ lại kiến thức giải phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng.
- Sinh viên nhận biết việc mô hình hóa hệ một bậc tự do;
- Thiết lập được phương trình vi phân dao động của hệ một bậc tự do;
- Giải bài toán dao động tự do, dao động cưỡng bức của hệ một bậc tự do trong một số trường hợp chịu các loại tải trọng động;
- Thực hành trên mô hình dao động một bậc tự do để sinh viên nắm được sự làm việc thực tế của hệ một bậc tự do.

Bài 1:

XÂY DỰNG PH□ ƠNG TRÌNH VI PHÂN DAO ĐỘNG TỔNG QUÁT CỦA HỆ MỘT BẬC TỰ DO

1. Các lực tác động và các tham số cơ bản của hệ động học

Xét một mô hình đơn giản cho trên hình 1.1. Hệ gồm có một khối l- ợng M chịu tác dụng của tải trọng động thay đổi theo thời gian P(t). Hệ đ- ợc gắn với vật bất động bằng một lò xo đàn hồi không trọng l- ợng với độ cứng k, và một bộ giảm chấn c biểu thị sự tiêu hao năng l- ợng trong quá trình dao động. Các con lăn đảm bảo cho khối l- ợng chỉ có thể chuyển vị tịnh tiến theo ph- ơng ngang.



Hình 1.1

Các tham số vật lý cơ bản của hệ động học cho ở hình 1.1 cũng nh- đối với bất kỳ hệ kết cấu dao động tuyến tính khác đều bao gồm : khối l- ợng của hệ, các tính chất đàn hồi của hệ nh- : độ cứng, độ mềm, có đặc tr- ng tiêu phí năng l- ợng trong quá trình dao động và các nguồn kích động cũng nh- các tác dụng động bên ngoài.

Trong quá trình dao động, hệ chịu tác động của các lực rất đa dạng. Các lực tác động chủ yếu bao gồm :

- *Tải trọng động* : thay đổi theo thời gian và các kích động bên ngoài.

- *Lực đàn hồi*: Lực đàn hồi xuất hiện khi hệ tách khỏi vị trí cân bằng và có xu h- ớng đ- a hệ về vị trí cân bằng ban đầu, lực này luôn luôn t- ơng ứng và phụ thuộc vào chuyển vị động của hệ. Ta ký hiệu lực đàn hồi là P_d.

$$P_d = P(y)$$

Sự phụ thuộc của lực đàn hồi vào chuyển vị động của hệ có thể là tuyến tính hoặc phi tuyến. Ở các hệ dao động đàn hồi tuyến tính, ta có:

$$P_d = ky \qquad (1.1)$$

Trong đó: y là chuyển vị động của hệ; k là hệ số cứng, là lực do chuyển vị bằng đơn vị gây ra t- ơng ứng với ph- ơng của bậc tự do.

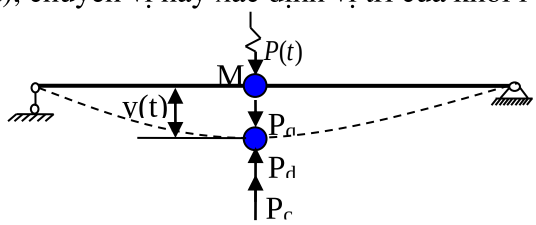
- *Lực ma sát*: Lực này th- ờng ng- ợc chiều với chiều chuyển động và có khả năng khử dao động của hệ, vì vậy ng- ời ta còn gọi lực này là lực cản hay lực tắt dần. Có hai loại ma sát: ma sát trong (trong vật liệu) và ma sát ngoài (ma sát tại gốc tựa và lực cản của môi tr- ờng của hệ dao động). Ma sát xuất hiện rất lớn trong các công cụ và thiết bị giảm chấn để khử dao động. Các đặc tr- ng của lực ma sát rất đa dạng và phức tạp. Ở đây ta đ- a ra mô hình cản nhớt tuyến tính, trong đó lực cản phụ thuộc vào vận tốc của hệ. Nết ký hiệu lực cản là P_c thì :

$$P_c = c\dot{y} \qquad (1.2)$$

Trong đó: c – hệ số tắt dần; $\dot{y}$ - vận tốc dao động của hệ.

2. Xây dựng phương trình vi phân chuyển động tổng quát của hệ một bậc tự do

Ph- ơng trình vi phân dao động tổng quát có thể đ- ợc xây dựng từ một trong các ph- ơng pháp đã trình bày ở phần mở đầu. Ta khảo sát dao động của hệ một khối l- ợng tập trung đặt trên dầm đơn giản. Dầm đ- ợc xem là vật thể đàn hồi không có trọng l- ợng. Khối l- ợng chịu tác dụng của tải trọng thay đổi theo thời gian P(t) hình 1.2, hệ có một bậc tự do - đó là chuyển vị theo ph- ơng đứng y(t), chuyển vị này xác định vị trí của khối l- ợng M.



Hình 1.2

a) Ph- ơng pháp tính động (ph- ơng pháp áp dụng nguyên lý Đalambe)

Khi xét điều kiện cân bằng lực tĩnh học của khối l- ợng M, ta bổ sung thêm lực quán tính :

$$P_q = -M.\ddot{y}(t) \qquad (1.3)$$

Nh- vậy các lực đặt vào khối l- ợng bao gồm: tải trọng động P(t), lực đàn hồi P_d, lực cản P_c và lực quán tính P_q (hình 1.2).

Ph- ơng trình chuyển động biểu thị sự cân bằng lực của tất cả các lực đó đ- ợc viết nh- sau :

$$P_d + P_c - P_q = P(t) \qquad (1.4)$$

Thế các biểu thức (1.1), (1.2) và (1.3) vào (1.4), ta nhận đ- ợc:

$$M\,\ddot{y} + c\,\dot{y} + k\,y = P(t) \qquad (1.5)$$

(1.5) là ph- ơng trình vi phân dao động của hệ một bậc tự do. Ph- ơng trình này có thể nhận đ- ợc từ biểu thức viết d- ới dạng chuyển vị của khối l- ợng nh- sau :

Nếu gọi δ_{11} là chuyển vị tại khối l- ợng do lực đơn vị bằng 1 gây ra, thì chuyển vị động t- ơng ứng với sự dao động của hệ là :

$$y(t) = \delta_{11}P(t) + \delta_{11}P_q - \delta_{11}P_c$$

Hay : $$\frac{1}{\delta_{11}}y(t) + P_c - P_q = P(t)$$

Thay : $\dfrac{1}{\delta_{11}} = k$, P_c theo (1.2), P_q theo (1.3) vào biểu thức trên ta sẽ nhận đ- ợc (1.5) nh- ở trên.

b) Ph- ơng pháp áp dụng nguyên lý Hamiltơn

Để thiết lập ph- ơng trình vi phân dao động của hệ theo nguyên lý Hamiltơn, ta cần phải xác định các biểu thức biến phân của động năng, thế năng, công do lực tắt dần và tải trọng động. Với hệ một bậc tự do cho trên hình 1.1 và hình 1.2, biểu thức động năng của hệ đ- ợc xác định bởi:

$$T = \frac{1}{2}M\,\dot{y}^2 \quad \Rightarrow \quad \delta T = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\delta\dot{y} = M\,\dot{y}\,\delta\dot{y} \qquad (a)$$

Biểu thức thế năng :

$$U = \frac{1}{2}k\,y^2 \quad \Rightarrow \quad \delta U = \frac{\partial U}{\partial y}\delta y = k\,y\delta y \qquad (b)$$

Tải trọng động và lực tắt dần là các lực không bảo toàn của hệ, công của các lực này là:

$$R = P(t)\,y - c\,\dot{y}\,y \quad \Rightarrow \quad \delta R = P(t)\,\delta y - c\,\dot{y}\,\delta y \qquad (c)$$

Thay các biểu thức biến phân (a), (b), (c) vào ph- ơng trình của nguyên lý Hamiltơn ta có:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[M\,\dot{y}\,\delta\dot{y} - c\,\dot{y}\,\delta y - k\,y\,\delta y + P(t)\,\delta y\right]dt = 0 \qquad (1.6)$$

Lấy tích phân từng phần số hạng đầu tiên của (1.6):

$$\int_{t_1}^{t_2} M\,\dot{y}\,\delta\dot{y}dt = \int_{t_1}^{t_2} M\,\dot{y}\,\frac{d(\delta y)}{dt}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} M\,\dot{y}\,d(\delta y) = M\,\dot{y}\,\delta y\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} M\,\ddot{y}\,\delta y\,dt \qquad (1.7)$$

Nh- ng do: $\delta y\big|_{t=t_1} = \delta y\big|_{t=t_2} = 0$ nên số hạng đầu tiên của (1.7) bằng không. Vậy thế (1.7) vào (1.6) ta đ- ợc :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[-M\,\ddot{y} - c\,\dot{y} - k\,y + P(t) \right] \delta y\, dt = 0 \qquad (1.8)$$

Vì δy là tuỳ ý, nên trong tr- ờng hợp tổng quát, ph- ơng trình (1.8) sẽ thoả mãn khi biểu thức trong dấu ngoặc bằng không. Biểu thức này chính là ph- ơng trình vi phân chuyển động (1.5) đã nhận đ- ợc ở ph- ơng pháp tĩnh động.

c) Ph- ơng pháp áp dụng nguyên lý chuyển vị khả dĩ

Khi xây dựng ph- ơng trình vi phân dao động theo nguyên lý chuyển vị khả dĩ ta cho khối l- ợng một di chuyển khả dĩ δy. Lúc này, một trong tất cả các lực tác dụng vào khối l- ợng cho trên hình 1.1b hoặc hình 1.2 đều thực hiện một công t- ơng ứng với chuyển vị khả dĩ δy đó. Ta có thể biểu thị công tổng quát bằng ph- ơng trình sau:

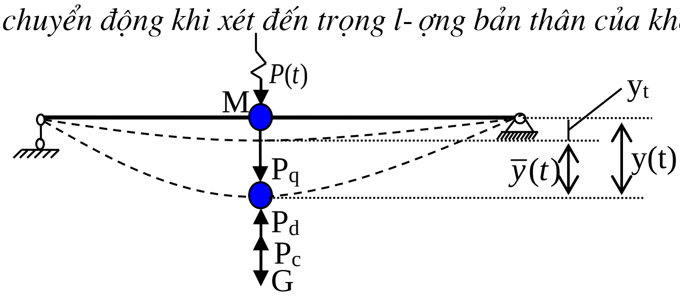
$$\delta A = P_q\,\delta y - P_c\,\delta y - P_d\,\delta y + P(t)\,\delta y = 0 \qquad (1.9)$$

Thế các biểu thức (1.1), (1.2), (1.3) vào biểu thức (1.9) ta đ- ợc:

$$\left[-M\,\ddot{y} - c\,\dot{y} - k\,y + P(t) \right] \delta y = 0 \qquad (1.10)$$

Vì δy là tuỳ ý, nên biểu thức trong dấu ngoặc của (1.10) phải bằng không, đó cũng chính là ph- ơng trình vi phân chuyển động (1.5).

d) Ph- ơng trình vi phân chuyển động khi xét đến trọng l- ợng bản thân của khối l- ợng



Hình 1.3

Khi tính đến trọng l- ợng bản thân của khối l- ợng, trong ph- ơng trình (1.4) phải tính đến trọng lực:

$$G = k\,y_t \qquad (1.11)$$

Trong đó: y_t là độ võng tĩnh (hình 1.3). Ph- ơng trình cân bằng lực trong tr- ờng hợp này là:

$$M\,\ddot{y} + c\,\dot{y} + k\,y = P(t) + G \qquad (1.12)$$

Chuyển vị toàn phần y(t) đ- ợc biểu thị bằng tổng của chuyển vị tĩnh y_t do trọng l- ợng bản thân gây ra và chuyển vị động $\bar{y}(t)$:

$$y(t) = y_t + \bar{y}(t) \qquad (1.13)$$

Đ- a các biểu thức (1.11) và (1.13) vào (1.12) ta đ- ợc:

$$M\,\ddot{y}+c\,\dot{y}+k\,\bar{y}=P(t) \qquad (1.14)$$

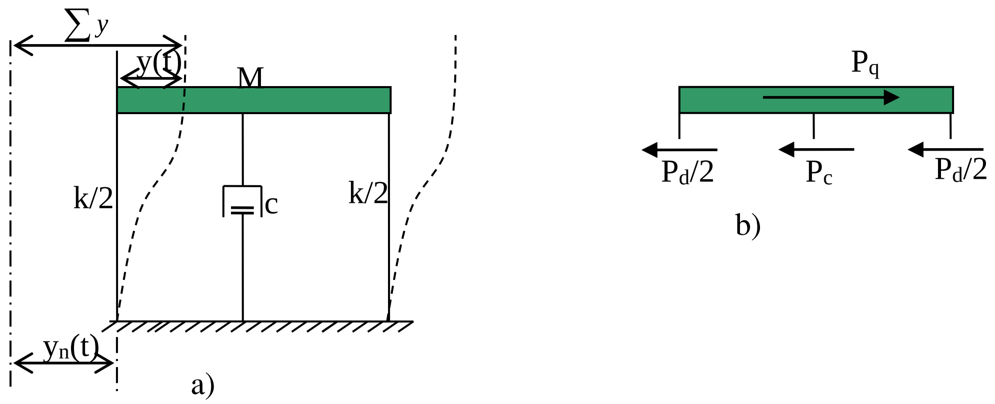
Vì độ võng tĩnh không thay đổi theo thời gian, nên : $\ddot{y}(t)=\ddot{\bar{y}}(t)$ và $\dot{y}(t)=\dot{\bar{y}}(t)$, do đó ta có thể viết ph- ơng trình (1.14) nh- sau :

$$M\,\ddot{\bar{y}}+c\,\dot{\bar{y}}+k\,\bar{y}=P(t) \qquad (1.15)$$

So sánh các ph- ơng trình vi phân chuyển động (1.15) và (1.5) ta thấy rằng: các ph- ơng trình vi phân chuyển động nhận đ- ợc từ điều kiện cân bằng tĩnh của hệ động học không bị ảnh h- ởng bởi trọng l- ợng bản thân. Lúc này hệ sẽ dao động xung quanh vị trí cân bằng tĩnh ứng với độ võng tĩnh ban đầu y_T.

e) Ph- ơng trình vi phân chuyên động do sự kích động của nền

Sự kích động của nền do các vụ động đất, hoặc các vụ nổ lớn trong đất gây ra sự dao động không thể bỏ qua đ- ợc đối với nhà và công trình. Đặc tr- ng cơ bản của tải trọng động đất là chuyển vị ngang rất lớn của nền cùng với gia tốc của nó. Mô hình đơn giản về sự dao động của nhà do tác dụng của chuyển vị ở nền cho trên hình 1.4.



Hình 1.4

Giả thiết rằng: thanh ngang của khung có độ cứng bằng vô cùng, khối l- ợng của toàn bộ kết cấu tập trung ở thanh ngang M. Chuyển vị ngang của nền là $y_n(t)$ (so với một trục tính toán nào đó), sẽ gây ra sự dao động của khung biểu thị bằng chuyển vị của khối l- ợng M theo ph- ơng ngang. Hệ có một bậc tự do là y(t). Hai thanh đứng đ- ợc xem là không trọng l- ợng và không chịu nén dọc theo ph- ơng của các thanh. Lực cản đàn hồi đối với chuyển vị của thanh ngang đ- ợc đặc tr- ng bởi độ cứng đàn hồi ở mỗi thanh đứng k/2. Lực cản tắt dần đ- ợc biểu thị bằng độ giảm chấn c.

Ph- ơng trình cân bằng lực của hệ: (hình 1.4b)

$$P_d+P_c-P_q=0 \qquad (1.16)$$

Chuyển vị toàn phần của khối l- ợng so với trục tính toán do kích động của nền gây ra là: (hình 1.4a)

$$\sum y=y_n(t)+y(t) \qquad (1.17)$$

Trong đó y(t) là chuyển vị của bản thân kết cấu tính tại vị trí khối l- ợng theo ph- ơng ngang. Nh- vậy, lực quán tính của khối l- ợng M là:

$$P_q = -M\left(\ddot{y}_n(t) + y(t)\right) \tag{1.18}$$

Các lực đàn hồi và lực cản chỉ liên quan đến chuyển vị y(t) của hệ: $P_d = k\,y$, $P_c = c\,\dot{y}$. Thay các lực này vào (1.16) ta nhận đ- ợc:

$$M\,\ddot{y}(t) + c\,\dot{y}(t) + k\,y(t) + M\,\ddot{y}_n(t) = 0 \tag{1.19}$$

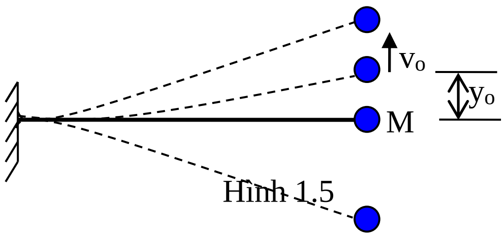
Ta đặt : $P_h(t) = -M\,\ddot{y}_n(t)$ - nh- tải trọng tác dụng lên hệ và gây ra dao động của hệ, tải trọng này bằng tích của khối l- ợng với gia tốc của nền. Dấu âm biểu thị tải trọng đó ng- ợc chiều với gia tốc của nền. Khi đó, ph- ơng trình (1.19) đ- ợc viết lại nh- sau :

$$M\,\ddot{y}(t) + c\,\dot{y}(t) + k\,y(t) = P_h(t) \tag{1.20}$$

Bài 2

DAO ĐỘNG TỰ DO KHÔNG CẢN

Xét hệ một bậc tự do (hình 1.5). Nếu tách hệ đàn hồi này ra khỏi vị trí cân bằng với chuyển vị ban đầu của khối l- ợng y_o, hoặc tác động lên hệ một xung lực nào đó đặc tr- ng bởi tốc độ ban đầu v_o, thì khối l- ợng sẽ dao động. *Các dao động chỉ sinh ra do các kích động ban đầu nh- vậy đ- ợc gọi là dao động tự do*. Các dao động này đ- ợc thực hiện bởi các lực đàn hồi phát sinh trong hệ do các kích động ban đầu. Với các dao động tự do, tải trọng không tồn tại trong quá trình dao động của hệ, vì vậy vế phải của ph- ơng trình vi phân dao động tổng quát hệ một bậc tự do (1.5) bằng không. Ph- ơng trình vi phân dao động tự do có dạng:



Hình 1.5

$$M\,\ddot{y} + c\,\dot{y} + k\,y = 0 \tag{1.21}$$

Khi không có cản c = 0, ph- ơng trình vi phân dao động sẽ là:

$$M\,\ddot{y} + k\,y = 0 \tag{1.22}$$

Ph- ơng trình trên đ- ợc viết lại:

$$\ddot{y} + \omega^2\,y = 0 \tag{1.23}$$

Trong đó: $$\omega^2 = \frac{k}{M} \tag{1.24}$$

Ph- ơng trình trên là ph- ơng trình vi phân cấp hai hệ số hằng số. Ph- ơng trình đặc tr- ng của nó là:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

Nghiệm của ph- ơng trình đặc tr- ng là : $\lambda = \pm i\,\omega$. Vậy nghiệm của ph- ơng trình vi phân (1.23) có dạng:

$$y(t) = C_1 \sin\omega t + C_2\, cos\,\omega t \tag{1.25}$$

Trong đó C_1, C_2 là các hằng số, đ- ợc xác định từ điều kiện ban đầu.

Chẳng hạn ban đầu: $t = 0$: $y(0) = y_o$, $\dot{y}(0) = v_o$. Thay (1.25) vào điều kiện đầu, ta xác định đ- ợc :

$$C_1 = \frac{v_o}{\omega}; \quad C_2 = y_o$$

Từ đó suy ra nghiệm (1.25) có dạng :

$$y(t) = \frac{v_o}{\omega}\sin\omega t + y_o cos\omega t \qquad (1.26)$$

Nghiệm (1.26) có thể viết lại d- ới dạng:

$$y(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \qquad (1.27)$$

Trong đó: $A = \sqrt{y_o^2 + \left(\frac{v_o}{\omega}\right)^2}$; $\varphi = arctg\frac{\omega y_o}{v_o}$

Nh- vậy, nghiệm mô tả quy luật chuyển động của hệ (1.27) có dạng hình sin, là một hàm diều hoà.

Trong nghiệm (1.27): A – là biên độ dao động;

$\omega t + \varphi$ - là pha dao động,

φ – pha ban đầu,

ω - tần số vòng của dao động.

D□ới đây ta sẽ xét chu kỳ và tần số của dao động điều hoà:

- Chu kỳ dao động: ký hiệu là T, là khoảng thời gian cần thiết để thực hiện một dao động toàn phần, nghĩa là: chu kỳ là thời gian để khối l- ợng lặp lại quá trình dao động nh- tr- ớc. Ta có:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \ \text{(s)}$$

- Tần số dao động: ký hiệu là f, là số lần dao động trong một giây:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \ (1/s)$$

- Tần số vòng, hay tần số dao động riêng: ký hiệu là ω, là số lần dao động trong 2π giây, vì vậy ω *gọi là tần số vòng* hay *tần số tuần hoàn của dao động riêng* và gọi tắt là *tần số dao động riêng*.

Công thức xác định tần số dao động riêng:

1. Từ công thức (1.24) và biến đổi công thức này ta có công thức xác định tần số dao động riêng:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{1}{M\,\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{y_t}} \qquad (1.28)$$

Trong đó: k – hệ số cứng của hệ,

g – gia tốc trọng tr- ờng,

y_t – chuyển vị của khối l- ợng M do lực G = Mg tác dụng tĩnh tại vị trí khối l- ợng gây ra.

Từ công thức (1.28) ta thấy rằng: Tần số dao động riêng của hệ không phụ thuộc vào các kích động ban đầu, nó chỉ phụ thuộc vào khối l- ợng và độ cứng của hệ.

2. Xác định tần số dao động riêng của hệ đàn hồi bằng ph- ơng pháp năng l- ợng.

Ph- ơng pháp này dựa trên định luật bảo toàn năng l- ợng: Trong quá trình dao động, tổng động năng và thế năng của hệ là một đại l- ợng không đổi:

$$T + U = C = const \qquad (1.29)$$

Biểu thức động năng của hệ :

$$T = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 = \frac{1}{2} M \omega^2 y_{max}^2 cos^2(\omega t + \varphi) \qquad (1.30)$$

Trong đó: $y_{max} = A = \sqrt{y_o^2 + \left(\frac{v_o}{\omega}\right)^2}$

Thế năng của hệ:

$$U = \frac{1}{2} k y^2 = \frac{1}{2} k y_{max}^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \qquad (1.31)$$

Từ (1.30) và (1.31) ta thấy rằng: trong quá trình dao động của hệ, khi thế năng biến dạng của hệ đạt giá trị lớn nhất thì động năng của hệ bằng không, và ng- ợc lại : động năng của hệ đạt giá trị lớn nhất thì thế năng của hệ bằng không. Do đó, phù hợp với biểu thức của định luật bảo toàn năng l- ợng ta có:

$$T_{max} + 0 = C$$

và $$0 + U_{max} = C$$

Từ đó suy ra : $$T_{max} = U_{max} \qquad (1.32)$$

Từ (1.31) ta thấy : $U_{max} = \frac{1}{2} k y_{max}^2$ (1.33)

Từ (1.30) ta đặt: $\bar{T} = \frac{1}{2} M y_{max}^2 cos^2(\omega t + \varphi)$. Thì ta có: $\bar{T}_{max} = \frac{1}{2} M y_{max}^2$ (1.34)

Do đó : $T_{max} = \omega^2 \bar{T}_{max}$

Thế các biểu thức trên vào (1.32) ta đ- ợc:

$$\omega^2 = \sqrt{\frac{U_{max}}{\bar{T}_{max}}} \qquad (1.35)$$

Với U_{max} đ- ợc tính theo (1.33), còn $\bar{T}_{max}$ đ- ợc tính theo (1.34).

❖ Trong tr- ờng hợp tổng quát, nếu hệ có một số khối l- ợng tập trung và một số các liên kết đàn hồi thì U_{max} và $\bar{T}_{max}$ đ- ợc xác định nh- sau:

$$U_{max} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} k_i\, y_{i,max}^2$$, m là số liên kết đàn hồi.

$$\bar{T}_{max} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} M_j\, y_{j,max}^2$$, n là số khối l- ợng tập trung.

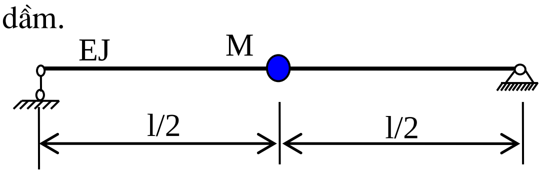
❖ Đối với hệ có khối l- ợng phân bố, dạng dao động xảy ra phù hợp với đ- ờng đàn hồi X(x), ta có các công thức xác định động năng lớn nhất và thế năng lớn nhất nh- sau:

$$U_{max} = \frac{1}{2}\sum\int_0^l EJ_x\left[X''(x)\right]^2 dx$$

$$\bar{T}_{max} = \frac{1}{2}\sum\int_0^l M_x X^2(x)dx.$$

dấu Σ lấy với tất cả các thanh trong hệ.

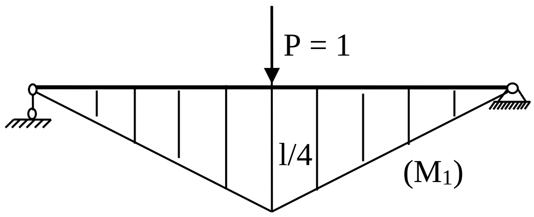
<u>Ví dụ 1:</u> Xác định tần số dao động riêng của hệ cho trên hình 1.5. Hệ gồm khối l- ợng tập trung M đặt tại giữa dầm.



Hình 1.5

<u>Giải:</u>

Tr- ớc hết, ta xác định chuyển vị do lực đơn vị đặt tại khối l- ợng M theo ph- ơng dao động của hệ:



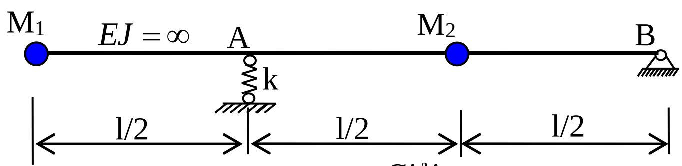
Bằng công thức tích phân MO hay ph- ơng pháp nhân biểu đồ Vêrêsaghin ta tính đ- ợc:

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{48EJ}$$

Từ đó, ta suy ra tần số dao động riêng của cơ hệ :

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{M\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{48EJ}{M\,l^3}}$$

<u>Ví du 2:</u> Xác định tần số dao động riêng của hệ cho trên hình 1.6, cho biết độ cứng của liên kết đàn hồi là k, dầm cứng tuyệt đối EJ = ∞.



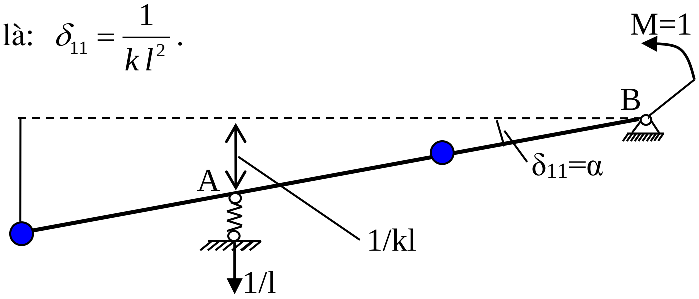
Hình 1.6

<u>Giải:</u>

<u>*Cách 1*</u>:

Hệ có hai khối l- ợng nh- ng chỉ có một bậc tự do. Tham số đặc tr- ng cho dao động của hệ có thể chọn là góc xoay t- ơng đối tại gối tựa bên phải α, đó chính là chuyển vị tổng quát của hệ.

Để xác định δ_{11} trong tr- ờng hợp này ta cần đặt vào gối tựa B một mômen đơn vị M = 1 (vì chuyển vị là góc xoay). Mômen này gây ra phản lực gối A bằng 1/l, phản lực tại gối A t- ơng ứng tạo nên chuyển dịch thẳng đứng theo ph- ơng đứng tại gối A là 1/(kl). Do đó, chuyển vị đơn vị là: $\delta_{11} = \dfrac{1}{k\,l^2}$.



Mômen quán tính của khối l- ợng trong tr- ờng hợp này tính nh- sau:

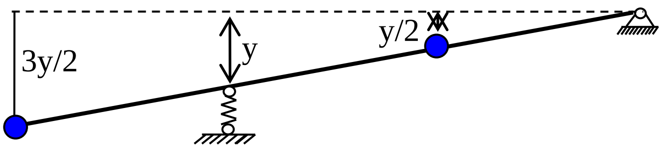
$$J_m(u) = M_1\left(\frac{3}{2}l\right)^2 + M_2\left(\frac{1}{2}l\right)^2 = l^2\left(\frac{9}{4}M_1 + \frac{1}{4}M_2\right)$$

Từ đó suy ra tần số riêng của hệ:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{J_m\,\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{k\,l^2}{l^2\left(\frac{9}{4}M_1 + \frac{1}{4}M_2\right)}} = 2\sqrt{\frac{k}{9M_1 + M_2}}$$

<u>*Cách 2:*</u> Sử dụng ph- ơng pháp năng l- ợng.

Hệ có 1 bậc tự do, chuyển vị của các khối l- ợng của hệ đ- ợc biểu thị qua chuyển vị tại vị trí liên kết đàn hồi.



Động năng và thế năng cực đại của hệ:

$$U_{max} = \frac{1}{2}k\,y^2$$

$$\overline{T}_{max} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} M_i\,y_{i,max}^2 = \frac{1}{2}\left[M_1\left(\frac{3}{2}y\right)^2 + M_2\left(\frac{1}{2}y\right)^2\right]$$

Tần số dao động riêng của cơ hệ:

$$\omega = \sqrt{\frac{U_{max}}{\overline{T}_{max}}} = 2\sqrt{\frac{k}{9M_1 + M_2}}$$

❖ <u>*Chú ý:*</u> Khi kể đến ảnh h- ởng của trọng l- ợng bản thân, thì ph- ơng trình vi phân dao động tự do (1.22) đ- ợc bổ sung thêm trọng l- ợng bản thân G:

$$M\ddot{y} + k\,y = G \qquad (1.36)$$

Từ đó ta có: $\ddot{y} + \omega^2 y = \dfrac{G}{M}$

Nghiệm của ph- ơng trình này đ- ợc tìm d- ới dạng:

$$y(t) = y_t + \overline{y}(t)$$

Trong đó $\overline{y}(t)$ là nghiệm tổng quát của ph- ơng trình thuần nhất, còn y_t là nghiệm riêng của ph- ơng trình không thuần nhất. Nghiệm tổng quát của ph- ơng trình thuần nhất đ- ợc xác định theo (1.27):

$$\overline{y}(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

Còn nghiệm riêng chính là chuyển vị tĩnh do trọng l- ợng bản thân khối l- ợng gây ra:

$$y_t = \frac{G}{M\,\omega^2} = G\,\delta_{11}$$

Vậy ph- ơng trình dao động tự do khi kể đến trọng l- ợng bản thân có dạng:

$$y(t) = \frac{G}{M\,\omega^2} + A\sin(\omega t + \varphi) = G\,\delta_{11} + A\sin(\omega t + \varphi)$$

Nghĩa là, khi tính đến trọng l- ợng bản thân, dao động của hệ sẽ xảy ra xung quanh vị trí cân bằng tĩnh.

Bài 3

DAO ĐỘNG TỰ DO CÓ CẢN

Bất kỳ một quá trình dao động nào của hệ đàn hồi trong thực tế đều chịu ảnh h- ởng của lực cản. Lực cản xuất hiện do nhiều nguyên nhân khác nhau và ảnh h- ởng của chúng đến các quá trình dao động là rất phức tạp. Trong tính toán dao động kể đến tác dụng của lực cản, có nhiều tác giả đ- a ra các giả thiết khác nhau về lực cản. Các giả thiết này phù hợp với những điều kiện thực tế nhất định và cho phép đảm bảo độ chính xác của các kết quả tính toán. Ở đây chỉ đ- a ra một số giả thiết cơ bản nh- giả thiết lực cản tỷ lệ với vận tốc chuyển động của Phôi (cản nhớt), giả thiết lực cản ma sát khô của Culông.

1. Dao động tự do có cản nhớt

Giả thiết của Phôi xem rằng: lực cản các quá trình chuyển động tỷ lệ với vận tốc chuyển động. Lực cản trong tr- ờng hợp này đ- ợc xác định theo:

$$P_c = c\,\dot{y} \qquad (1.37)$$

Ph- ơng trình vi phân mô tả dao động tự do có cản nhớt đ- ợc cho bởi:

$$M\ddot{y} + c\,\dot{y} + k\,y = 0 \qquad (1.38)$$

Ph- ơng trình trên đ- ợc viết lại nh- sau:

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \omega^2 y = 0 \qquad (1.39)$$

Trong đó: $2\alpha = c/M$.

Ph- ơng trình (1.39) có ph- ơng trình đặc tr- ng:

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega^2 = 0$$

Nghiệm của ph- ơng trình đặc tr- ng là:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} = -\frac{c}{2M} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2M}\right)^2 - \omega^2} \tag{1.40}$$

Nghiệm của ph- ơng trình đặc tr- ng (1.40) phụ thuộc rất nhiều vào hệ số tắt dần c của hệ. Công thức (1.40) xác định giá trị λ phụ thuộc vào dấu của biểu thức trong căn : d- ơng, âm hay bằng không.

Để thuận tiện cho việc nghiên cứu, ta xét tr- ờng hợp giới hạn là tr- ờng hợp biểu thức trong căn của (1.40) bằng không, khi đó: $c/2M = \omega$ hay α = ω.

Hệ số cứng c ứng với tr- ờng hợp giới hạn này gọi là *đại l- ợng tắt dần giới hạn* và kí hiệu là c*, ta có: c* = 2Mω (1.41)

Để tiện cho việc khảo sát, ta đ- a vào khái niệm *tham số tắt dần* ε :

$$\varepsilon = \frac{c}{c^*} = \frac{c}{2M\omega} \tag{1.42}$$

Khi : ε = 0 : tr- ờng hợp không xét đến ảnh h- ởng của lực cản.

ε = 1 : ứng với tr- ờng hợp lực cản tới hạn,

ε < 1 : ứng với tr- ờng hợp lực cản nhỏ,

ε > 1 : ứng với tr- ờng hợp lực cản lớn.

Ta lần l- ợt khảo sát các tr- ờng hợp này:

a) Tr- ờng hợp lực cản nhỏ (ε < 1):

Thế biểu thức (1.42) vào (1.40) ta đ- ợc :

$$\lambda_{1,2} = -\omega\varepsilon \pm \sqrt{(\omega\varepsilon)^2 - \omega^2}$$

Khi ε < 1 ta có: $$\lambda_{1,2} = -\omega\varepsilon \pm \omega_c i \tag{1.43}$$

Trong đó: $\omega_c = \omega\sqrt{1-\varepsilon^2}$ (1.44)

ω_c gọi là tần số dao động tự do khi tính đến ảnh h- ởng của lực cản.

Đối với các kết cấu xây dựng thông th- ờng, tham số tắt dần : ε < 20% do đó sự khác biệt giữa tần số riêng khi tính đến và không tính đến lực cản là không đáng kể.

Nghiệm của ph- ơng trình vi phân mô tả chuyển động của hệ trong tr- ờng hợp này:

$$y(t) = D_1 e^{(-\omega\varepsilon+\omega_c i)t} + D_2 e^{(-\omega\varepsilon-\omega_c i)t} = e^{-\omega\varepsilon t}\left(D_1 e^{i\omega_c t} + D_2 e^{-i\omega_c t}\right) \tag{1.45}$$

Biểu thức trong ngoặc của (1.45) biểu thị dao động điều hoà đơn giản. Ta có thể viết nghiệm này d- ới dạng l- ợng giác:

$$y(t) = e^{-\omega\varepsilon t}\left(A_1 \sin\omega_c t + A_2 cos\omega_c t\right) \tag{1.46}$$

Trong đó các hằng số A_1 và A_2 đ- ợc xác định từ điều kiện đầu. Giả sử tại thời điểm ban đầu t = 0 : $y(0) = y_o$, $\dot{y}(0) = v_o$.

Thay nghiệm (1.46) vào điều kiện đầu ở trên, ta xác định đ- ợc:

$$A_1 = \frac{v_o + \omega\varepsilon y_o}{\omega_c}, \quad A_2 = y_o .$$

Nh- vậy suy ra:

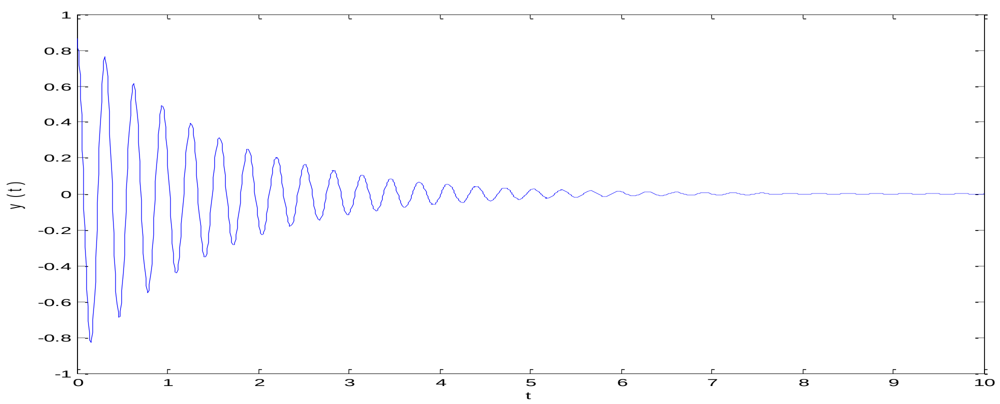
$$y(t) = e^{-\omega\varepsilon t}\left(\frac{v_o + \omega\varepsilon y_o}{\omega_c}\sin\omega_c t + y_o cos\omega_c t\right) \qquad (1.47)$$

Biểu thức nghiệm (1.47) có thể viết lại d- ới dạng nh- sau:

$$y(t) = Ae^{-\omega\varepsilon t}\sin\left(\omega_c t + \varphi_c\right) \qquad (1.48)$$

Trong đó: $A = \sqrt{y_o^2 + \left(\frac{v_o + \omega\varepsilon y_o}{\omega_c}\right)^2}$, $\varphi_c = arctg\frac{\omega_c y_o}{v_o + \omega\varepsilon y_o}$.

Từ biểu thức (1.47) hoặc (1.48) ta nhận thấy dao động có lực cản là dao động tắt dần. Dạng đồ thị của dao động tắt dần cho ở hình 1.7:



Hình 1.7

Chu kỳ của dao động khi có lực cản là:

$$T_c = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\varepsilon^2}}\ (s) \qquad (1.49)$$

Tần số dao động:

$$f_c = \frac{1}{T_c} = \frac{\omega\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\pi}\ (s) \qquad (1.50)$$

Qua đồ thị hình 1.7 ta thấy: dao động có xét đến ảnh h- ởng của lực cản là dao động điều hoà, nh- ng biên độ giảm dần theo thời gian với quy luật số mũ âm và nó tiệm cận dần đến không. Ta nói chuyển động trong tr- ờng hợp này là dao động tắt dần.

Bản chất của tham số tắt dần đối với các hệ kết cấu xây dựng thông th- ờng rất phức tạp, và việc xác định nó không đơn giản. Tuy nhiên, ta có thể biểu thị sự tắt dần dao động của các hệ thức d- ới dạng các hệ số t- ơng đ- ơng, các hệ số này sẽ xác định rõ độ tắt dần của các biên độ dao động. Muốn vậy, ta xét tỷ số giữa hai biên độ mang giá trị d- ơng cách nhau một chu kỳ T_c là y_n và y_{n+1} :

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{Ae^{-\omega\varepsilon t}}{Ae^{-\omega\varepsilon(t+T_c)}} = e^{2\pi\varepsilon\frac{\omega}{\omega_c}} \qquad (1.51)$$

Từ biểu thức (1.51) ta suy ra:

$$\delta = \ln\frac{y_n}{y_{n+1}} = 2\pi\varepsilon\frac{\omega}{\omega_c} \qquad (1.52)$$

δ là hệ số biểu thị tốc độ tắt dần và đ- ợc gọi là độ suy giảm Loga (độ tắt Loga). Chú ý đến (1.44) ta có : $\delta = \frac{2\pi\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ (1.53)

Khi lực cản nhỏ, có thể tính gần đúng (1.53) theo công thức sau :

$$\delta \approx 2\pi\varepsilon \qquad (1.54)$$

Từ đó suy ra: $\varepsilon = \frac{\delta}{2\pi}$ (1.55)

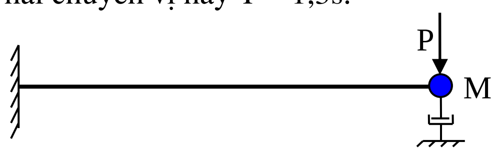
Với sự gần đúng của độ suy giảm lôga xác định theo (1.54), ta có thể biểu thị quan hệ (1.51) d- ới dạng:

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = e^{\delta} \approx e^{2\pi\varepsilon} = 1 + 2\pi\varepsilon + \frac{(2\pi\varepsilon)^2}{2!} + ...$$

Khi các giá trị tham số tắt dần là nhỏ ta chỉ cần giữ lại hai số hạng đầu của chuỗi trên vẫn có thể đảm bảo độ chính xác. Khi đó ta nhận đ- ợc:

$$\varepsilon = \frac{y_n - y_{n+1}}{2\pi\, y_{n+1}} \qquad (1.56)$$

Ví du: Xác định các đặc tr- ng động học và biên độ dao động sau 5 chu kỳ của hệ tắt dần cho ở hình vẽ 1.8. Khối l- ợng M chịu tác dụng của lực kích động P, sau đó bỏ đi một cách tức thời. Trong thời gian duy trì tải trọng với P = 90kN chuyển vị của khối l- ợng đạt đ- ợc 0,5cm. Khi tải trọng mất đi đột ngột, chuyển vị cực đại đầu tiên của khối l- ợng bằng 0,4cm. Thời gian của chu kỳ đối với hai chuyển vị này T = 1,3s.



Hình 1.8

Giải:

Đây là dao động tự do có cản. Các đặc tr- ng động học của hệ bao gồm: khối l- ợng, tính chất đàn hồi, tần số dao động, tham số tắt dần và hệ số tắt dần.

- Xác định khối l- ợng của hệ:

Ta có: Độ cứng của hệ đàn hồi là : $k = \frac{P}{\Delta} = \frac{90}{0,5} = 180\left(kN/cm\right)$

Ta lại có: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} \Rightarrow M = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 k = \left(\frac{1,3}{2\pi}\right)^2 180 = 7,7\left(\frac{kN.s^2}{cm}\right)$

- Tần số dao động riêng: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1,3} = 4,833(rad/s)$

- Xác định tham số tắt dần:

Độ suy giảm Lôga: $\delta = \ln\frac{y_n}{y_{n+1}} = \ln\frac{0,5}{0,4} = 0,223$

Tham số tắt dần: $\varepsilon = \frac{\delta}{2\pi} = \frac{0,223}{2\pi} = 0,0355$

- Xác định tần số ω_c

$$\omega_c = \omega\sqrt{1-\varepsilon^2} = 4,833\sqrt{1-0,0355^2} = 4.829(rad/s)$$

- Hệ số tắt dần:

$$c = \varepsilon.c* = \varepsilon.2M\omega = 0,0355.2.7,7.4,833 = 2,642(kN.s/cm)$$

- Biên độ dao động sau 5 chu kỳ dao động:

$$y_5 = y_o\, e^{-5\delta} = 0,5e^{-5.0,223} = 0,1638(cm)$$

Hoặc có thể tính theo công thức:

$$y_5 = y_o\left(\frac{y_1}{y_o}\right)^5 = 0,5\left(\frac{0,4}{0,5}\right)^5 = 0,1638(cm)$$

b) *Tr- ờng hợp lực cản lớn (ε > 1)*

Tr- ờng hợp này nghiệm của ph- ơng trình đặc tr- ng là:

$$\lambda_{1,2} = -\omega\varepsilon \pm \omega\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$$

Từ đó suy ra nghiệm của ph- ơng trình vi phân trong tr- ờng hợp này có dạng:

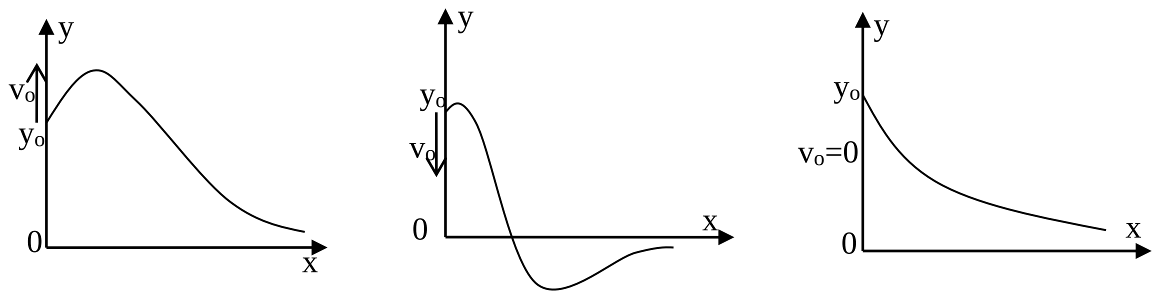
$$y(t) = e^{-\omega\varepsilon t}\left(A_1\, e^{\omega\sqrt{\varepsilon^2-1}t} + A_2\, e^{-\omega\sqrt{\varepsilon^2-1}t}\right) \qquad (1.57)$$

Trong đó A_1 và A_2 là các hằng số đ- ợc xác định từ điều kiện đầu.

Ta còn có thể biểu diễn nghiệm (1.57) d- ới dạng:

$$y(t) = Ae^{-\omega\varepsilon t}\, sh\left(\omega\sqrt{\varepsilon^2 - 1}\,t + \varphi\right) \qquad (1.58)$$

Công thức (1.58) cho thấy rằng: chuyển động của hệ trong tr- ờng hợp lực cản lớn là các chuyển động tắt dần không dao động. Các dạng chuyển động này có thể xảy ra ở những dạng khác nhau, nh- ng đều dần tiệm cận đến vị trí cân bằng ban đầu. Các dạng chuyển động của hệ đ- ợc mô tả trên hình vẽ 1.9:



Hình 1.9

c) Tr- ờng hợp lực cản tới hạn (ε = 0)

Trong tr- ờng hợp này nghiệm của ph- ơng trình đặc tr- ng là thực, âm và bằng nhau:

$$\lambda_{1,2} = -\omega\varepsilon$$

Khi đó nghiệm của ph- ơng trình vi phân chuyển động của hệ sẽ là:

$$y(t) = e^{-\omega\varepsilon t}(A_1 + A_2 t) \qquad (1.58)$$

Các hằng số A_1 và A_2 đ- ợc xác định từ điều kiện đầu.

Tại t = 0, $y(0) = y_o$, $\dot{y}(0) = v_o$. Khi đó:

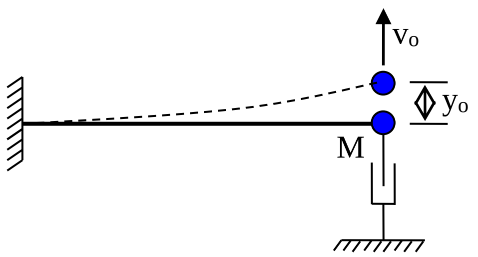
$$A_1 = y_o,\ A_2 = v_o + \omega\varepsilon y_o$$

Do đó:
$$y(t) = e^{-\omega\varepsilon t}\left[y_o + (v_o + \omega\varepsilon y_o)t\right] \qquad (1.59)$$

Chuyển động của hệ trong tr- ờng hợp này cũng không tuần hoàn, ta nói chuyển động của hệ là chuyển động tắt dần không dao động.

2. Dao động tự do có cản khô

Lực cản khô theo giả thiết của Culông phụ thuộc vào vận tốc của chuyển động, lực cản khô có chiều ng- ợc với chiều chuyển động. Lực cản khô ký hiệu là: F_{ms}.



Hình 1.10

Ph- ơng trình vi phân chuyển động tự do của hệ trong tr- ờng hợp này có dạng:

$$M\,\ddot{y} + k\,y = \pm F_{ms} \qquad (1.60)$$

Suy ra:
$$\ddot{y} + \omega^2 y = \pm\frac{F_{ms}}{M} \qquad (1.61)$$

Nghiệm của ph- ơng trình (1.61) có dạng:

$$y(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \pm \delta_{11} F_{ms} \qquad (1.62)$$

Bài 4

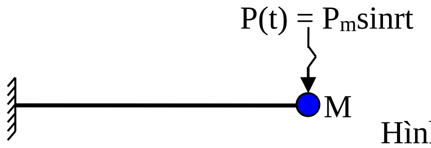
DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC CỦA HỆ CHỊU TẢI TRỌNG ĐIỀU HOÀ

1. Trường hợp không có lực cản

Phương trình vi phân dao động của hệ một bậc tự do chịu kích động điều hoà $P(t) = P_m \sin rt$ trong trường hợp này có dạng :

$$M\,\ddot{y} + k\,y = P_m \sin rt \qquad (1.63)$$

Trong đó P_m là biên độ của tải trọng, r là tần số vòng của lực kích động.



Hình 1.11

Nghiệm cuả phương trình (1.63) bao gồm nghiệm của phương trình vi phân thuần nhất và một nghiệm riêng của phương trình có vê phải.

Nghiệm của phương trình vi phân thuần nhất là:

$$y_{tn}(t) = Bcos\omega t + C\sin\omega t \qquad (1.64)$$

Các hằng số B, C được xác định từ điều kiện đầu.

Nghiệm riêng của phương trình có vế phải là:

$$y_r(t) = D\sin rt \qquad (1.65)$$

Thế (1.65) vào (1.63) ta xác định được:

$$D = \frac{P_m}{k}\frac{1}{1-\left(\frac{r}{\omega}\right)^2}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình vi phân dao động (1.63) là :

$$y(t) = y_{tn}(t) + y_r(t) = Bcos\omega t + C\sin\omega t + \frac{P_m}{k}\frac{1}{1-\left(\frac{r}{\omega}\right)^2}\sin rt \qquad (1.66)$$

Giả sử điều kiện ban đầu: t = 0; y(0) = 0 ; v(0) = 0, ta xác định được:

$$B = 0\,;\; C = -\frac{P_m}{k}\frac{\frac{r}{\omega}}{1-\left(\frac{r}{\omega}\right)^2}$$

Thay các hằng số này vào phương trình (1.66) ta nhận được:

$$y(t) = \frac{P_m}{k}\frac{1}{1-\left(\frac{r}{\omega}\right)^2}\left(\sin rt - \frac{r}{\omega}\sin\omega t\right) \qquad (1.67)$$

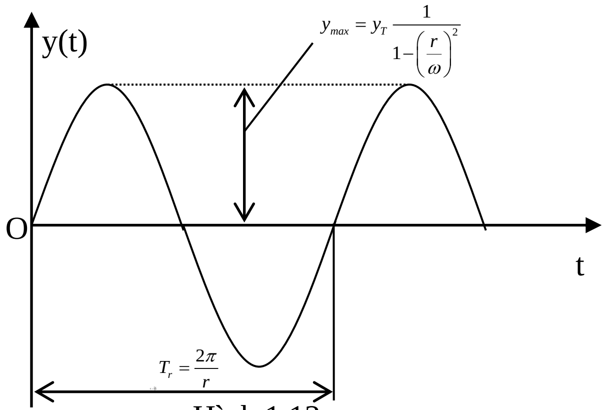
Nghiệm (1.67) gồm hai thành phần: một thành phần dao động ứng với tần số của dao động điều hoà r, và một thành phần dao động ứng với tần số của dao động tự do ω. Ta biết rằng trong thực tế, các dao động đều chịu ảnh hưởng của lực cản, mặc dù lực cản gây ảnh hưởng không đáng kể đến tần số dao động riêng, nhưng khi đã có lực cản, thì lực cản dù nhỏ cũng sẽ làm tắt dần phần dao động tự do sau một thời gian ngắn dao động. Sau đó hệ sẽ chuyển sang thời kì dao động ổn định (hay cón gọi là bình ổn) có chu kỳ ứng với chu kỳ của tải trọng điều hoà:

$$y(t)=\frac{P_m}{k}\frac{1}{1-\left(\frac{r}{\omega}\right)^2}\sin rt \qquad (1.68)$$

Ta thấy $\frac{P_m}{k}=y_T$ là chuyển vị tại khối lượng do biên độ P_m của tải trọng điều hoà tác dụng tĩnh gây ra, do đó ta có thể viết:

$$y(t)=y_T\frac{1}{1-\left(\frac{r}{\omega}\right)^2}\sin rt \qquad (1.69)$$

Trên hình 1.12 mô tả dao động cưỡng bức của hệ chịu tải trọng điều hoà trong trường hợp tần số của lực kích thích nhỏ hơn tần số dao động riêng $r<\omega$.



Hình 1.12

Phương trình dao động (1.69) có chứa chuyển vị tĩnh y_T sẽ đặt ra vấn đề về sự liên quan giữa chuyển vị động y(t) với chuyển vị tĩnh y_T đó. Sự liên quan này được xem xét từ hệ số động lực theo thời gian và hệ số động.

Hệ số động theo thời gian: K(t).

Hệ số động theo thời gian là tỷ số giữa chuyển vị động ứng với trạng thái chuyển động của hệ với chuyển vị tĩnh do biên độ của tải trọng động tác dụng tĩnh gây ra.

$$K(t)=\frac{y(t)}{y_T} \qquad (1.70)$$

Hệ số động: K_d.

Hệ số động là tỷ số giữa chuyển vị động cực đại của trạng thái chuyển động với chuyển vị tĩnh do biên độ của tải trọng động tác dụng tĩnh gây ra:

$$K_d = \frac{y_{max}}{y_T} \qquad (1.71)$$

Từ đó suy ra: $K_d = K(t)_{max}$ (1.72)

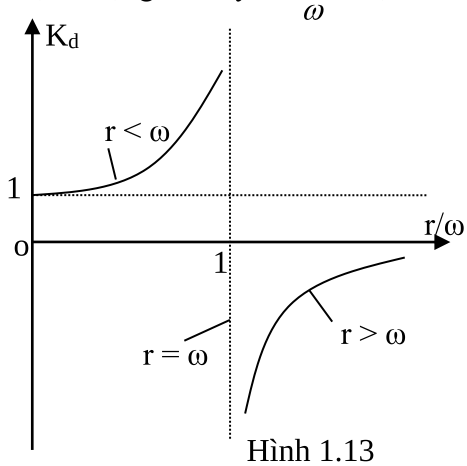
Với trường hợp hệ chịu tác dụng của tải trọng điều hoà, để tính hệ số động theo thời gian, ta thay (1.69) vào (1.70) ta sẽ được:

$$K(t) = \frac{\sin rt}{1 - \frac{r^2}{\omega^2}} \qquad (1.73)$$

Còn hệ số động ứng với trạng thái dao động điều hoà:

$$K_d = \frac{1}{1 - \frac{r^2}{\omega^2}} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - r^2} \qquad (1.74)$$

Đồ thị biểu diễn hệ số động theo tỷ số $\frac{r}{\omega}$ được cho trên hình vẽ 1.13.



Hình 1.13

Qua đồ thị ta thấy:

Khi : $r/\omega > 1$, thì $K_d < 0$

Khi : $0 \le r/\omega < 1$, thì $K_d \ge 1$.

Khi : $r \approx \omega$, K_d có sự biến đổi rất nhanh, và $r = \omega$ thì $K_d = \infty$, lúc này xuất hiện hiện tượng cộng hưởng: chuyển vị của hệ sẽ lớn vô cùng. Phải hết sức tránh hiện tượng cộng hưởng, trong thiết kế người ta thường xác định sao cho sự khác nhau của các tần số r và ω không dưới 25%.

Vậy, *hiện tượng cộng hưởng là hiện tượng mà biên độ dao động cưỡng bức tăng lên rất lớn do tần số của lực kích động trùng với tần số của dao động tự do.*

2. Tr�ờng hợp có cản

Trong phần này ta chỉ giới hạn xét cho trường hợp cản theo giả thiết của Phôi, tức xem rằng lực cản tỷ lệ với vận tốc. Phương trình vi phân dao động của hệ chịu tác dụng của tải trọng điều hoà có cản là:

$$M\,\ddot{y} + c\,\dot{y} + k\,y = P_m \sin rt \qquad (1.75)$$

Phương trình trên còn được viết dưới dạng:

$$\ddot{y} + 2\omega\varepsilon\,\dot{y} + \omega^2\,y = \frac{P_m}{k}\sin rt \qquad (1.76)$$

Trong đó: $\varepsilon = \dfrac{c}{2M\omega}$

Nghiệm của phương trình (1.76) bằng tổng nghiệm của phương trình thuần nhất và nghiệm riêng của phương trình có vế phải.

Ở đây ta xét trường hợp lực cản nhỏ. Nghiệm thuần nhất của phương trình vi phân (1.76) có dạng:

$$y_{tn}(t) = e^{-\omega\varepsilon t}\left(B\sin\omega_c t + C\,cos\,\omega_c t\right) \qquad (1.77)$$

Nghiệm riêng được tìm dưới dạng:

$$y_r(t) = D_1\sin rt + D_2 cos\,rt \qquad (1.78)$$

Thế biểu thức (1.78) vào phương trình (1.76) rồi so sánh các hệ số của $\sin rt$ và $cos\,rt$, ta rút ra hệ hai phương trình đại số tuyến tính để xác định D_1 và D_2:

$$\begin{cases} D_1(1-\beta^2) - D_2(2\varepsilon\beta) = \dfrac{P_m}{k} \\ D_2(1-\beta^2) + D_1(2\varepsilon\beta) = 0 \end{cases} \qquad (1.79)$$

Trong đó : $\beta = \dfrac{r}{\omega}$.

Giải hệ phương trình (1.79) ta được: $\begin{cases} D_1 = \dfrac{P_m}{k}\dfrac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2\varepsilon\beta\right)^2} \\ D_2 = \dfrac{P_m}{k}\dfrac{-2\varepsilon\beta}{\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2\varepsilon\beta\right)^2} \end{cases}$

Thế các hằng số này vào (1.78) ta sẽ nhận được biểu thức nghiệm riêng của phương trình vi phân (1.76), và từ đó ta có nghiệm tổng quát của phương trình (1.76):

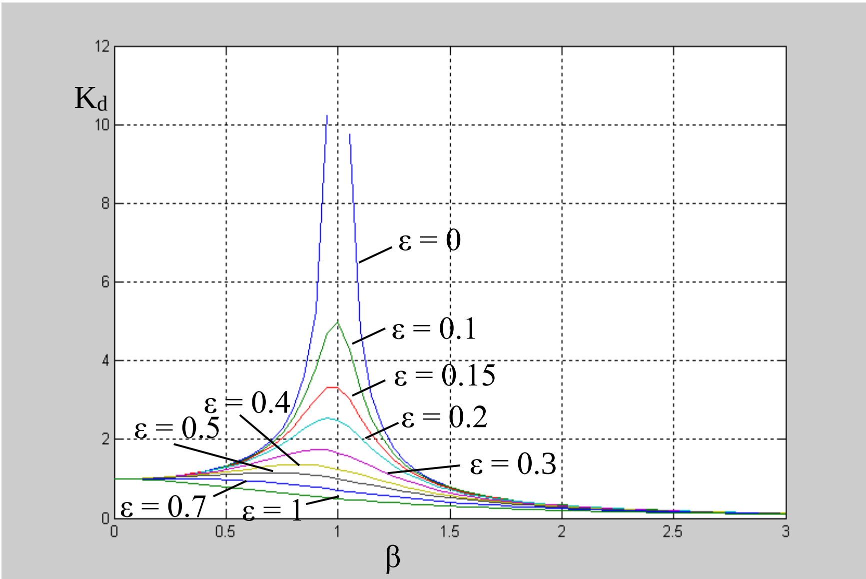
$$y(t) = e^{-\omega\varepsilon t}\left(B\sin\omega_c t + C\,cos\,\omega_c t\right) + \frac{\dfrac{P_m}{k}}{\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2\varepsilon\beta\right)^2}\left[(1-\beta^2)\sin rt - 2\varepsilon\beta cos\,rt\right] \qquad (1.80)$$

Thành phần thứ nhất của vế phải của (1.80) chứa nhân tử $e^{-\omega\varepsilon t}$ biểu thị dao động tự do tắt dần. Thành phần thứ hai có cùng tần số với tần số của lực kích động biểu thị dao động cưỡng bức, nó đặc trưng cho quá trình chuyển động ổn định (hay bình ổn) của hệ.

Hệ số động trong trường hợp này:

$$K_d = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\varepsilon\beta)^2}} \qquad (1.81)$$

Ta thấy: Hệ số động phụ thuộc vào tỷ số các tần số của tải trọng điều hoà với tần số dao động riêng β và tham số tắt dần ε. Đồ thị phụ thuộc của K_d vào β khi ε thay đổi cho ở hình 1.14:



Hình 1.14

3. Thực hành trên mô hình phòng thí nghiệm dao động hệ một bậc tự do

Tại phòng thí nghiệm Khoa Xây dựng và Môi trường đang có một số thiết bị để thực hành mô hình hóa hệ một bậc tự do chịu tác dụng của lực cưỡng bức dưới dạng hình sin. Sinh viên có thể được giao việc thao tác và vận hành thiết bị, đọc kết quả và xử lý kết quả bài toán dao động cưỡng bức chịu tải trọng điều hòa. Việc thực hành này sẽ được hướng dẫn cụ thể thông qua Giảng viên trực tiếp giảng dạy và cán bộ thí nghiệm. Các tài liệu học tập và quy trình thí nghiệm sẽ được cung cấp cho sinh viên khi tiến hành thí nghiệm.

Bài 5

DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC CHỊU TÁC DỤNG CỦA TẢI TRỌNG CÓ CHU KỲ

1. Biểu thị tải trọng ra dạng chuỗi Fuaier

Trong thực tế ta hay gặp các lực kích động có chu kỳ (kích động tuần hoàn). Như đã biết trong giải tích toán học, hàm P(t) tuần hoàn chu kỳ T_p bao giờ cũng có thể khai triển thành chuỗi Fuarier:

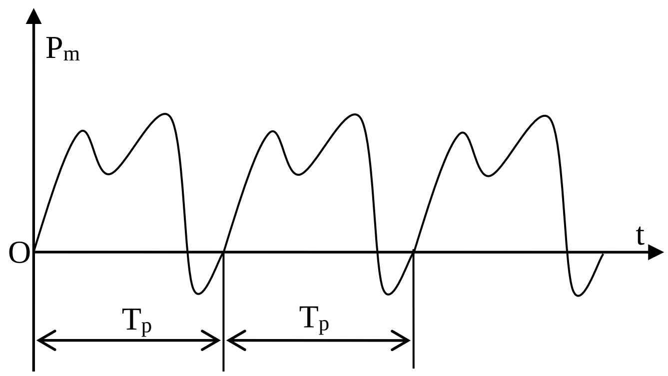
$$P(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\frac{2\pi n}{T_p}t + b_n \sin\frac{2\pi n}{T_p}t \right) \qquad (1.82)$$

Trong đó : T_p là chu kỳ của lực kích động (tải trọng). Các hệ số a_o, a_n và b_n được tính như sau:

$$a_o = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p} P(t)dt \qquad (a)$$

$$a_n = \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p} P(t)cos\frac{2\pi n}{T_p}t\,dt \qquad (b) \qquad (1.83)$$

$$b_n = \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p} P(t)\sin\frac{2\pi n}{T_p}t\,dt \qquad (c)$$



Hình 1.15

2. Dao động của hệ chịu tải trọng biểu thị ở dạng chuỗi Fuarier

Tải trọng có chu kỳ tuỳ ý khai triển chuỗi Fuarier xác định theo (1.82), trong đó bao gồm tải trọng không đổi (là tải trọng trung bình được biểu thị bằng hệ số a_0 xác định theo (1.83)) và các chuỗi tải trọng điều hoà với các biên độ a_n, b_n và các tần số r_1. Từ đó ta có thể viết được phương trình dao động không cản tương ứng với các thành phần tải trọng sinrt và cosrt của chuỗi (1.82) như sau:

$$y_n(t) = \frac{b_n}{k}\frac{1}{1-\beta_n^2}\sin nr_1 t$$

$$y_n(t) = \frac{a_n}{k}\frac{1}{1-\beta_n^2}\cos nr_1 t$$

Dao động tương ứng với thành phần tải trọng không đổi a_o được biểu thị bằng độ võng tĩnh:

$$y_o = \frac{a_o}{k}$$

Cuối cùng, dao động của hệ chịu tải trọng có chu kỳ sẽ bằng tổng các dao động ứng với từng thành phần khai triển của chuỗi tải trọng:

$$y(t) = \frac{1}{k}\left[a_o + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\beta_n^2}\left(a_n\cos nr_1 t + b_n \sin nr_1 t\right)\right] \qquad (1.84)$$

Trong trường hợp có xét đến ảnh hưởng của lực cản, dao động cưỡng bức của hệ một bậc tự do chịu tác dụng của tải trọng tuần hoàn được tính bằng tổng các dao động tương ứng với các thành phần khai triển của chuỗi tải trọng được xác định theo (1.82), nhưng biểu thức dao động ứng với mỗi thành phần tải trọng điều hoà được tính theo (1.80). Dao động toàn phần của hệ ở chế độ bình ổn sẽ là:

$$y(t) = \frac{1}{k}\left\{a_o + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1-\beta_n^2\right)+\left(2\varepsilon\beta_n\right)^2}\left\{\left[b_n(1-\beta_n^2)+a_n 2\varepsilon\beta_n\right]\sin nr_1 t + \left[a_n(1-\beta_n^2)-b_n 2\varepsilon\beta_n\right]\cos nr_1 t\right\}\right\}$$

(1.85)

Bài 6

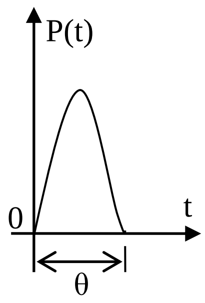
DAO ĐỘNG CỦA HỆ CHỊU TÁC DỤNG CỦA XUNG TỨC THỜI

1. Phương trình dao động tổng quát

Khi tải trọng động ngắn hạn tác dụng lên công trình mà thời gian duy trì tải trọng không vượt quá 25% chu kỳ dao động riêng của kết cấu, thì tải trọng ngắn hạn đó được gọi là tải trọng xung tức thời.

Khi hệ chịu tác dụng của xung tức thời, nghĩa là trên hệ không tồn tại sự có mặt của tải trọng động. Hệ dao động được là do hệ đã nhận được một vận tốc nào đó mà tải trọng xung truyền cho hệ. Vì vậy, dao động của hệ dưới tác dụng của các xung tức thời là dạng dao động tự do. Như đã biết, phương trình dao động tự do trong các trường hợp xét đến và không xét đến ảnh hưởng của lực cản được viết theo công thức (1.48) và (1.26). Trong các công thức đó, nếu xem rằng: tại thời điểm xung tác dụng, độ võng tĩnh ban đầu bằng không (y(0) = 0), thì vấn đề ở đây là phải xác định tốc độ ban đầu v(0) trong trường hợp này như thế nào.

Thời gian duy trì tải trọng rất ngắn, nên tác dụng của tải trọng lên hệ sẽ thay đổi bằng tác dụng của xung lực S được xác định bằng diện tích biểu đồ tải trọng theo thời gian (hình 1.16a)



Hình 1.16

Ta có: $S = \int_0^\theta P(t)dt$ (1.86)

mặt khác: $P(t) = M\,\ddot{y} = M\,\dfrac{dv(t)}{dt}$ suy ra : $Mdv(t) = P(t)dt$ (1.87)

Tích phân hai vế đẳng thức (1.87), ta được:

$$\int_0^\theta Mdv = \int_0^\theta P(t)dt \quad \Rightarrow \quad Mv(\theta) - Mv(0) = S \tag{1.88}$$

Vì v(0) = 0, nên suy ra: $v(\theta) = \dfrac{S}{M}$ (1.89)

Thay điều kiện đầu, t = 0, y(0) = 0, v(0) = S/M vào (1.26) ta nhận được phương trình dao động của hệ một bậc tự do chịu tác dụng của xung tức thời trong trường hợp không xét tới lực cản:

$$y(t) = \frac{S}{M\omega}\sin\omega t \tag{1.90}$$

Phương trình (1.90) là phương trình dao động điều hoà với biên độ:

$$y_{max} = \frac{S}{M\omega}$$

Khi xét tới ảnh hưởng của lực cản với trường hợp lực cản nhỏ, phương trình dao động của hệ được viết theo công thức (1.48), với các điều kiện ban đầu ở trên, trong đó:

$$A = \sqrt{y_o^2 + \left(\frac{v_o + \varepsilon\omega y_o}{\omega_c}\right)^2} = \frac{v_o}{\omega_c} = \frac{S}{M\omega_c}$$

$$\varphi_c = \text{arctg}\frac{\omega y_o}{v_o + \omega\varepsilon y_o} = 0$$

Ta suy ra phương trình dao động trong trường hợp này:

$$y(t) = e^{-\varepsilon\omega t}\frac{S}{M\omega_c}\sin\omega_c t \tag{1.91}$$

Khi S = 1, biểu thức (1.91) có dạng:

$$\bar{y}(t) = e^{-\varepsilon\omega t}\frac{1}{M\omega_c}\sin\omega_c t \tag{1.92}$$

Biểu thức (1.92) được gọi là dao động của hệ chịu tác dụng của xung đơn vị.

❖ Nếu xung tác dụng vào hệ không phải thời điểm t = 0 mà tại thời điểm t = τ, thì (1.90) có dạng:

$$\bar{y}(t) = \frac{S}{M\omega}\sin\omega(t-\tau) \tag{1.93}$$

2. Tải trọng tĩnh tương đương P_{td}

Trong tính toán động lực học công trìn để xác định các giá trị lớn nhất của nội lực và chuyển vị trong kết cấu, người ta thường phải tính qua một tải trọng tĩnh tương đương với tác dụng của tải trọng động lên kết cấu.

Tải trọng tĩnh tương đương là tải trọng gây ra biến dạng bằng biến dạng cực đại do tải trọng động gây ra.

Ký hiệu tải trọng tĩnh tương đương là P_{td}. Chuyển vị cực đại của hệ một bậc tự do được tính qua tải trọng tĩnh tương đương là:

$$y_{max} = \delta_{11} P_{td} = \frac{P_{td}}{k} \tag{1.94}$$

Suy ra: $P_{td} = \dfrac{y_{max}}{\delta_{11}}$, hay : $P_{td} = k\, y_{max}$ (1.95)

Sau khi xác định được tải trọng tĩnh tương đương, bài toán được tính như bài toán tĩnh chịu tác dụng của P_{td}. Trạng thái ứng suất, biến dạng của hệ lúc này tương đương với trạng thái ứng suất biến dạng lớn nhất khi hệ chịu tác dụng của các dạng tải trọng động.

Khi hệ chịu tác dụng của xung tức thời, ta biết : $y_{max} = \dfrac{S}{M\omega}$. Thay giá trị này vào (1.94) ta được:

$$P_{td} = k\frac{S}{M\omega} = \frac{S}{M\omega\delta_{11}} = \frac{S\omega}{M\omega^2\delta_{11}} = S\omega \tag{1.96}$$

<u>*Chú ý :*</u> Khi hệ chịu tác dụng của xung tức thời, tải trọng tĩnh tương đương chính bằng lực đàn hồi lớn nhất tính theo (1.95), hoặc bằng lực quán tính lớn nhất đặt vào khối lượng:

Lực quán tính: $P_q(t) = -M\ \ddot{y}(t) = M\ \dfrac{S\omega^2}{M\omega}\sin\omega t = S\omega\sin\omega t$

Do đó: $P_q^{max} = S\omega$, kết quả này đúng với công thức (1.96).

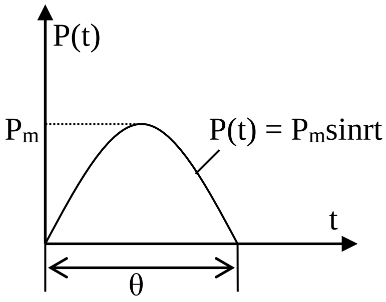
Bài 7

DAO ĐỘNG CỦA HỆ CHỊU TÁC DỤNG CỦA TẢI TRỌNG NGẮN HẠN

Ở phần này ta sẽ khảo sát tác dụng của loại tải trọng ngắn hạn. Khi θ/T < 25% thì tác dụng của tải trọng ngắn hạn được xét như tác dụng của xung tức thời. Trong phần này sẽ xem xét một số dạng tải trọng động ngắn hạn trong đó θ/T > 25%. Khi chịu tác dụng của tải trọng ngắn hạn, trạng thái ứng suất biến dạng lớn nhất của hệ sẽ đạt được trong một khoảng thời gian rất ngắn, so với trước khi lực tắt dần có thể hấp thụ được phần lớn năng lượng của quá trình dao động. Vì vậy khi tính toán hệ chịu tác dụng của tải trọng ngắn hạn sẽ không xét tới ảnh hưởng của lực cản.

1. Tải trọng ngắn hạn có dạng hình sin

Xét dao động của hệ một bậc tự do chịu tác dụng của tải trọng động ngắn hạn có dạng hình sin (hình 1.17).



Hình 1.17

Nói chung khi chịu tải trọng ngắn hạn, dao động của hệ sẽ được tính toán ở hai giai đoạn: một giai đoạn có sự duy trì của tải trọng động và một giai đoạn hệ dao động tự do không có tồn tại của tải trọng động bên ngoài.

- Xét khoảng 1: $0 \le t \le \theta$.

Trong giai đoạn này, hệ chịu tác dụng của tải trọng điều hoà P(t) = P_m sinrt. Với chuyển vị và vận tốc ban đầu của hệ bằng không, thì dao động của hệ được cho bởi:

$$y(t) = \frac{P_m}{k}\frac{1}{1-\beta^2}(\sin rt - \beta\sin\omega t) \qquad (1.97)$$

Trong đó : $\beta = \dfrac{r}{\omega}$.

- Xét khoảng 2: $t > \theta$.

Ở giai đoạn này, hệ dao động tự do, dao động này phụ thuộc vào chuyển vị y(θ) và v(θ) ở cuối giai đoạn 1. Dao động của hệ có dạng:

$$y(t) = \frac{v(\theta)}{\omega}\sin\omega(t-\theta) + y(\theta)\cos\omega(t-\theta) \qquad (1.98)$$

- Để xác định giá trị lớn nhất của chuyển vị theo thời gian ta cần phải lấy đạo hàm phương trình (1.97) và cho bằng không:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{P_m}{k}\frac{1}{1-\beta^2}(r\cos rt - r\cos\omega t) = 0$$

Suy ra: $\cos rt = \cos\omega t \;\Rightarrow\; rt = 2n\pi \pm \omega t, \quad n = 0, \pm1, \pm2, ...$ (1.99)

Ta cần quan tâm đến trường hợp tải trọng tác dụng có tần số gần với tần số dao động riêng của hệ ($r \to \omega$), như vậy cần lấy n =1 trong phương trình (1.99) đồng thời tính với dấu âm (-). Khi đó:

$$rt = \frac{2\pi}{1+\frac{\omega}{r}} \qquad (1.100)$$

Biên độ cực đại của dao động được xác định bằng phép thế biểu thức (1.100) vào (1.97). Kết quả chỉ thoả mãn khi: $rt \le \pi$ tương ứng với trường hợp $\beta < 1$.

Khi $\beta > 1$, sự cực đại của dao động sẽ xảy ra ở khoảng thời gian thứ hai ứng với dao động tự do. Chuyển vị ban đầu và vận tốc ban đầu ở khoảng này được xác định bằng phương trình (1.97) và đạo hàm phương trình này theo thời gian với phép thế $r\theta = \pi$:

$$y(\theta) = \frac{P_m}{k}\frac{1}{1-\beta^2}(0-\beta\sin\frac{\pi}{\beta})$$

$$v(\theta) = \frac{P_m}{k}\frac{r}{1-\beta^2}(-1-\cos\frac{\pi}{\beta})$$

Biên độ dao động tự do của giai đoạn này được xác định bởi:

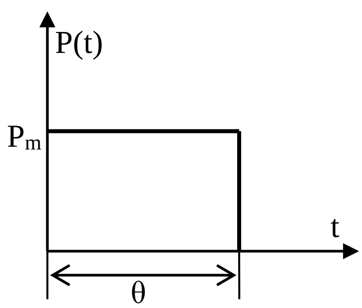
$$A = \sqrt{y^2(\theta) + \left(\frac{v^2(\theta)}{\omega}\right)^2} = \frac{P_m}{k}\frac{1}{1-\beta^2}\beta\left(2+2\cos\frac{\pi}{\beta}\right)^{1/2}$$

Do đó, hệ số động lực trong trường hợp này sẽ bằng ($\beta > 1,\ t > \theta$):

$$K_d = \frac{y_{max}}{y_T} = \frac{y_{max}}{\frac{P_m}{k}} = \frac{2\beta}{1-\beta^2}\cos\frac{\pi}{2\beta}$$

(1.101)

2. Tải trọng ngắn hạn có dạng hình chữ nhật



Hình 1.18

Xét dao động của hệ trong trường hợp chịu tác dụng của tải trọng tăng đột biến, sau đó giữ nguyên giá trị trong một thời gian ngắn θ (hình 1.18).

$P(t) = P_m$ Khi $t \le \theta$,

$P(t) = 0$ Khi $t > \theta$.

Ta cũng tính hệ ở giai đoạn ứng với hai khoảng thời gian:

- Xét khoảng 1: $t \le \theta$, $P(t) = P_m$

Nghiệm riêng của phương trình vi phân dao động khi chịu tải trọng này chính là độ võng tĩnh:

$$y_T = \frac{P_m}{k}$$

Tính đến biểu thức này, nghiệm tổng quát chứa các hằng số được xác định từ điều kiện ban đầu bằng không ($y(0)=0, \dot{y}(0)=0$) sẽ là:

$$y(t) = \frac{P_m}{k}(1 - cos\omega t) \qquad (1.102)$$

Biểu thức (1.102) là quy luật dao động của hệ ở khoảng đầu. Để xác định giá trị lớn nhất của chuyển vị ta lấy đạo hàm biểu thức (1.102) theo thời gian và cho bằng không:

$$\dot{y}(t) = \frac{P_m}{k}\omega \sin\omega t = 0 \;\Rightarrow \omega t = n\pi,\; t = n\frac{T}{2}$$

Với : $n=1 \Rightarrow t = T/2$. Vì đang xét trong khoảng một, nên $t \le \theta$ do đó ta có điều kiện để cực trị xảy ra ở khoảng này là: $\dfrac{\theta}{T} \ge 0,5$.

Ứng với $t = T/2$ ta thấy: $y(t=\dfrac{T}{2}) = 2\dfrac{P_m}{k} = 2y_T$, nghĩa là hệ số động trong trường hợp này bằng 2.

- Xét trong khoảng 2: $t > \theta, P(t) = 0$.

Phương trình dao động tự do ở khoảng này :

$$y(t) = y(\theta)cos\omega(t-\theta) + \frac{v(\theta)}{\omega}\sin\omega(t-\theta) \qquad (1.103)$$

Trong đó $y(\theta)$, $v(\theta)$ là chuyển vị và tốc độ chuyển động của hệ ở cuối khoản 1.

Biên độ dao động của hệ trong khoảng này:

$$A = \sqrt{\left(\frac{v(\theta)}{\omega}\right)^2 + y^2(\theta)} = \frac{P_m}{k}\sqrt{\sin^2\left(\frac{2\pi}{T}\theta\right) + \left(1 - cos\left(\frac{2\pi}{T}\theta\right)\right)^2}$$

$$= \frac{P_m}{k}\sqrt{2\left(1 - cos\frac{2\pi}{T}\theta\right)}$$

Trong đó: $K_d = \dfrac{y_{max}}{y_T} = 2\sin\dfrac{\pi\theta}{T}$, với : $\dfrac{\theta}{T} < 0,5$.

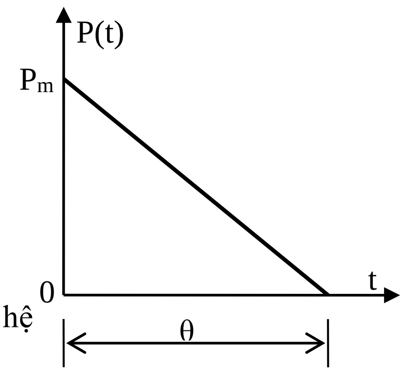
bảng các hệ số động

$\dfrac{\theta}{T}$	0	0,01	0,02	0,05	0,1	0,167	0,2	0,3	0,4	$\geq 0,5$
K_d	0	0,052	0,126	0,313	0,618	1	1,175	1,617	1,902	2

3. Tải trọng ngắn hạn có dạng hình tam giác với biên độ giảm dần

Xét dao động của hệ khi chịu tác dụng của tải trọng tăng đột biến sau đó giảm tuyến tính đến giá trị không trong thời gian ngắn θ (hình 1.19).

$$P(t) = P_m(1-\frac{t}{\theta}) \quad khi\ t \leq \theta$$
$$P(t) = 0 \quad khi\ t > \theta$$



Hình 1.19

- Xét trong khoảng một : $t \leq \theta$

Nghiệm riêng của phương trình vi phân dao động của hệ chịu tác dụng của tải trọng động $P(t) = P_m(1-\frac{t}{\theta})$ là:

$$y_x(t) = \frac{P_m}{k}\left(1-\frac{t}{\theta}\right) \qquad (1.104)$$

Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình vi phân dao động của hệ là:

$$y(t) = \frac{P_m}{k}\left(\frac{\sin\omega t}{\omega\theta} - cos\omega t + 1 - \frac{t}{\theta}\right) \qquad (1.105)$$

Để xác định giá trị lớn nhất của chuyển vị, ta cũng lấy đạo hàm của phương trình (1.105) và cho bằng không. Kết quả nhận được như sau:

Thời điểm chuyển vị cực đại là:

$$t = \frac{2arctg(\omega\theta)}{\omega} \qquad (1.106)$$

Chuyển vị cực đại:

$$y_{max} = 2\frac{P_m}{k}\left(1-\frac{arctg\omega t}{\omega\theta}\right) \qquad (1.107)$$

Hệ số động trong trường hợp này:

$$K_d = \frac{y_{max}}{y_T} = 2\left(1-\frac{arctg\omega t}{\omega\theta}\right) \qquad (1.108)$$

Điều kiện để xảy ra cực đại trong khoảng đầu là thời gian được tính theo biểu thức (1.106) sẽ nhỏ hơn hoặc bằng thời gian duy trì tải trọng θ. Từ điều kiện này ta xác định được: $\frac{\theta}{T} \geq 0,371$.

- Xét khoảng 2: $t > \theta$.

Phương trình dao động tự do được xác định từ điều kiện đầu ứng với thời điểm cuối giai đoạn một, tức là tại $t = \theta$.

$$y(t) = y(\theta)cos\omega(t-\theta) + \frac{v(\theta)}{\omega}\sin\omega(t-\theta) \quad (1.109)$$

Trong đó:

$$y(\theta) = \frac{P_m}{k}\left(\frac{\sin\omega\theta}{\omega\theta} - cos\omega\theta\right)$$

$$v(\theta) = \frac{P_m}{k}\left(\frac{cos\omega\theta}{\theta} - \omega\theta\right)$$

Biên độ dao động tự do của giai đoạn này:

$$A = \sqrt{y^2(\theta) + \left(\frac{v(\theta)}{\omega}\right)^2}$$

$$= \frac{P_m}{k}\frac{1}{\omega\theta}\sqrt{(\sin\omega\theta - \omega\theta cos\omega\theta)^2 + (cos\omega\theta + \omega\theta\sin\omega\theta - 1)^2}$$

$$= \frac{P_m}{k}\frac{\sqrt{(1-cos\omega\theta)^2 + (\omega\theta - \sin\omega\theta)^2}}{\omega\theta}$$

Do đó hệ số động:

$$K_d = \frac{y_{max}}{y_T} = \frac{\sqrt{(1-cos\omega\theta)^2 + (\omega\theta - \sin\omega\theta)^2}}{\omega\theta} \quad (1.110)$$

Điều kiện xảy ra cực đại trong khoảng này là: $\frac{\theta}{T} < 0,371$

Bảng các hệ số động

$\frac{\theta}{T}$	0	0,1	0,2	0,3	0,371	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
K_d	0	0,31	0,602	0,853	1	1,051	1,197	1,31	1,392	1,453
$\frac{\theta}{T}$	0,9	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	5	∞
K_d	1,506	1,552	1,63	1,689	1,73	1,763	1,809	1,839	1,908	2

4. Tải trọng tĩnh tương đương

Khi hệ chịu tác dụng của tải trọng động ngắn hạn cũng như khi chịu tác dụng của tải trọng động có quy luật bất kỳ theo thời gian, tải trọng tĩnh tương đương được xác định từ hệ số động K_d và giá trị lớn nhất của tải trọng động P_m như sau:

Ta đã biết công thức xác định tải trọng tĩnh tương đương:

$$P_{td} = k\, y_{max}$$

Chuyển vị lớn nhất y_{max} được tính qua hệ số động:

$$y_{max} = y_T K_d = \frac{P_m}{k} K_d$$

Thay giá trị này vào công thức xác định P_{td} ở trên, ta có:

$$P_{td} = K_d\, P_m \qquad (1.111)$$

Nói chung với tác dụng tải trọng động ngắn hạn (thời gian duy trì tải trọng rất ngắn so với chu kỳ dao động riêng), kết cấu có độ cứng càng lớn thì hệ số động càng lớn, hiệu quả tác dụng của tải trọng động lớn kết cấu càng lớn.

Bài 8

DAO ĐỘNG CỦA HỆ MỘT BẬC TỰ DO CHỊU TÁC DỤNG CỦA TẢI TRỌNG BẤT KỲ

1. Dao động của hệ trong trường hợp không xét tới lực cản.

Trong trường hợp này phương trình vi phân mô tả chuyển động của hệ có dạng:

$$M\,\ddot{y} + k\,y = P(t) \qquad (1.112)$$

hay:

$$\ddot{y} + \omega^2\, y = \frac{P(t)}{M} \qquad (1.113)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân trên bao gồm: nghiệm thuần nhất và nghiệm riêng.

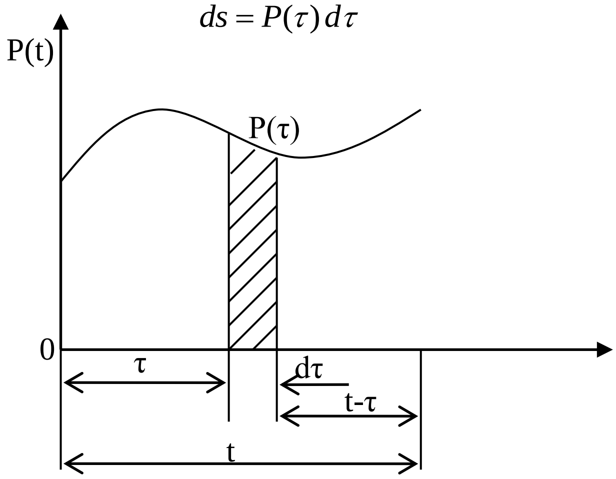
Nghiệm thuần nhất có dạng:

$$y(t) = y_o cos\omega t + \frac{v_o}{\omega}\sin\omega t \qquad (1.114)$$

Đây chính là thành phần dao động tự do do các điều kiện ban đầu khác không gây ra.

Nghiệm riêng do tác dụng của tải trọng có thể tìm được trên cơ sở sử dụng phương trình dao động của hệ chịu tác dụng của xung tức thời. Ta xét tải trọng động ở dạng tổng quát với quy luật bất kỳ trên hình 1.20, tải trọng P_t có thể được thay bằng tổng các xung phân tố vô cùng bé:

$$ds = P(\tau)\,d\tau$$



Hình 1.20

Ta xem rằng: tại thời điểm τ trên hệ chịu tác dụng của xung phân tố ds. Độ võng do tác dụng của xung phân tố ds này gây ra là: (theo (1.93)).

$$dy(t) = P(\tau)d\tau\bar{y}(1-\tau) = \frac{P(\tau)d\tau}{M\omega}\sin\omega(t-\tau) \qquad (1.115)$$

Độ võng toàn phần do tải trọng P(t) gây ra là:

$$y(t) = \frac{1}{M\omega}\int_o^t P(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau \qquad (1.116)$$

Tích phân (1.116) được gọi là tích phân Duamen.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình vi phân dao động là:

$$y(t) = y_o cos\omega t + \frac{v_o}{\omega}\sin\omega t + \frac{1}{M\omega}\int_o^t P(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau \qquad (1.117)$$

Phương trình dao động (1.117) có thể tìm được bằng cách giải trực tiếp phương trình vi phân dao động (1.113) theo phương pháp biến thiên hằng số Lagrange.

2. Hệ số động trong trường hợp tổng quát và biểu thức lực đàn hồi.

Để tìm hệ số động theo thời gian ta cần biến đổi phương trình (1.116) như sau:

$$y(t) = \frac{1}{M\omega^2}\omega\int_o^t P(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau = \delta_{11}\omega\int_o^t P(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau$$

Nếu thay P(t) = P_m f(t), trong đó f(t) là luật thay đổi theo thời gian của tải trọng động, thì ta sẽ viết lại phương trình trên dưới dạng:

$$y(t) = \delta_{11}P_m\omega\int_o^t f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau$$

hay :

$$y(t) = y_T\, \omega \int_o^t f(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau \qquad (1.118)$$

Ta đã biết biểu thức hệ số động theo thời gian:

$$K(t) = \frac{y(t)}{y_T}$$

Thay (1.118) vào biểu thức này ta có:

$$K(t) = \omega \int_o^t f(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau \qquad (1.119)$$

Hệ số động:

$$K_d = K(t)_{max} = \left(\omega \int_o^t f(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau \right)_{max} \qquad (1.120)$$

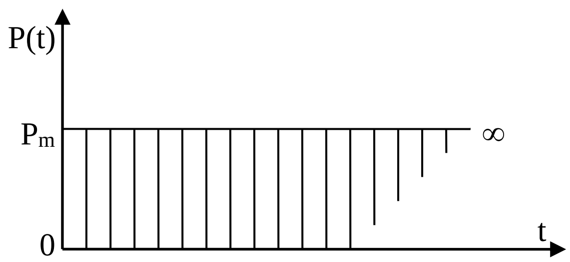
Chuyển vị của khối lượng viết theo hệ số động học theo thời gian:

$$y(t) = y_T\, K(t) \qquad (1.121)$$

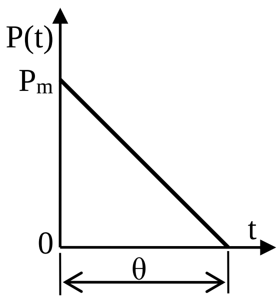
Chú ý: Công thức xác định hệ số động theo (1.120) có thể áp dụng cho tất cả các dạng tải trọng đã xét ở bài 6 và tải trọng điều hoà đã xét trong bài 4.

3. Tác dụng của tải trọng đặt đột ngột, sau đó giữ nguyên giá trị trên hệ.

Trong thực tế khi công trình chịu tác dụng của các sóng xung kích do các vụ nổ hạt nhân có thời gian duy trì tải trọng θ lớn gấp 15 lần chu kỳ dao động riêng của kết cấu, thì biểu đồ tải trọng thay đổi theo quy luật hình tam giác (hình 1.22) có thể bỏ qua thời gian giảm tải và tính theo biểu đồ trên hình 1.21 bởi vì trong trường hợp này, biến dạng cực đại của hệ xảy ra ở ngay giai đoạn đầu khi tải trọng tác dụng.



Hình 1.21



Hình 1.22

Chuyển vị của hệ tính theo (1.116):

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{M\omega} \int_o^t P_m \sin \omega(t-\tau) d\tau \\ &= \frac{P_m}{M\omega} \int_o^t \frac{\sin \omega(t-\tau)}{\omega} d\omega(t-\tau) = \frac{P_m}{M\omega^2}(1 - cos\omega t) \end{aligned} \qquad (*)$$

Biểu thức lực đàn hồi được xác định từ tích của độ cứng và chuyển vị động:

$$P_d(t) = k\, y(t)$$

Thay biểu thức của y(t) theo (1.116) vào đây ta được:

$$P_d(t) = k\frac{1}{M\,\omega}\int_0^t P(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau = P_m\,K(t) \qquad (1.122)$$

Trong đó K(t) là hệ số động học theo thời gian, được xác định theo (1.119).

Tải trọng tĩnh tương đương là lực đàn hồi lớn nhất tác dụng lên hệ:

$$P_{td} = P_m\,K_d \qquad (1.123)$$

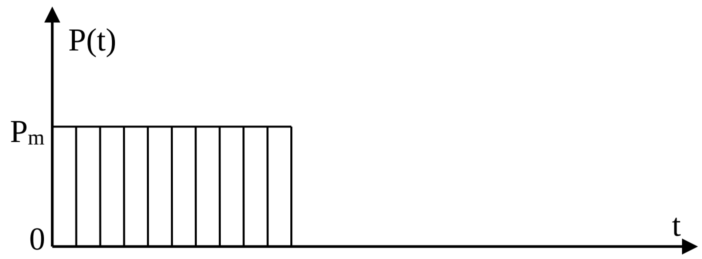
Từ (*) ta có: $y(t) = y_T\,(1-cos\omega t)$ (1.124)

Hệ số động học theo thời gian xác định theo (1.119) với f(τ) ở đây bằng đơn vị : f(τ) = 1.

$$K(t) = \omega\int_0^t 1.\sin\omega(t-\tau)\,d\tau = \omega\frac{1-cos\omega t}{\omega} = 1-cos\omega t$$

Suy ra hệ số động: $K_d = K(t)_{max} = 2$ (1.125)

4. Tác dụng của tải trọng đột ngột, sau đó giữ nguyên giá trị trong một thời gian ngắn



Hình 1.23

Ta có: $P(t) = \begin{cases} P_m & khi\;\; t \le \theta \\ 0 & khi\;\; t > \theta \end{cases}$ tương ứng ta có: $f(t) = \begin{cases} 1 & khi\;\; t \le \theta \\ 0 & khi\;\; t > \theta \end{cases}$

Ta sẽ tìm phương trình chuyển động của hệ và xác định hệ sô động từ hệ số động học theo thời gian K(t).

- Xét trong khoảng 1: $t \le \theta$

Hệ số động học theo thời gian được xác định bởi (1.119)

$$K_1(t) = \omega\int_0^t f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau = \omega\int_0^t 1.\sin\omega(t-\tau)d\tau = 1-cos\omega t$$

Phương trình dao động của hệ trong giai đoạn này:

$$y_1(t) = y_T K(t) = \frac{P_m}{k}(1-cos\omega t)$$

Để tìm hệ số động K_d ta tính đạo hàm của K(t) và cho bằng không:

$$\dot{K}_1(t) = \omega\sin\omega t = 0 \;\Leftrightarrow\; \omega t = n\pi$$

Suy ra: $t_{max} = n\dfrac{\pi}{\omega} = n\dfrac{T}{2}$, và lần thứ nhất thì: $t_{1max} = \dfrac{T}{2}$.

Vì đang xét trong khoảng 1 nên $t_{1max} \le \theta$, do đó:

$$\frac{T}{2} \le \theta \ \ , hay : \frac{\theta}{T} \ge 0,5$$

Tại $t_{1max} = \dfrac{T}{2}$ thì $\ddot{K}_1(t_{1\max}) = \omega^2 cos\pi < 0$, nên $K_1(t)$ đạt cực đại.

Quan hệ : $\dfrac{\theta}{T} \ge 0,5$ chính là điều kiện để cực đại xảy ra ở khoảng 1.

Ứng với $t_{1max} = \dfrac{T}{2}$, ta có : $K_d = K(t)_{max} = 2$.

- Xét trong khoảng 2 : $t > \theta$.

Khi tích phân hệ số K(t) từ 0 đến t ở giai đoạn này, ta phân ra hai tích phân : tích phân từ 0 đến θ tương ứng với hàm f(t) = 1, và tích phân từ θ đến t tương ứng với hàm f(t) = 0.

$$K_2(t) = \omega\int_0^t f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau = \omega\int_0^\theta 1.\sin\omega(t-\tau)d\tau + 0 =$$

$$= cos\omega(t-\theta) - cos\omega t = 2\sin\frac{\omega\theta}{2}\sin\omega\left(t-\frac{\theta}{2}\right)$$

$\dot{K}_2(t) = 0$ khi $\omega\left(t-\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{n\pi}{2}$, và lần thứ nhất: $t_1 = \dfrac{\pi}{2\omega} + \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{T}{4} + \dfrac{\theta}{2}$

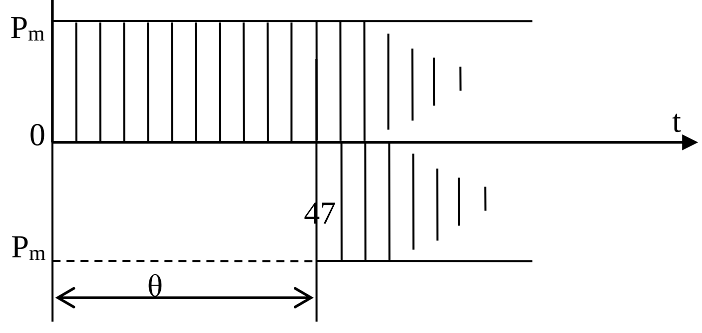
Với giá trị này của t_1 thì: $\ddot{K}_2(t_1) = -2\omega^2\sin\dfrac{\omega\theta}{2} < 0$, và do đó:

$$K_d = K(t)_{max} = 2\sin\frac{\omega\theta}{2}\sin\omega\left(\frac{T}{4}+\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2}\right) = 2\sin\frac{\omega\theta}{2}$$

Phương trình dao động của hệ trong giai đoạn này:

$$y_2(t) = y_T\,K_2(t) = 2\frac{P_m}{k}\sin\frac{\omega\theta}{2}\sin\omega\left(t-\frac{\theta}{2}\right)$$

Khi xét dao động của hệ xảy ra ở khoảng 2, người ta còn tiến hành bằng phép thêm bớt tải trọng. Tại thời điểm mất tải t = θ, sẽ đặt thêm tải trọng có giá trị bằng P_m nhưng ngược chiều nhau, lúc này dao động của hệ sẽ bao gồm : dao động do tác dụng của tải trọng P_m đã xét ở khoảng một và dao động do tải trọng $-P_m$ bắt đầu tại thời điểm θ.



Hình 1.24

5. Dao động của hệ trong trường hợp có lực cản.

Trong trường hợp này, phương trình vi phân dao động sẽ là:

$$M\,\ddot{y} + c\,\dot{y} + k\,y = P(t)$$

Hay :

$$\ddot{y} + 2\omega\varepsilon\,\dot{y} + \omega^2\,y = \frac{P(t)}{M} \qquad (1.126)$$

Nghiệm của phương trình vi phân này được tìm trên cơ sở sử dụng dao động của hệ chịu tác dụng của xung tức thời. Tại thời điểm τ trên biểu đồ tải trọng động theo thời gian P(t), ta tách ra một phân tố tải trọng:

$$ds = P(\tau)d\tau$$

Phân tố tải trọng này gây tác dụng xung lên hệ tại thời điểm τ. Độ võng do xung phân tố đó gây ra được tính theo:

$$dy(t) = P(t)d\tau\overline{y}(t-\tau) = \frac{P(\tau)d\tau}{M\omega_c}e^{-\omega\varepsilon(t-\tau)}\sin\omega_c(t-\tau)$$

Độ võng toàn phần do tải trọng P(t) gây ra:

$$y(t) = \frac{1}{M\omega_c}\int_0^t P(\tau)e^{-\omega\varepsilon(t-\tau)}\sin\omega_c(t-\tau)d\tau \qquad (1.127)$$

Hệ số động học thay đổi theo thời gian trong trường hợp này:

$$K(t) = \frac{\omega^2}{\omega_c}\int_0^t f(\tau)e^{-\omega\varepsilon(t-\tau)}\sin\omega_c(t-\tau)d\tau \qquad (1.128)$$

Khi điều kiện ban đầu khác không: $y(0) \neq 0,\ v(0) \neq 0$, ta phải kể đến thành phần dao động tự do do điều kiện ban đầu gây ra. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân dao động (1.126) là:

$$y(t) = e^{-\omega\varepsilon t}\left[y_o cos\omega_c t + \frac{\omega\varepsilon y_o + v_o}{\omega_c}\sin\omega_c t\right] +$$
$$\frac{1}{M\omega_c}\int_0^t P(\tau)e^{-\omega\varepsilon(t-\tau)}\sin\omega_c(t-\tau)d\tau$$

Chương 2: DAO ĐỘNG CỦA HỆ HỮU HẠN BẬC TỰ DO

Mục đích:

- Cung cấp cho sinh viên những kiến thức cơ bản bài toán động lực học công trình có bậc tự do hữu hạn dưới dạng dao động tự do hoặc dao động cưỡng bức.

Yêu cầu:

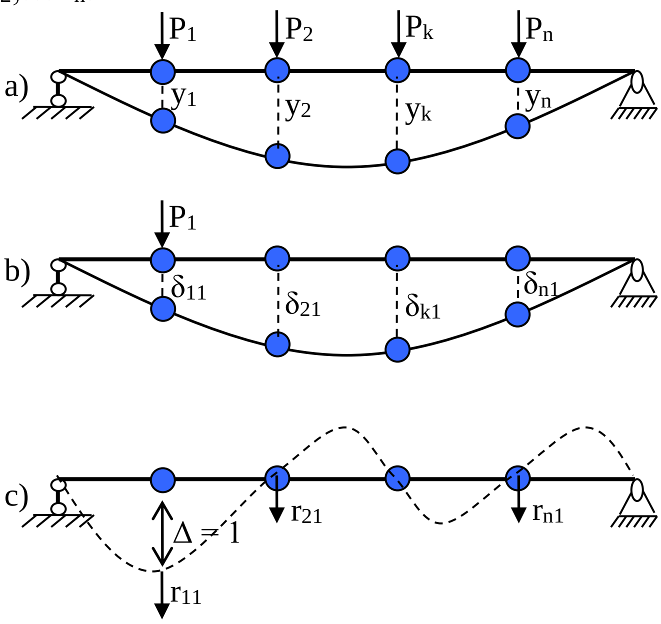
- Sinh viên cần nhớ lại kiến thức về ma trận và các phép tính của ma trận.
- Sinh viên nhận biết việc mô hình hóa hệ hữu hạn bậc tự do;
- Thiết lập được phương trình vi phân dao động của hệ hữu hạn bậc tự do;
- Giải bài toán dao động tự do, dao động cưỡng bức của hệ hữu hạn bậc tự do trong một số trường hợp chịu các loại tải trọng động;

Trong thực tế tính toán kỹ thuật ta hay gặp bài toán tính toán hệ hữu hạn bậc tự do. Để tiện lợi cho việc biểu thị các phép tính và áp dụng được công cụ máy tính điện tử, trong chương này sẽ trình bày các nội dung dưới dạng ma trận. Việc sử dụng ngôn ngữ ma trận trong cơ học đã trở nên ngày càng rộng rãi, biểu hiện ở việc áp dụng các phương pháp tính như phương pháp phần tử hữu hạn, phương pháp ma trận chuyển tiếp và nhiều phương pháp gần đúng khác.

Bài 1

KHÁI NIỆM VỀ MA TRẬN CỨNG VÀ MA TRẬN MỀN

Xét hệ dầm như hình 2.1 tại các vị trí 1, 2, 3, …n hệ chịu tác dụng tương ứng của các lực P_1, P_2,…P_n.



Hình 2.1

Chuyển vị tại vị trí k được xác định theo nguyên lí cộng tác dụng:

$$y_k = \delta_{k1}P_1 + \delta_{k2}P_2 + ... + \delta_{kk}P_k + ... + \delta_{kn}P_n$$

k = 1, 2, …n.

Viết cho tất cả các vị trí ta có:

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11}P_1 + \delta_{12}P_2 + ... + \delta_{1k}P_k + ... + \delta_{1n}P_n \\ y_2 = \delta_{21}P_1 + \delta_{22}P_2 + ... + \delta_{2k}P_k + ... + \delta_{2n}P_n \\ .... \\ y_n = \delta_{n1}P_1 + \delta_{n2}P_2 + ... + \delta_{nk}P_k + ... + \delta_{nn}P_n \end{cases} \qquad (2.1)$$

Ta viết hệ phương trình (2.1) dưới dạng ma trận:

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & ... & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & ... & \delta_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & ... & \delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ ... \\ P_n \end{Bmatrix}$$

Hay : $\{Y\} = [F]\{P\}$

Trong đó:

$$\{Y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{Bmatrix}, \quad \{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ ... \\ P_n \end{Bmatrix}, \qquad (2.2)$$

$$[F] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & ... & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & ... & \delta_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & ... & \delta_{nn} \end{bmatrix} \qquad (2.3)$$

$\{Y\}$ - là vectơ chuyển vị,

$\{P\}$ - là vectơ tải trọng tác dụng,

$[F]$ - là ma trận mềm.

Các phần tử của ma trận mền δ_{km} ($k = 1, 2, ...n; m = 1, 2, ...n$) là các chuyển vị đơn vị được xác định trên hình 2.1b. Vì $\delta_{km} = \delta_{mk}$ nên ma trận $[F]$ là ma trận đối xứng.

Viết (2.1) ngược lại ta có:

$$\begin{cases} P_1 = r_{11}y_1 + r_{12}y_2 + ... + r_{1k}y_k + ... + r_{1n}y_n \\ P_2 = r_{21}y_1 + r_{22}y_2 + ... + r_{2k}y_k + ... + r_{2n}y_n \\ .... \\ P_n = r_{n1}y_1 + r_{n2}y_2 + ... + r_{nk}y_k + ... + r_{nn}y_n \end{cases}$$

Hay : $\{P\}=[K]\{Y\}$ (2.4)

Trong đó:

$$[K]=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Ma trận $[K]$ được gọi là ma trận cứng. Các phần tử của ma trận độ cứng $r_{km}\,(k=1,2,\dots n; m=1,2,\dots n)$ gọi là hệ số độ cứng, là lực tương ứng ở toạ độ k do chuyển vị đơn vị tại toạ độ m gây ra. (hình 2.1c). Vì $r_{km}=r_{mk}$ nên ma trận $[K]$ đối xứng.

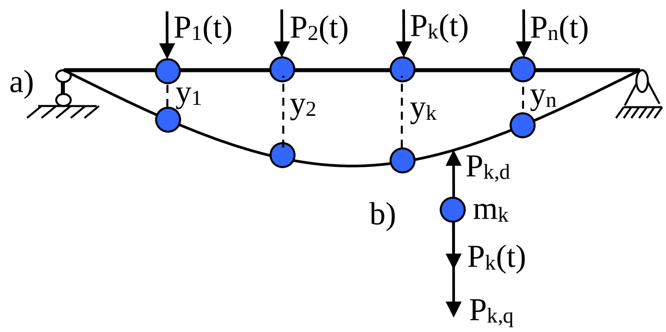
Ta thấy ma trận cứng là nghịch đảo của ma trận mềm, và ngược lại.

Bài 2

XÂY DỰNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN DAO ĐỘNG CỦA HỆ HỮU HẠN BẬC TỰ DO THEO PHƯƠNG PHÁP TĨNH

Xét hệ dầm có n khối lượng tập trung. Hệ chịu tác dụng của tải trọng động $P_1(t)$, $P_2(t)$,…$P_n(t)$. Bỏ qua trọng lượng bản thân dầm khi dao động, vị trí của mỗi khối lượng được xác định bằng một thông số là chuyển vị theo phương đứng. Vì vậy hệ có n bậc tự do (hình 2.2a)

Trước hết ta xét trường hợp bỏ qua ảnh hưởng của lực cản. Ta sẽ viết phương trình cân bằng lực với việc sử dụng nguyên lý Đalămbe, trong đó các lực đặt vào khối lượng bao gồm: tải trọng tác dụng, lực quán tính và lực đàn hồi.(hình 2.2b).



Hình 2.2

Phương trình cân bằng lực đối với khối lượng thứ k:

$$-P_{k,q}+P_{k,d}=P_k(t) \quad (2.6)$$

Trong đó:

$$P_{k,q}=-m_k\,\ddot{y}_k(t)$$

$$P_{k,d} = r_{k1}y_1 + r_{k2}y_2 + ... + r_{kn}y_n$$

Thay các biểu thức này vào phương trình (2.6) ta được:

$$m_k\,\ddot{y}_k(t) + (r_{k1}y_1 + r_{k2}y_2 + ... + r_{kn}y_n) = P_k(t) \qquad (2.7)$$

$$(k = 1, 2, ...n).$$

Phương trình (2.7) được viết cho tất cả các khối lượng của hệ như sau:

$$\begin{cases} m_1\,\ddot{y}_1 + (r_{11}y_1 + r_{12}y_2 + ... + r_{1n}y_n) = P_1(t) \\ m_2\,\ddot{y}_2 + (r_{21}y_1 + r_{22}y_2 + ... + r_{2n}y_n) = P_2(t) \\ \text{...} \\ m_n\,\ddot{y}_n + (r_{n1}y_1 + r_{n2}y_2 + ... + r_{nn}y_n) = P_n(t) \end{cases} \qquad (2.8)$$

Ta viết lại phương trình (2.8) ở dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & m_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & m_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ ... \\ \ddot{y}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & ... & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & ... & r_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ r_{n1} & r_{n2} & ... & r_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ ... \\ P_n(t) \end{Bmatrix}$$

Viết gọn hơn:

$$[M]\{\ddot{Y}(t)\} + [K]\{Y(t)\} = \{P(t)\} \qquad (2.9)$$

Trong đó: $[K]$ - là ma trận độ cứng; $[M]$ - là ma trận khối lượng.

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & m_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & m_n \end{bmatrix} \qquad (2.10)$$

Và :

$$\{\ddot{Y}(t)\} = \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) \\ ... \\ \ddot{y}_n(t) \end{Bmatrix};\ \{Y(t)\} = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ ... \\ y_n(t) \end{Bmatrix};\ \{P(t)\} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ ... \\ P_n(t) \end{Bmatrix} \qquad (2.11)$$

Phương trình (2.9) gọi là phương trình vi phân dao động của hệ n bậc tự do viết dưới dạng ma trận.

❖ Khi kể đến ảnh hưởng của lực cản, phương trình (2.9) sẽ là:

$$[M]\{\ddot{Y}(t)\} + [C]\{\dot{Y}(t)\} + [K]\{Y(t)\} = \{P(t)\} \qquad (2.12)$$

Trong đó: $[C]$ - là ma trận cản (hay ma trận tắt dần):

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

Các phần tử của ma trận tắt dần c_{km} gọi là các hệ số ảnh hưởng tắt dần, là lực tương ứng với toạ độ k do tốc độ chuyển dịch đơn vị tại toạ độ m gây ra.

$$\left\{\dot{\mathrm{Y}}(\mathrm{t})\right\} = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \ldots \\ \dot{y}_n(t) \end{Bmatrix}$$ là vectơ tốc độ chuyển dịch của hệ.

Phương trình (2.12) chính là điều kiện cân bằng tĩnh học của cả hệ:

$$\left\{-P_q(t)\right\} + \left\{P_c(t)\right\} + \left\{P_d(t)\right\} = \left\{P(t)\right\} \tag{2.14}$$

Trong đó lực quán tính, lực cản, lực đàn hồi lần lượt là:

$$\left\{P_q(t)\right\} = -[M]\left\{\ddot{\mathrm{Y}}(\mathrm{t})\right\} \tag{2.15}$$

$$\left\{P_c(t)\right\} = [C]\left\{\dot{\mathrm{Y}}(\mathrm{t})\right\} \tag{2.16}$$

$$\left\{P_d(t)\right\} = [K]\left\{\mathrm{Y}(\mathrm{t})\right\} \tag{2.17}$$

Phương trình (2.12) còn gọi là phương trình vi phân chuyển động ở dạng thuận. Viết một hàng của hệ này ta có:

$$m_k\,\ddot{y}_k(t) + \sum_{j=1}^{n} c_{kj}\,\dot{y}_k(t) + \sum_{j=1}^{n} r_{kj}\,y_j(t) = P_k(t) \tag{2.18}$$

Phương trình vi phân chuyển động còn viết được ở dạng nghịch như sau:

$$y_k(t) + \sum_{j=1}^{n} \delta_{kj} m_j\,\ddot{y}_j + \sum_{j=1}^{n} \delta_{kj} F_{j,c}\,\ddot{y}_j = \sum_{j=1}^{n} \delta_{kj} P_j(t) \tag{2.19}$$

Hay:

$$y_k(t) + \delta_{k1}\left[m_1\,\ddot{y}_1(t) + P_{c1}(t) - P_1(t)\right] + \delta_{k2}\left[m_2\,\ddot{y}_2(t) + P_{c2}(t) - P_2(t)\right] +$$
$$+ \ldots + \delta_{kn}\left[m_n\,\ddot{y}_n(t) + P_{cn}(t) - P_n(t)\right] = 0$$

Bài 3

XÁC ĐỊNH TẦN SỐ DAO ĐỘNG RIÊNG HỆ HỮU HẠN BẬC TỰ DO

Phương trình vi phân dao động của hệ hữu hạn bậc tự do không cản có dạng:

$$[M]\{\ddot{Y}(t)\}+[K]\{Y(t)\}=\{0\} \tag{2.20}$$

Nghiệm của phương trình (2.20) được tìm dưới dạng sau:

$$\{Y(t)\}=\{A\}\sin(\omega t+\gamma) \tag{2.21}$$

Trong đó: $\{A\}$ - là vectơ biểu thị biên độ dao động của hệ; ω – là tần số dao động riêng; γ – là độ lệch pha.

Việc phân tích dao động tự do của hệ hữu hạn bậc tự do là việc xác định các điều kiện để phương trình (2.20) cho phép tồn tại dao động. Từ điều kiện đó ta sẽ tìm được các tần số dao động riêng của hệ.

Lấy đạo hàm bậc hai của (2.21) theo t sau đó thay vào (2.20), ta được:

$$\left([K]-\omega^2[M]\right)\{A\}=\{0\} \tag{2.22}$$

Để tồn tại dao động thì $\{A\}$ phải khác không. Điều đó dẫn đến:

$$\left\|[K]-\omega^2[M]\right\|=0 \tag{2.23}$$

Phương trình (2.23) được gọi là phương trình tần số hay phương trình đặc trưng. Khai triển định thức này ta sẽ nhận được phương trình đại số bậc n đối với ω^2.

Giải phương trình đặc trưng ta sẽ xác định được n nghiệm : $\omega_1^2,\omega_2^2,...\omega_n^2$. Các giá trị nghiệm này biểu thị giá trị bình phương các tần số của n dạng dao động riêng. Vectơ bao gồm tất cả các tần số dao động riêng xếp theo thứ tự tăng dần ($\omega_1<\omega_2<\omega_3<...<\omega_n$)

được gọi là vectơ tần số dao động riêng (hay còn gọi là phổ tần số).

$$\{\omega\}=\{\omega_1,\omega_2,...\omega_n\}^T \tag{2.24}$$

Tần số dao động riêng thấp ω_1 gọi là tần số cơ bản.

Có thể thấy rằng: Tất cả các ma trận khối lượng và ma trận cứng của hệ kết cấu bất kỳ đều là các ma trận đối xứng và xác định dương. Vì vậy, tất cả các nghiệm của phương trình đặc trưng đều là thực và dương.

Phương trình tần số có thể viết dưới dạng ma trận mềm. Muốn vậy, ta nhân hai vế của (2.22) với ma trận $\frac{1}{\omega^2}[F]$ ta sẽ nhận được:

$$\left([F][M]-\frac{1}{\omega^2}[E]\right)\{\mathrm{A}\}=\{0\} \qquad (2.25)$$

Trong đó: $[E]$ là ma trận đơn vị cấp n.

Phương trình đặc trưng tương ứng với với trình (2.25) sẽ là:

$$\left|[F][M]-\frac{1}{\omega^2}[E]\right|=0 \qquad (2.26)$$

<u>Chú ý:</u> Các phương trình đặc trưng (2.23) và (2.26) được viết dưới dạng giải tích như sau:

$$\begin{vmatrix} r_{11}-\omega^2 m_1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22}-\omega^2 m_2 & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn}-\omega^2 m_n \end{vmatrix}=0 \qquad (2.27)$$

Và :

$$\begin{vmatrix} \delta_{11}-\frac{1}{\omega^2} & \delta_{12}m_2 & \dots & \delta_{1n}m_n \\ \delta_{21}m_1 & \delta_{22}m_2-\frac{1}{\omega^2} & \dots & \delta_{2n}m_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1}m_1 & \delta_{n2}m_2 & \dots & \delta_{nn}m_n-\frac{1}{\omega^2} \end{vmatrix}=0 \qquad (2.28)$$

Bài 4

DẠNG DAO ĐỘNG RIÊNG CỦA HỆ HỮU HẠN BẬC TỰ DO

Tương ứng với các tần số dao động riêng ω_i ($i=1\rightarrow n$) ta sẽ xác định được các dạng dao động riêng $\{\mathrm{A_i}\}$ (hoặc $\{\mathrm{Y_i}\}$) từ phương trình (2.23) hoặc (2.26). Việc xác định các tần số dao động riêng và các dạng dao động riêng đóng vai trò rất quan trọng trong bài toán dao động của hệ hữu hạn bậc tự do.

Để xác định các dạng dao động riêng, ta đưa vào ma trận $[\mathrm{B_i}]$ ứng với tần số dao động riêng ω_i.

$$[\mathrm{B_i}]=\left([\mathrm{K}]-\omega_i^2[\mathrm{M}]\right) \qquad (2.29)$$

Hay :

$$\left[\mathrm{B_i}\right]=\left(\left[\mathrm{F}\right]\left[\mathrm{M}\right]-\frac{1}{\omega_i^2}\left[\mathrm{E}\right]\right) \qquad (2.30)$$

Khi đó phương trình (2.22) viết ứng với tần số ω_i sẽ có dạng:

$$\left[\mathrm{B_i}\right]\left\{\mathrm{Y_i}(t)\right\}=\left\{0\right\}\Rightarrow\left[\mathrm{B_i}\right]\left\{\mathrm{A_i}\right\}=\left\{0\right\} \qquad (2.31)$$

Muốn xác định các dạng dao động riêng, ta không nhất thiết phải tìm trực tiếp các giá trị biên độ của các khối lượng, ma ta chỉ cần tìm tỉ số biên độ của các khối lượng so với biên độ của một khối lượng nào đó, thường là so với biên độ của khối lượng thứ nhất. Tỉ số đó gọi là φ.

$$\varphi_{ki}=\frac{A_{ki}}{A_{1i}} \qquad (2.32)$$

Ta thấy $\varphi_{1i}=1$.

Như vậy, dạng dao động riêng thứ i chính là vectơ có các phần tử là các tỉ số φ_{ki} đó:

$$\left\{\varphi_i\right\}=\begin{Bmatrix}\varphi_{1i}\\ \varphi_{2i}\\ \ldots\\ \varphi_{ni}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\ \varphi_{2i}\\ \ldots\\ \varphi_{ni}\end{Bmatrix} \qquad (2.33)$$

Để tìm các dạng dao động riêng, ta chia hai vế của phương trình (2.31) cho hệ số A_{1i} ta có:

$$\frac{1}{A_{1i}}\begin{bmatrix}b_{11}^{(i)} & b_{12}^{(i)} & \ldots & b_{1n}^{(i)}\\ b_{21}^{(i)} & b_{22}^{(i)} & \ldots & b_{2n}^{(i)}\\ b_{31}^{(i)} & b_{32}^{(i)} & \ldots & b_{3n}^{(i)}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ b_{n1}^{(i)} & b_{n2}^{(i)} & \ldots & b_{nn}^{(i)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}A_{1i}\\ A_{2i}\\ A_{3i}\\ \ldots\\ A_{ni}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\ \ldots\\0\end{Bmatrix}\ \text{hay :}\ \begin{bmatrix}b_{11}^{(i)} & b_{12}^{(i)} & \ldots & b_{1n}^{(i)}\\ b_{21}^{(i)} & b_{22}^{(i)} & \ldots & b_{2n}^{(i)}\\ b_{31}^{(i)} & b_{32}^{(i)} & \ldots & b_{3n}^{(i)}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ b_{n1}^{(i)} & b_{n2}^{(i)} & \ldots & b_{nn}^{(i)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ \varphi_{2i}\\ \varphi_{3i}\\ \ldots\\ \varphi_{ni}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\ \ldots\\0\end{Bmatrix} \qquad (2.34)$$

Trừ phương trình đầu tiên của (2.45), ta giải hệ (n-1) phương trình sau: ta sẽ được dạng dao động riêng thứ i:

$$\left\{\varphi_i^*\right\}=-\left[\mathrm{B}_{11}^{(i)}\right]^{-1}\left\{\mathrm{B}_1^{(i)}\right\} \qquad (2.35)$$

Trong đó:

$$\left\{\varphi_i^*\right\}=\begin{Bmatrix}\varphi_{2i}\\ \varphi_{2i}\\ \ldots\\ \varphi_{2i}\end{Bmatrix} \qquad (2.36)$$

$\left[B_{11}^{(i)}\right]$ là ma trận $\left[B_i\right]$ bỏ đi hàng một và cột một.

$$\left[B_{11}^{(i)}\right] = \begin{bmatrix} b_{22}^{(i)} & b_{23}^{(i)} & ... & b_{2n}^{(i)} \\ b_{32}^{(i)} & b_{33}^{(i)} & ... & b_{3n}^{(i)} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n2}^{(i)} & b_{n3}^{(i)} & ... & b_{nn}^{(i)} \end{bmatrix} \qquad (2.37)$$

$\left[B_{1}^{(i)}\right]$ là cột thứ nhất của ma trận $\left[B_i\right]$ bỏ đi phần tử đầu tiên.

$$\left\{B_{1}^{(i)}\right\} = \begin{Bmatrix} b_{21}^{(i)} \\ b_{31}^{(i)} \\ ... \\ b_{n1}^{(i)} \end{Bmatrix} \qquad (2.38)$$

Lúc này:

$$\left\{\varphi_i\right\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \varphi_i^{*} \end{Bmatrix} \qquad (2.39)$$

Ma trận vuông biểu thị tất cả các dạng dao động riêng gọi là ma trận các dạng chính, ký hiệu là $\left[\Phi\right]$.

$$\left[\Phi\right] = \left[\{\varphi_1\} \quad \{\varphi_2\} \quad \{\varphi_3\} \quad ... \quad \{\varphi_n\}\right] = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & ... & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & ... & \varphi_{2n} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & ... & \varphi_{3n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & ... & \varphi_{nn} \end{bmatrix} \qquad (2.40)$$

Các chỉ số của φ_{ki} gồm chỉ số thứ nhất là chỉ số k chỉ khối lượng, và chỉ số thứ hai là chỉ số i chỉ tần số hay chỉ dao động riêng. Các đại lượng của các tác dụng ngoài có hai chỉ số sau này cũng được chỉ như vậy.

Ở dạng giải tích, hệ (n-1) phương trình sau của hệ phương trình (2.34) để xác định các dạng dao động riêng được viết như sau:

$$\begin{cases} r_{21} + (r_{22} - \omega^2 m_2)\varphi_2 + r_{23}\varphi_3 + ... + r_{2n}\varphi_n = 0 \\ r_{31} + r_{32}\varphi_2 + (r_{33} - \omega^2 m_3)\varphi_3 + ... + r_{3n}\varphi_n = 0 \\ .... \\ r_{n1} + r_{n2}\varphi_2 + r_{n3}\varphi_3 + ... + (r_{nn} - \omega^2 m_n)\varphi_n = 0 \end{cases}$$

hoặc:

$$\begin{cases} \delta_{21}m_1 + (\delta_{22}m_2 - \dfrac{1}{\omega^2})\varphi_2 + \delta_{23}m_3\varphi_3 + ... + \delta_{2n}m_n\varphi_n = 0 \\ \delta_{31}m_1 + \delta_{32}m_2\varphi_2 + (\delta_{33}m_3 - \dfrac{1}{\omega^2})\varphi_3 + ... + \delta_{3n}m_n\varphi_n = 0 \\ .... \\ \delta_{n1}m_1 + \delta_{n2}m_2\varphi_2 + \delta_{n3}m_3\varphi_3 + ... + (\delta_{nn}m_n - \dfrac{1}{\omega^2})\varphi_n = 0 \end{cases}$$

Nhận xét: Vấn đề xác định các tần số dao động riêng và các dạng dao động riêng của bài toán dao động hệ hữu hạn bậc tự do tương ứng với bài toán xác định các trị riêng và vectơ riêng của đại số tuyến tính. Giá trị bình phương tần số tương ứng với các giá trị riêng, còn các dao động riêng sẽ tương ứng với các vectơ riêng.

Bài 5:
TÍNH CHẤT TRỰC GIAO CỦA CÁC DẠNG DAO ĐỘNG RIÊNG

Các dạng dao động riêng của hệ hữu hạn bậc tự do có một tính chất đặc biệt, đó là tính chất trực giao. Tính chất này đóng vai trò rất quan trọng trong việc giải quyết các bài toán dao động cưỡng bức cũng như dao động tự do của hệ hữu hạn bậc tự do. Biểu thức của tính chất trực giao giữa các dạng dao động riêng được tìm trên cơ sở áp dụng nguyên lý công tương hỗ Betti đối với các dạng dao động riêng.

Phương trình vi phân chuyển động đối với các dạng dao động tự do có thể được viết dưới dạng:

$$\left[K\right]\left\{y_i(t)\right\} = \omega_i^2\left[M\right]\left\{y_i(t)\right\} \qquad (2.41)$$

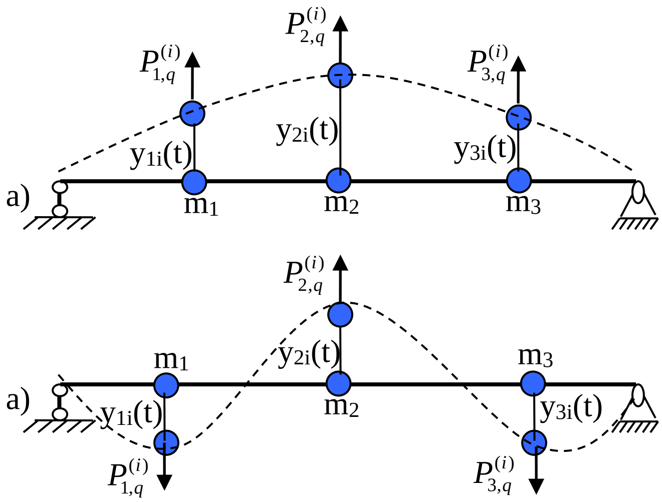
Trong đó: vế trái biểu thị vectơ của lực đàn hồi $\left\{P_d(t)\right\}$, còn vế phải biểu thị vectơ của lực quán tính $\left\{P_q(t)\right\}$. Như vậy, khi dao động tự do, các dạng dao động riêng được xem như sự thay đổi của độ võng do các lực quán tính, (các lực quán tính đóng vai trò như tải trọng ngoài) gây ra. Ta xét hai dạng dao động thứ "i" và thứ "j" trên hình 2.3.

Áp dụng nguyên lý Betti cho hai trạng thái biến dạng ứng với hai dạng chính thứ "i" và thứ "j" ta sẽ có:

$$\left\{y_j(t)\right\}^T\left\{P_{qi}(t)\right\} = \left\{y_i(t)\right\}^T\left\{P_{qj}(t)\right\} \qquad (2.42)$$

Sau khi thay $\left\{Y(t)\right\}$ theo (2.21) và $\left\{P_q(t)\right\} = -\omega^2\left[M\right]\left\{Y(t)\right\}$ vào biểu thức trên rồi đơn giản các hàm tuần hoàn theo thời gian ta được:

$$\omega_i^2\{A_j\}^T[M]\{A_i\}=\omega_j^2\{A_i\}^T[M]\{A_j\} \qquad (2.43)$$



Hình 2.3

Ta thấy rằng: tích các ma trận ở phương trình (2.43) là đại lượng vô hướng, vì vậy sau khi chuyển vị trí các ma trận ở một vế rồi thực hiện phép chuyển vế, ta sẽ được:

$$(\omega_j^2-\omega_i^2)\{A_i\}^T[M]\{A_j\}=0 \qquad (2.44)$$

Vì các tần số dao động riêng có giá trị khác nhau $\omega_j \neq \omega_i$ nên ta có thể viết biểu thức trên dưới dạng:

$$\{A_i\}^T[M]\{A_j\}=0 \qquad (2.45)$$

Biểu thức (2.45) biểu thị tính chất trực giao của các dạng chính dao động. Biểu thức tính chất trực giao còn có thể viết được qua ma trận cứng $[K]$. Muốn vậy, ta nhân trái hai vế của phương trình (2.41) với ma trận $\{y_j(t)\}^T$, sau khi bỏ đi các hàm thời gian ở hai vế ta được:

$$\{A_j\}^T[K]\{A_i\}=\omega_i^2\{A_j\}^T[M]\{A_i\}=0$$

Suy ra:

$$\{A_j\}^T[K]\{A_i\}=0 \qquad (2.46)$$

Trong trường hợp tổng quát, biểu thức tính chất trực giao của các dạng chính dao động được viết với các vectơ dạng dao động không thứ nguyên $\{\varphi_i\},\{\varphi_j\}$. Muốn vậy, ta chia các biểu thức (2.45) cho các biên độ chuyển vị của một khối lượng nào đó ứng với dạng "i" và "j" ta được:

$$\{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_j\}=0 \qquad (2.47)$$

Ở dạng giải tích, biểu thức tính chất trực giao viết theo ma trận khối lượng như sau:

$$\sum_{k=1}^{n}(m_{k1}\varphi_{1j}+m_{k2}\varphi_{2j}+...+m_{kn}\varphi_{nj})\varphi_{kj}=0 \qquad (2.48)$$

Biểu thức tính chất trực giao viết theo ma trận cứng đối với các dạng dao động không thứ nguyên.

$$\{\varphi_i\}^T[K]\{\varphi_j\}=0 \qquad (2.49)$$

<u>Nhận xét:</u> Qua các biểu thức trên ta thấy : các dạng dao động riêng $\{\varphi_i\},\{\varphi_j\}(i\neq j)$ trực giao với nhau qua ma trận khối lượng $[M]$ và ma trận độ cứng $[K]$, hay nói cách khác: các dạng dao động riêng trực giao với nhau qua trọng số $[M]$ hoặc [K].

Ta còn có thể biểu thị tính chất trực giao của các dạng dao động riêng với trọng số là tích không hạn chế các ma trận tạo nên từ ma trận [K] và ma trận [M]. Chia hai vế của phương trình (2.41) cho một biên độ nào đó (bỏ hàm thời gian đi) ta có:

$$[K]\{\varphi_i\}=\omega_i^2[M]\{\varphi_i\} \qquad (2.50)$$

Nhân trái hai vế phương trình này với $\{\varphi_j\}^T[M][K]^{-1}$, ta được:

$$\{\varphi_j\}^T[M]\{\varphi_i\}=\omega_i^2\{\varphi_j\}^T[M][K]^{-1}\{\varphi_i\}$$

Sử dụng (2.47) ta suy ra:

$$\{\varphi_j\}^T[M][K]^{-1}[M]\{\varphi_i\}=0 \qquad (2.51)$$

Lại nhân trái phương trình (2.50) với $\{\varphi_j\}^T[M][K]^{-1}[M][K]^{-1}$ sẽ được:

$$\{\varphi_j\}^T[M][K]^{-1}[M]\{\varphi_i\}=\omega_i^2\{\varphi_j\}^T[M][K]^{-1}[M][K]^{-1}\{\varphi_i\}$$

Sử dụng (2.51) ta có:

$$\{\varphi_j\}^T[M][K]^{-1}[M]\{\varphi_i\}=0 \qquad (2.52)$$

* Tương tự, nếu ta nhân trái phương trình (2.50) với $\{\varphi_j\}^T[K][M]^{-1}$ sẽ được:

$$\{\varphi_j\}^T[K][M]^{-1}[K]\{\varphi_i\}=\omega_i^2\{\varphi_j\}^T[K]\{\varphi_i\}$$

Sử dụng (2.49) ta được:

$$\{\varphi_j\}^T [K][M]^{-1}[K]\{\varphi_i\} = 0 \qquad (2.53)$$

Phép nhân trái phương trình (2.50) với $\{\varphi_j\}^T [K][M]^{-1}[K][M]^{-1}$ sẽ cho:

$$\{\varphi_j\}^T [K][M]^{-1}[K][M]^{-1}[K]\{\varphi_i\} = \omega_i^2 \{\varphi_j\}^T [K][M]^{-1}[K]\{\varphi_i\}$$

Sử dụng (2.53) sẽ được:

$$\{\varphi_j\}^T [K][M]^{-1}[K][M]^{-1}[K]\{\varphi_i\} = 0 \qquad (2.54)$$

Các quan hệ trên có thể lặp lại mà vẫn các thuật toán tương tự.

Các biểu thức tính chất trực giao ở trên và kể cả (2.47) và (2.49) có thể viêt gọn lại ở dạng sau:

$$\{\varphi_j\}^T [M]\left[M^{-1}K\right]^b \{\varphi_i\} = 0 \qquad (2.55)$$

Ở biểu thức (2.55) nếu b = 0 và b = 1 sẽ nhận được (2.47) và (2.49).

Bài 6:
CHUẨN HOÁ CÁC DẠNG DAO ĐỘNG RIÊNG

Ta viết lại các phương trình (2.44) ở dạng sau:

$$(\omega_j^2 - \omega_i^2)\{\varphi_i\}^T [M]\{\varphi_j\} = 0$$

Nếu $\omega_j = \omega_i \ (i \neq j)$ thì phương trình trên chỉ thoả mãn khi $\{\varphi_i\}^T [M]\{\varphi_i\} \neq 0$ ta có thể chọn : $\{\varphi_i\}^T [M]\{\varphi_i\} = 1$.

Dạng dao động riêng thoả mãn biểu thức trên được gọi là dạng chuẩn, ký hiệu là $\{\varphi_{ch}\}$. Ta viết lại:

$$\{\varphi_i\}_{ch}^T [M]\{\varphi_i\}_{ch} = 1 \qquad (2.56)$$

Việc đưa các dạng dao động riêng về dạng chuẩn gọi là chuẩn hoá các dạng dao động riêng. Để xác định dạng chuẩn, ta đặt:

$$\{\varphi_i\}_{ch} = b_i \{\varphi_i\} \qquad (2.57)$$

Đưa (2.57) vào (2.56) ta được: $b_i^2 \{\varphi_i\}^T [M]\{\varphi_i\} = 1$

Suy ra : $$b_i^2 = \frac{1}{\{\varphi_i\}^T [M]\{\varphi_i\}}$$

Nếu đặt: $$a_i^2 = \{\varphi_i\}^T [M]\{\varphi_i\} \qquad (2.58)$$

Thì: $b_i = 1/a_i$, và do đó ở (2.57) ta có:

$$\{\varphi_i\}_{ch} = \frac{1}{a_i}\{\varphi_i\} \tag{2.59}$$

Khi tất cả các dạng dao động riêng đã được chuẩn hoá, thì từ (2.56) ta sẽ viết được điều kiện trực chuẩn ở dạng tổng quát như sau:

$$\left[\Phi_{\text{ch}}^{\text{T}}\right][M][\Phi_{\text{ch}}] = [\text{E}] \tag{2.60}$$

Điều kiện trực chuẩn tổng quát còn được viết với ma trận cứng như sau: nhân trái phương trình (2.50) với $\{\varphi_i\}^T$ ta được:

$$\{\varphi_i\}^T[K]\{\varphi_i\} = \omega_i^2\{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_i\}$$

Khi dạng dao động riêng đã được chuẩn hoá thì biểu thức trên có dạng:

$$\{\varphi_i\}_{ch}^T[K]\{\varphi_i\}_{ch} = \omega_i^2 \tag{2.61}$$

Biểu thức (2.61) viết đối với tất cả các dạng chuẩn:

$$\left[\Phi_{\text{ch}}\right]^T[K][\Phi_{\text{ch}}] = [\Omega] \tag{2.62}$$

Trong đó: $[\Omega] = \text{diag}(\omega_{\text{i}}^2) = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \omega_n^2 \end{bmatrix}$

Điều kiện trực chuẩn tổng quát (2.60), (2.62) có ý nghĩa quan trọng trong việc rút gọn quá trình tính toán dao động của hệ sau này.

Bài 7:

DAO ĐỘNG TỰ DO CỦA HỆ HỮU HẠN BẬC TỰ DO

Phương trình vi phân dao động tự do của hệ nhiều bậc tự do:

$$[M]\{\ddot{y}(t)\} + [K]\{y(t)\} = \{0\} \tag{2.63}$$

Nghiệm riêng thứ i ứng với dạng dao động thứ i được tìm dưới dạng:

$$\{y_i(t)\} = \{A_i\}\sin(\omega_i t + \gamma_i),\ i = 1 \rightarrow n \tag{2.64}$$

Trong đó $\{A_i\}$ và γ_i được xác định từ điều kiện ban đầu của hệ (các tốc độ ban đầu và các chuyển vị ban đầu). Nghiệm (2.64) còn được viết dưới dạng:

$$\{y_i(t)\} = \{B_i\}\cos\omega_i t + \{C_i\}\sin\omega_i t,\ i = 1 \rightarrow n \qquad (2.64)'$$

Vectơ vận tốc:

$$\{\dot{y}_i(t)\} = -\omega_i\{B_i\}\sin\omega_i t + \omega_i\{C_i\}\cos\omega_i t$$

Các điều kiện ban đầu: $\{y_i\}_{t=0} = \{y_i^0\}$; $\{\dot{y}_i\}_{t=0} = \{v_i^0\}$. Thế các điều kiện này vào phương trình chuyển vị và phương trình vận tốc ở trên, ta được:

$$\{B_i\} = \{y_i^0\};\ \{C_i\} = \frac{\{v_i^0\}}{\omega_i}$$

Do đó:

$$\{y_i(t)\} = \{y_i^0\}\cos\omega_i t + \{v_i^0\}\frac{\sin\omega_i t}{\omega_i} \qquad (2.65)$$

Trong đó $\{y_i^0\},\{v_i^0\}$ là các vectơ chuyển vị và vận tốc ban đầu tác dụng vào hệ gây nên dao động tự do của hệ ứng với dạng chính thứ i : $\{y_i(t)\}$. Nói cách khác, chúng là các vecto do các vectơ chuyển vị ban đầu và vận tốc ban đầu của hệ được khai triển vào dạng chính thứ i. Tổng của các vectơ này, chính bằng vectơ chuyển vị ban đầu và vectơ vận tốc ban đầu của hệ:

$$\begin{aligned}\{y_0\} &= \{y_1^0\} + \{y_2^0\} + \ldots + \{y_i^0\} + \ldots + \{y_n^0\}\\ \{v_0\} &= \{v_1^0\} + \{v_2^0\} + \ldots + \{v_i^0\} + \ldots + \{v_n^0\}\end{aligned} \qquad (2.66)$$

Để xác định $\{y_i^0\}$, ta đặt:

$$\{y_i^0\} = \alpha_i[M]\{\varphi_i\} \qquad (2.67)$$

Đưa (2.67) vào (2.66) ta có:

$$\{y_0\} = \alpha_1[M]\{\varphi_1\} + \alpha_2[M]\{\varphi_2\} + \ldots + \alpha_i[M]\{\varphi_i\} + \ldots + \alpha_n[M]\{\varphi_n\} \qquad (2.68)$$

Nhân trái 2 vế của phương trình (2.68) với $\{\varphi_i\}^T$, ta có:

$$\{\varphi_i\}^T\{y_0\} = \alpha_1\{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_1\} + \ldots + \alpha_i\{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_i\} + \ldots + \alpha_n\{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_n\}$$

Sử dụng tính chất trực giao đối với vế phải của phương trình trên, ta được:

$$\{\varphi_i\}^T\{y_0\} = \alpha_i\{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_i\}$$

Từ biểu thức này, ta rút ra:

$$\alpha_i = \frac{\{\varphi_i\}^T\{y_0\}}{\{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_i\}} \qquad (2.69)$$

Đưa (2.69) vào (2.67) ta được:

$$\left\{y_i^0\right\} = \frac{\left\{\varphi_i\right\}^T\left\{y_0\right\}}{\left\{\varphi_i\right\}^T\left[M\right]\left\{\varphi_i\right\}}\left[M\right]\left\{\varphi_i\right\} \tag{2.70}$$

Với cả hệ ($i = 1 \to n$) ta có ma trận khai triển chuyển vị ban đầu:

$$\left[Y_{kh}^0\right] = \left[\left\{y_1^0\right\} \quad \left\{y_2^0\right\} \quad \dots \quad \left\{y_n^0\right\}\right] = \begin{bmatrix} y_{11}^0 & y_{12}^0 & \dots & y_{1n}^0 \\ y_{21}^0 & y_{22}^0 & \dots & y_{2n}^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1}^0 & y_{n2}^0 & \dots & y_{nn}^0 \end{bmatrix} \tag{2.71}$$

Từ (2.66) ta có điều kiện kiểm tra theo hàng sau:

$$y_k^0 = \sum_{i=1}^{n} y_{ki}^0 = (y_{k1}^0 + y_{k2}^0 + \dots y_{kn}^0),\ k = 1 \to n \tag{2.72}$$

Tương tự quá trình trên, ta cũng nhận được vectơ tốc độ ban đầu khi khai triển vào dạng dao động riêng thứ “i” như sau:

$$\left\{v_i^0\right\} = \frac{\left\{\varphi_i\right\}^T\left\{v_0\right\}}{\left\{\varphi_i\right\}^T\left[M\right]\left\{\varphi_i\right\}}\left[M\right]\left\{\varphi_i\right\} \tag{2.73}$$

Ma trận khai triển tốc độ ban đầu đối với cả hệ:

$$\left[V_{kh}^0\right] = \left[\left\{v_1^0\right\} \quad \left\{v_2^0\right\} \quad \dots \quad \left\{v_n^0\right\}\right] = \begin{bmatrix} v_{11}^0 & v_{12}^0 & \dots & v_{1n}^0 \\ v_{21}^0 & v_{22}^0 & \dots & v_{2n}^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n1}^0 & v_{n2}^0 & \dots & v_{nn}^0 \end{bmatrix} \tag{2.74}$$

Công thức kiểm tra theo hàng:

$$v_k^0 = \sum_{i=1}^{n} v_{ki}^0 = (v_{k1}^0 + v_{k2}^0 + \dots v_{kn}^0),\ k = 1 \to n \tag{2.75}$$

Cuối cùng ta có phương trình dao động tự do của hệ hữu hạn bậc tự do:

$$\left\{y(t)\right\} = \left[Y_{kh}^0\right]\left\{K_{yo}(t)\right\} + \left[V_{kh}^0\right]\left\{K_{vo}(t)\right\} \tag{2.76}$$

Trong đó: $\left[Y_{kh}^0\right]$ và $\left[V_{kh}^0\right]$ được xác định theo (2.71) và (2.74), còn các vectơ $\left\{K_{yo}(t)\right\}$ và $\left\{K_{vo}(t)\right\}$ là:

$$\left\{K_{yo}(t)\right\} = \begin{Bmatrix} cos\omega_1 t \\ cos\omega_2 t \\ \dots \\ cos\omega_n t \end{Bmatrix} \tag{2.77}$$

$$\{K_{vo}(t)\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\sin\omega_1 t}{\omega_1} \\ \dfrac{\sin\omega_2 t}{\omega_2} \\ ... \\ \dfrac{\sin\omega_n t}{\omega_n} \end{Bmatrix} \qquad (2.78)$$

Phương pháp giải bài toán dao động tự do hệ hữu hạn bậc tự do ở trên gọi là phương pháp khai triển theo các dạng dao động riêng. Ở đây là khai triển trực tiếp nguyên nhân tác dụng bên ngoài theo các dạng riêng. Phương pháp này còn gọi là: phương pháp dựa trên các đặc trưng tần số, hoặc phương pháp cộng dạng dao động; phương pháp có thể được diễn đạt ở nhiều cách khác nhau.

Bài 8:
DAO ĐỘNG CỦA HỆ HỮU HẠN BẬC TỰ DO CHỊU TÁC DỤNG XUNG

Như đã biết khi hệ chịu tác dụng của xung lượng, hệ sẽ dao động tự do. Phương trình dao động tự do của hệ hữu hạn bậc tự do ứng với dạng chính thứ i có dạng:

$$\{y_i(t)\} = \{y_i^0\}\cos\omega_i t + \{v_i^0\}\frac{\sin\omega_i t}{\omega_i}$$

Trong đó $\{y_i^0\}$ và $\{v_i^0\}$ được cho bởi:

$$\{y_i^0\} = \frac{\{\varphi_i\}^T\{y_0\}}{\{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_i\}}[M]\{\varphi_i\};\ \{v_i^0\} = \frac{\{\varphi_i\}^T\{v_0\}}{\{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_i\}}[M]\{\varphi_i\}.$$

Vấn đề ở đây là phải xác định $\{v_i^0\}$ như thế nào khi hệ chịu tác dụng của xung tức thời?

Ta xem rằng tại thời điểm ban đầu t = 0, dưới tác dụng của vectơ xung lượng $\{S_i\}$, (Vectơ xung khai triển vào dạng chính thứ i của các xung lượng bên ngoài tác dụng vào hệ), các khối lượng của hệ sẽ nhận được vận tốc ban đầu tương tự như trong hệ một bậc tự do:

$$v_{1,i}^0 = \frac{S_{1,i}}{m_1}; v_{2,i}^0 = \frac{S_{2,i}}{m_2}; ...; v_{n,i}^0 = \frac{S_{n,i}}{m_n}$$

Như vậy, vectơ vận tốc ban đầu của hệ ứng với dạng i:

$$\left\{v_i^0\right\}=\begin{Bmatrix} v_{1i}^0 \\ v_{2i}^0 \\ \ldots \\ v_{ni}^0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \dfrac{S_{1i}}{m_1} \\ \dfrac{S_{2i}}{m_2} \\ \ldots \\ \dfrac{S_{ni}}{m_n} \end{Bmatrix} \text{ hay: } \left\{v_i^0\right\}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{m_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{m_2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \dfrac{1}{m_n} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} S_{1i} \\ S_{2i} \\ \ldots \\ S_{ni} \end{Bmatrix}=\left[M\right]^{-1}\left\{S_i\right\} \qquad (2.79)$$

Nếu xem rằng chuyển vị ban đầu của hệ bằng không: $\left\{y_i^0\right\}=\{0\}$ thì sau khi thế các điều kiện ban đầu vào phương trình dao động tự do (2.65) ta nhận được vectơ chuyển vị của hệ ứng với dạng i:

$$\left\{y_i(t)\right\}=\left[M\right]^{-1}\left\{S_i\right\}K_{ai}(t) \qquad (2.80)$$

Trong đó: $K_{ai}(t)=\dfrac{\sin\omega_i t}{\omega_i}$ (2.81)

$\left\{S_i\right\}$ là vectơ xung khai triển ứng với dạng dao động riêng thứ i.

Để xác định $\left\{S_i\right\}$, ta cũng đặt:

$$\left\{S_i\right\}=\alpha_i\left[M\right]\left\{\varphi_i\right\}$$

và tiến hành tương tự như khai triển chuyển vị và tốc độ ban đầu vào các dạng riêng ở phần dao động tự do, ta nhận được:

$$\left\{S_i\right\}=\frac{\left\{\varphi_i\right\}^T\left\{S\right\}}{\left\{\varphi_i\right\}^T\left[M\right]\left\{\varphi_i\right\}}\left[M\right]\left\{\varphi_i\right\} \qquad (2.82)$$

Trong đó $\left\{S\right\}$ là vectơ xung lượng bên ngoài tác dụng vào hệ.

Gộp các vectơ xung khai triển theo các dạng riêng, ta có ma trận xung khai triển của cả hệ:

$$\left[S_{kh}\right]=\left[\left\{S_1\right\} \quad \left\{S_2\right\} \quad \ldots \quad \left\{S_n\right\}\right]=\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \ldots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \ldots & S_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{n1} & S_{n2} & \ldots & S_{nn} \end{bmatrix} \qquad (2.83)$$

Công thức kiểm tra theo hàng:

$$S_k=\sum_{i=1}^{n}S_{ki}=S_{k1}+S_{k2}+\ldots+S_{kn} \qquad (2.84)$$

Cuối cùng ta có vectơ chuyển vị của các khối lượng cũng chính là phương trình dao động của hệ chịu tác dụng xung:

$$\{y(t)\} = [M]^{-1}[S_{kh}]\{K_{ai}(t)\} \quad (2.85)$$

Trong đó, $[S_{kh}]$ là ma trận xung khai triển được tính từ (2.82), $\{K_{ai}(t)\}$ là vectơ có các phần tử là $K_{ai}(t)$ được xác định theo (2.81). Nếu xung tác dụng vào hệ không phải thời điểm t = 0, mà tại thời điểm $t = \tau$, thì vectơ chuyển vị của các khối lượng ứng với dạng chính thứ i sẽ là:

$$\{y_i(t)\} = [M]^{-1}\{S_i\}\frac{\sin\omega_i(t-\tau)}{\omega_i} \quad (2.86)$$

Vectơ lực đàn hồi ứng với dạng dao động riêng thứ i được tính qua lực quán tính:

$$\{P_{d,i}(t)\} = -[M]\{\ddot{y}_i(t)\} \quad (2.87)$$

Đưa (2.80) với đạo hàm cấp hai tương ứng vào biểu thức trên, ta được:

$$\{P_{d,i}(t)\} = \{S_i\}\omega_i \sin\omega_i t$$

Hay: $$\{P_{d,i}(t)\} = \{S_i\}K_i(t) \quad (2.88)$$

Với: $$K_i(t) = \omega_i \sin\omega_i t \quad (2.89)$$

là hệ số động học theo thời gian ứng với dạng i khi hệ chịu tác dụng xung.

Vectơ lực đàn hồi của cả hệ:

$$\{P_d(t)\} = [S_{kh}]\{K_i(t)\} \quad (2.90)$$

Trong đó $[S_{kh}]$ là ma trận xung khai triển của cả hệ, $\{K_i(t)\}$ là vectơ có các hệ số là $K_i(t)$ được xác định theo (2.89).

Chú ý: Khi đã có vectơ lực đàn hồi, ta có thể xác định vectơ chuyển vị của các khối lượng qua ma trận mền:

$$\{y(t)\} = [F]\{P_d(t)\} \quad (2.91)$$

từ vectơ lực đàn hồi ta có thể xác định chuyển vị và nội lực của các điểm bất kỳ của hệ qua ma trận ảnh hưởng chuyển vị và ma trận ảnh hưởng nội lực.

Bài 9:

TÍNH DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC THEO PHƯƠNG PHÁP KHAI TRIỂN TẢI TRỌNG THEO CÁC DẠNG RIÊNG

1. Xác định tải trọng theo các dạng riêng

Vectơ tải trọng động bên ngoài tác dụng vào hệ được khai triển vào các dạng dao động riêng:

$$\{P(t)\} = \{P_1(t)\} + \{P_2(t)\} + ... + \{P_i(t)\} + ... + \{P_n(t)\}$$

Ta cũng đặt:

$$\{P_i(t)\} = \alpha_i(t)[M]\{\varphi_i\}$$

Tiến hành tương tự như khai triển chuyển vị và tốc độ ban đầu vào các dạng riêng ở phần dao động tự do, sẽ nhận được:

$$\{P_i(t)\} = \frac{\{\varphi_i\}^T \{P(t)\}}{\{\varphi_i\}^T [M]\{\varphi_i\}}[M]\{\varphi_i\} \qquad (2.92)$$

Gộp các vectơ tải trọng theo các dạng riêng, ta được ma trận tải trọng khai triển của cả hệ:

$$[P_{kh}] = [\{P_1\} \quad \{P_2\} \quad ... \quad \{P_n\}] = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & ... & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & ... & P_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ P_{n1} & P_{n2} & ... & P_{nn} \end{bmatrix} \qquad (2.93)$$

Tải trọng động tác dụng tại khối lượng k được tính kiểm tra theo hàng:

$$P_k = \sum_{i=1}^{n} P_{ki} = P_{k1} + P_{k2} + ... + P_{kn} \qquad (2.94)$$

Việc thiết lập ma trận tải trọng khai triển (2.93) từ các vectơ $\{P_i\}$ được xác định theo (2.92), như vậy là ta đã khai triển tải trọng động bên ngoài vào các khối lượng của cả hệ theo từng dạng dao động riêng, cũng có nghĩa là ta đã xác định từng cột của ma trận $[P_{kh}]$. Ta cũng có thể khai triển tải trọng động bên ngoài theo các dạng dao động riêng vào từng khối lượng k của hệ, nghĩa là ta đi xác định từng hàng của ma trận $[P_{kh}]$, công thức được tính như sau:

$$\{P_k\}^T = m_k diag\varphi_{ki} [\Phi]^{-1} [M]^{-1} \{P\} \qquad (2.95)$$

Trong đó: $diag\varphi_{ki}$ là ma trận chéo có các phần tử trên đường chéo chính là $\varphi_{ki}, i = 1 \to n$.

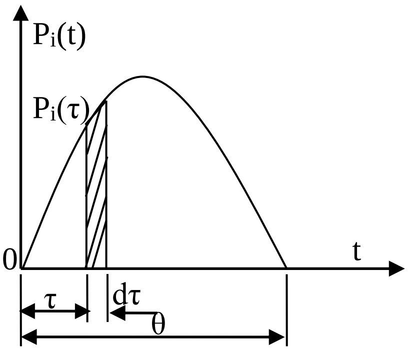
$\{P\}$ là vectơ cường độ tải trọng động bên ngoài tác dụng vào hệ.

Khi dùng dạng dao động riêng đã chuẩn hoá, công thức $\{P_k\}^T$ sẽ là:

$$\{P_k\}^T = m_k \text{diag}\varphi_{ki} \left[\Phi_{ch}\right]^T \{P\} \qquad (2.96)$$

2. Phương trình dao động của hệ

Khi hệ hữu hạn bậc tự do chịu tác dụng của tải trọng động có quy luật thay đổi bất kỳ theo thời gian, để tìm ứng với dạng dao động riêng thứ i trong trường hợp này ta có thể sử dụng phương trình nghiệm của hệ hữu hạn bậc tự do chịu tác dụng xung. Muốn vậy, trên biểu đồ tải trọng ứng với dạng chính thứ i, ta tách ra một phân tố tải trọng ứng với thời điểm τ (hình 2.4). Xem rằng tại thời điểm τ hệ chịu tác dụng của xung lượng phân tố $\{dS_i\}$:



Hình 2.4

$$\{dS_i\} = \begin{Bmatrix} dS_{1i} \\ dS_{2i} \\ \ldots \\ dS_{ni} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{1i}(\tau)d\tau \\ P_{2i}(\tau)d\tau \\ \ldots \\ P_{ni}(\tau)d\tau \end{Bmatrix} = \{P_i(\tau)\}\, d\tau$$

Xung lượng phân tố này sẽ gây ra chuyển vị được xác định theo (2.86) :

$$\{dy_i(t)\} = [M]^{-1} \{P_i(\tau)\}\, d\tau \frac{\sin\omega_i(t-\tau)}{\omega_i}$$

Tích phân biểu thức trên ta được chuyển vị toàn phần :

$$\{y_i(t)\} = [M]^{-1} \{P_i\} K_{ai}(t) \qquad (2.97)$$

Trong đó : $\{P_i\}$ là vectơ tải trọng khai triển vào dạng chính thứ i, được xác định theo (2.92) ; còn :

$$K_{ai}(t) = \frac{1}{\omega_i} \int_0^t f(\tau) \sin\omega_i(t-\tau) d\tau \qquad (2.98)$$

Vectơ chuyển vị cả hệ bằng tổng các vectơ chuyển vị đối với các dạng riêng :

$$\{y(t)\} = [M]^{-1} [P_{kh}] \{K_{ai}(t)\} \qquad (2.99)$$

Trong đó : $\left[P_{kh}\right]$ là ma trận tải trọng khai triển theo các dạng riêng được thiết lập theo công thức (2.93) ; $\left\{K_{ai}(t)\right\}$ là vectơ có các phần tử là $K_{ai}(t)$ được xác định theo (2.98).

Ta thấy rằng : phương trình dao động của hệ hữu hạn bậc tự do (2.99) có dạng tương tự như phương trình dao động của hệ một bậc tự do :

$$y(t) = \frac{1}{M\omega}\int_0^t f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau = M^{-1}P_m K_a(t)$$

với :

$$K_a(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau$$

3. Biểu thức lực đàn hồi

Lực đàn hồi có thể được xác định từ ma trận cứng $\left[K\right]$ và vectơ chuyển vị động $\left\{y(t)\right\}$ của hệ đã tính ở trên.

$$\left\{P_d(t)\right\} = \left[K\right]\left\{y(t)\right\} \qquad (2.100)$$

Ta cũng có thể xác định lực đàn hồi từ ma trận tải trọng khai triển theo các dạng riêng và vectơ hệ số động học theo thời gian. Tương tự như lực đàn hồi của hệ một bậc tự do chịu tải trọng động bất kỳ :

$$P_d(t) = P_m K(t)$$

với : $$K(t) = \omega\int_0^t f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau$$

Ở hệ hữu hạn bậc tự do, vectơ lực đàn hồi ứng với dạng dao động riêng thứ i được viết như sau :

$$\left\{P_{d,i}(t)\right\} = \left\{P_i\right\}K_i(t) \qquad (2.101)$$

Với $\left\{P_i\right\}$ là vectơ tải trọng khai triển ứng với dạng i, $K_i(t)$ là hệ số động học theo thời gian ứng với dạng i :

$$K_i(t) = \omega_i\int_0^t f(\tau)\sin\omega_i(t-\tau)d\tau \qquad (2.102)$$

Từ các vectơ lực đàn hồi ứng với các dạng riêng, ta sẽ có vectơ lực đàn hồi của cả hệ :

$$\left\{P_d(t)\right\} = \left[P_{kh}\right]\left\{K_i(t)\right\} \qquad (2.103)$$

Trong đó $\left[P_{kh}\right]$ là ma trận tải trọng khai triển theo các dạng dao động riêng được thiết lập theo (2.93) ; còn $\{K_i(t)\}$ là vectơ có các phần tử là $K_i(t)$ được xác định theo (2.102).

$$\{K_i(t)\} = \begin{Bmatrix} K_1(t) \\ K_2(t) \\ \dots \\ K_n(t) \end{Bmatrix} \qquad (2.104)$$

Bài 10:
TÍNH DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC THEO PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TỔNG QUÁT

1. Toạ độ tổng quát

Đối với dao động của hệ hữu hạn bậc tự do, chuyển vị của hệ có thể phân tích thành tổng của các chuyển vị thành phần ứng với từng dạng dao động riêng :

$$\{Y(t)\} = \sum_{i=1}^{n}\{Y_i(t)\} = \{Y_1(t)\} + \{Y_2(t)\} + \dots + \{Y_i(t)\} + \dots + \{Y_n(t)\} \qquad (2.105)$$

Để xác định các chuyển vị thành phần $\{Y_i(t)\}$, ở phương pháp khai triển tải trọng theo các dạng riêng, ta xem $\{Y_i(t)\}$ được gây ra bởi tải trọng khai triển theo dạng chính thứ i : $\{P_i(t)\}$ của hệ tải trọng động bên ngoài, và muốn tìm $\{Y_i(t)\}$ thì trước hết ta phải xác định tải trọng khai triển $\{P_i(t)\}$.

Ở đây, ta xem $\{Y_i(t)\}$ bằng tích của chính dạng dao động riêng $\{\varphi_i\}$ với một đại lượng $Z_i(t)$ nào đó :

$$\{Y_i(t)\} = \{\varphi_i\} Z_i(t) \qquad (2.106)$$

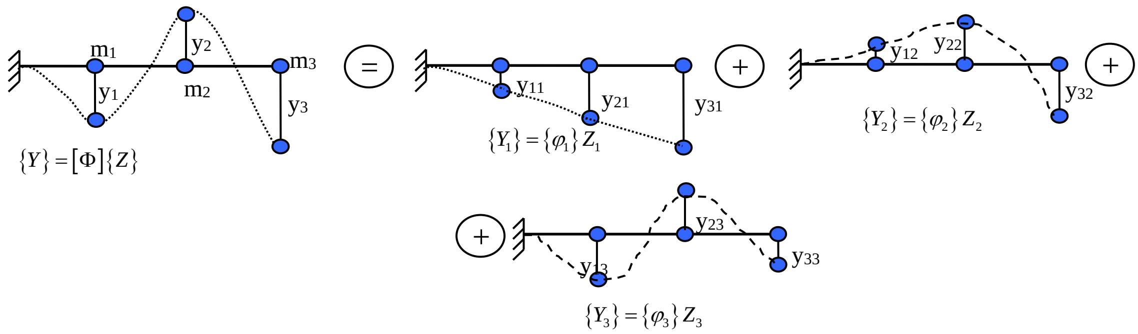
Nếu tìm được các đại lượng $Z_i(t)$ đó, thì ta sẽ xác định được các chuyển vị thành phần, và do đó sẽ xác định được chuyển vị của hệ.

Các đại lượng $Z_i(t)$ đó được gọi là các toạ độ tổng quát của hệ. Phương pháp tính dao động của hệ hữu hạn bậc tự do đi từ việc xác định các toạ độ tổng quát được gọi là *phương pháp toạ độ tổng quát*.

Đưa (2.106) vào (2.105) thì ta có :

$$\{Y(t)\} = \{\varphi_1\} Z_1 + \{\varphi_2\} Z_2 + ... + \{\varphi_i\} Z_i + ... + \{\varphi_n\} Z_n \qquad (2.107)$$

Ta lấy sơ đồ dầm một đầu ngàm, có ba khối lượng để minh hoạ (hình 2.5) :



Hình 2.5

Từ (2.107) ta thấy : ma trận các dạng dao động riêng $[\Phi]$ là ma trận để chuyển các toạ độ tổng quát $\{Z\}$ về các toạ độ hình học ban đầu $\{Y\}$.

Phù hợp với tính chất trực giao của các dạng dao động riêng, ta có thể biểu thị toạ độ tổng quát Z_i bất kỳ qua chuyển vị của hệ. Muốn vậy, ta nhân trái (2.107) với $\{\varphi_i\}^T [M]$

$$\{\varphi_i\}^T [M]\{Y(t)\} = \{\varphi_i\}^T [M]\{\varphi_1\} Z_1 + ... + \{\varphi_i\}^T [M]\{\varphi_i\} Z_i + ... + \{\varphi_i\}^T [M]\{\varphi_n\} Z_n$$

Áp dụng tính chất trực giao vào vế phải của biểu thức trên, ta được :

$$\{\varphi_i\}^T [M]\{Y(t)\} = \{\varphi_i\}^T [M]\{\varphi_i\} Z_i$$

Suy ra :

$$Z_i = \frac{\{\varphi_i\}^T [M]\{Y(t)\}}{\{\varphi_i\}^T [M]\{\varphi_i\}} \qquad (2.108)$$

2. Xác định các toạ độ tổng quát

Phương trình vi phân dao động của hệ hữu hạn bậc tự do không cản có dạng :

$$[M]\{\ddot{Y}(t)\} + [K]\{Y(t)\} = \{P(t)\} \qquad (2.109)$$

Ta sẽ sử dụng tính chất trực giao của các dạng dao động riêng để xác định các toạ độ tổng quát. Muốn vậy, trước hết ta đưa phương trình (2.107) và đạo hàm cấp hai của nó vào phương trình (2.109) :

$$[M][\Phi]\{\ddot{Z}(t)\} + [K][\Phi]\{Z(t)\} = \{P(t)\} \qquad (2.110)$$

Nhân trái hai vế của phương trình trên với $\{\varphi_i\}^T$ ta có :

$$\{\varphi_i\}^T [M][\Phi]\{\ddot{Z}(t)\} + \{\varphi_i\}^T [K][\Phi]\{Z(t)\} = \{\varphi_i\}^T \{P(t)\} \qquad (2.111)$$

Khai triển các thành phần ở vế trái của phương trình (2.111) và sử dụng các biểu thức tính chất trực giao, ta sẽ nhận được phương trình sau :

$$\{\varphi_i\}^T [M]\{\varphi_i\}\{\ddot{Z}_i(t)\} + \{\varphi_i\}^T [K]\{\varphi_i\}\{Z_i(t)\} = \{\varphi_i\}^T \{P(t)\} \qquad (2.112)$$

Ta đưa vào các ký hiệu mới :

$$M_i = \{\varphi_i\}^T [M]\{\varphi_i\} \qquad (2.113)$$

$$K_i = \{\varphi_i\}^T [K]\{\varphi_i\} \qquad (2.114)$$

$$P_i(t) = \{\varphi_i\}^T \{P(t)\} \qquad (2.115)$$

M_i được gọi là khối lượng tổng quát, K_i được gọi là độ cứng tổng quát, $P_i(t)$ được gọi là tải trọng tổng quát của dạng chính thứ i. Giữa khối lượng tổng quát và độ cứng tổng quát có sự liên hệ với nhau bởi công thức :

$$[K]\{\varphi_i\} = \omega_i^2 [M]\{\varphi_i\}$$

Nhân trái hai vế của đẳng thức trên với $\{\varphi_i\}^T$, ta được :

$$K_i = \omega_i^2 M_i \qquad (2.116)$$

Sử dụng các ký hiệu (2.113), (2.114), (2.115) ta viết lại phương trình (2.112) như sau :

$$M_i \ddot{Z}_i(t) + K_i Z_i(t) = P_i(t) \qquad (2.117)$$

Chia hai vế của phương trình (2.117) cho M_i, và sử dụng đến (2.116) ta được :

$$\ddot{Z}_i(t) + \omega_i^2 Z_i(t) = \frac{P_i(t)}{M_i} \qquad (2.118)$$

Phương trình (2.118) là phương trình vi phân chuyển động của hệ một bậc tự do với tần số ω_i. Giải phương trình này ta được nghiệm là toạ độ tổng quát $Z_i(t)$, nó được xác định bằng tích phân Duamen :

$$Z_i(t) = \frac{1}{M_i\omega_i}\int_0^t P_i(\tau)\sin\omega_i(t-\tau)d\tau \qquad (2.119)$$

Với bài toán dao động tự do, phương trình (2.118) sẽ là :

$$\ddot{Z}_i(t) + \omega_i^2 Z_i(t) = 0 \qquad (2.120)$$

Nghiệm tương ứng với phương trình (2.120) có dạng :

$$Z_i(t) = Z_i(0)\cos\omega_i t + \frac{\dot{Z}_i(0)}{\omega_i}\sin\omega_i t \qquad (2.121)$$

Các $Z_i(0), \dot{Z}_i(0)$ được xác định từ điều kiện ban đầu ở (2.108) và biểu thức đạo hàm của nó.

Như vậy, bằng phép biến đổi và sử dụng các toạ độ tổng quát (2.107), ta đã đưa phương trình vi phân dao động có sự liên hệ trong các ma trận $[K],[M]$ về hệ chỉ chứa các phương trình vi phân độc lập với các toạ độ tổng quát, mỗi phương trình đều ứng với hệ một bậc tự do và dễ dàng nhận được nghiệm.

Bài 11 :
PHƯƠNG PHÁP KHAI TRIỂN TẢI TRỌNG THEO CÁC DẠNG DAO ĐỘNG RIÊNG TÍNH HỆ CHỊU TẢI TRỌNG ĐIỀU HOÀ

Khi hệ chịu tác dụng của tải trọng động có quy luật thay đổi theo thời gian là quy luật điều hoà :

$$\{P(t)\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_n \end{Bmatrix} \sin rt \qquad (2.122)$$

thì chuyển động của hệ khi ổn định cũng thay đổi với quy luật điều hoà, nghĩa là : nghiệm của phương trình vi phân có vế phải của phương trình :

$$[M]\{\ddot{Y}(t)\} + [K]\{Y(t)\} = \{P(t)\} \qquad (2.123)$$

sẽ là : $\{Y(t)\} = \{Y\}\sin rt$ (2.124)

Trong đó : $\{Y\}$ là vectơ chứa các biên độ dao động của hệ.

Đưa (2.134) và đạo hàm cấp hai của nó vào (2.123) ta được :

$$\left([K] - r^2[M]\right)\{Y\} = \{P\} \qquad (2.125)$$

Ta tìm nghiệm của phương trình (2.125) dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các dạng dao động riêng chuẩn :

$$\{Y\} = [\Phi_{ch}]\{Z\} \qquad (2.126)$$

Trong đó : $\left[\Phi_{ch}\right]$ là ma trận các dạng dao động riêng đã được chuẩn hóa ; $\{Z\}$ là vectơ có các phần tử là biên độ dao động của các dạng, nó chính là các toạ độ tổng quát chưa biết. Đưa (2.126) vào (2.125), ta được :

$$\left([K][\Phi_{ch}]-r^2[M][\Phi_{ch}]\right)\{Z\}=\{P\} \qquad (2.127)$$

Nhân trái phương trình (2.127) với $[\Phi_{ch}]^T$, ta có:

$$\left([\Phi_{ch}]^T[K][\Phi_{ch}]-r^2[\Phi_{ch}]^T[M][\Phi_{ch}]\right)\{Z\}=[\Phi_{ch}]^T\{P\} \qquad (2.128)$$

Áp dụng điều kiện trực chuẩn vào hai vế của phương trình (2.128), ta có:

$$\left([\Omega]-r^2[E]\right)\{Z\}=[\Phi_{ch}]^T\{P\} \qquad (2.129)$$

Nhân trái hai vế của phương trình (2.129) với $\left[\Omega-r^2[E]\right]^{-1}$, ta nhận được nghiệm là các toạ độ tổng quát :

$$\{Z\}=\left[\Omega-r^2[E]\right]^{-1}[\Phi_{ch}]^T\{P\} \qquad (2.130)$$

Đưa (2.130) vào (2.126) ta nhận được phương trình chuyển vị của hệ:

$$\{Y\}=[\Phi_{ch}]\left[\Omega-r^2[E]\right]^{-1}[\Phi_{ch}]^T\{P\} \qquad (2.131)$$

Ta đặt: $$[D]=\left[\Omega-r^2[E]\right]^{-1} \qquad (2.132)$$

Và đưa vào ký hiệu:

$$S_i=\frac{1}{\omega_i^2-r^2} \qquad (2.133)$$

Khi đó: $$[D]=\mathrm{diag}(\mathrm{S_i}) \qquad (2.134)$$

Nếu đặt: $$[G]=[\Phi_{ch}][D][\Phi_{ch}]^T \qquad (2.135)$$

Thì : $$\{Y\}=[G]\{P\} \qquad (2.136)$$

Ma trận $[G]$ được gọi là ma trận giải thức Green.

Như vậy, khi tính hệ chịu tải trọng điều hoà, ta chỉ cần xác định ma trận Green, rồi nhân với vectơ biên độ tải trọng là nhận được vectơ biên độ dao động của hệ.

Bài 12:
LỰC TƯƠNG ỨNG VỚI TRẠNG THÁI DAO ĐỘNG VÀ MA TRẬN MỀN ĐỘNG HỌC TỔNG QUÁT CỦA HỆ HỮU HẠN BẬC TỰ DO CHỊU TẢI TRỌNG ĐỘNG BẤT KỲ

1. Xác định vectơ lực tương ứng với trạng thái động của hệ hữu hạn bậc tự do chịu tải trọng động bất kỳ

Ở phương pháp khai triển tải trọng theo các dạng riêng, ta có vectơ tải trọng khai triển dạng i :

$$\{P_i\}=\frac{\{\varphi_i\}^T\{P\}}{\{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_i\}}[M]\{\varphi_i\}$$

Giá trị tải trọng khai triển vào khối lượng k ứng với dạng dao động riêng thứ i được xác định từ biểu thức trên như sau:

$$P_{ki}=\frac{\{\varphi_i\}^T\{P\}}{M_i}M_k\varphi_{ki} \qquad \text{(a)}$$

Với M_i là khối lượng tổng quát thứ i.

Vectơ lực đàn hồi ứng với dạng dao động riêng thứ i được xác định bởi:

$$\{P_{d,i}\}=\{P_i\}K_i(t) \qquad \text{(b)}$$

Trong đó $K_i(t)$ là hệ số động học theo thời gian được xác định bởi :

$$K_i(t)=\omega_i\int_0^t f(t)\sin\omega_i(t-\tau)d\tau$$

Từ các công thức (a) và (b) ta có lực tương ứng với trạng thái động tại khối lượng k ứng với dạng dao động riêng thứ i:

$$P_{d,k}^i(t)=P_{ki}\,K_i(t)=m_k\,\varphi_{ki}\,\frac{\{\varphi_i\}^T\{P\}}{M_i}K_i(t) \qquad \text{(c)}$$

Do vậy, vectơ lực tương ứng với trạng thái động ứng với dạng dao động riêng thứ i sẽ là:

$$\{P_{d,i}(t)\}=[M]\{\varphi_i\}\frac{K_i(t)}{M_i}\{\varphi_i\}^T\{P\} \qquad \text{(d)}$$

Cuối cùng, vectơ lực tương ứng với trạng thái động của cả hệ được viết như sau :

$$\{P_d(t)\}=[M][\Phi]\mathrm{diag}\frac{K_i(t)}{M_i}\{P\} \qquad (2.137)$$

Trong đó: $\text{diag}\dfrac{K_i(t)}{M_i}$ là ma trận chéo có các phần tử nằm trên đường chéo chính bằng $\dfrac{K_i(t)}{M_i}, i=1\rightarrow n$; nếu dùng các dạng dao động riêng chuẩn, thì tất cả các khối lượng tổng quát M_i đều bằng 1.

Công thứ (2.137) cho phép ta tính trực tiếp được vectơ lực tương ứng với trạng thái động $\{P_d(t)\}$, từ đó có thể xác định nội lực và chuyển vị động của hệ dao động.

2. Xác định ma trận mền động học tổng quát

Ở phương pháp cộng dao động, có thể biểu thị vectơ chuyển vị của hệ là tổ hợp của các dạng dao động riêng với các toạ độ tổng quát:

$$\{Y(t)\}=[\Phi]\{Z(t)\} \tag{e}$$

Trong đó : $[\Phi]$ là ma trận các dạng dao động riêng ;

$\{Z(t)\}$ là vectơ có các phần tử là các toạ độ tổng quát $Z_i(t)$

$$Z_i(t)=\frac{P_i}{M_i}K_{ai}(t)=\frac{K_{ai}(t)}{M_i}\{\varphi_i\}^T\{P\};\ i=1\rightarrow n \tag{f}$$

Với: $$K_{ai}(t)=\frac{1}{\omega_i}\int_0^t f(\tau)\sin\omega_i(t-\tau)d\tau \tag{g}$$

Từ (f) ta có thể viết vectơ toạ độ tổng quát của cả hệ:

$$\{Z(t)\}=\text{diag}\frac{K_{ai}(t)}{M_i}[\Phi]^T\{P\} \tag{i}$$

Đưa (i) vào (e) ta được:

$$\{Y(t)\}=[\Phi]\text{diag}\frac{K_{ai}(t)}{M_i}[\Phi]^T\{P\} \tag{k}$$

Hay: $$\{Y(t)\}=[F_d(t)]\{P\} \tag{2.138}$$

Trong đó: $$[F_d(t)]=[\Phi]\text{diag}\frac{K_{ai}(t)}{M_i}[\Phi]^T \tag{2.139}$$

Ở bài toán tĩnh ta luôn có: $\{Y\}=[F]\{P\}$, với $[F]$ là ma trận mềm, vì vậy ma trận $[F_d(t)]$ ở trên được gọi là ma trận mềm động học.

Bài 13 :

DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC CỦA HỆ HỮU HẠN BẬC TỰ DO CÓ CẢN

1. Giả thiết về lực cản và xác định ma trận tắt dần

Khi tính toán dao động cưỡng bức của hệ hữu hạn bậc tự do có cản ta dùng giả thiết:

- Lực cản tỷ lệ với vận tốc – ma trận tắt dần thoả mãn điều kiện trực giao và được biểu thị bằng quan hệ sau:

$$\{\varphi_i\}^T [C]\{\varphi_j\} = 2\omega_i\varepsilon_i\delta_{ij} \qquad (2.140)$$

Trong đó: ε_i - tham số tắt dần,

δ_{ij} - ký hiệu Cronheker : $\delta_{ij} = \{\varphi_i\}^T [M]\{\varphi_j\}$

Ở (2.140) ta thấy rằng : Các dạng dao động riêng của hệ khi kể đến và khi không kể đến ảnh hưởng của lực cản là trùng nhau. Chúng trực giao với nhau qua ma trận tắt dần $[C]$. Điều đó có nghĩa là sự tiêu hao năng lượng trong quá trình dao động của hệ được tính bằng tổng các năng lượng hấp thụ ở mỗi dạng dao động riêng. Như vậy, tác dụng của tải trọng ngoài và các điều kiện ban đầu đối với mỗi dạng dao động riêng đều có thể được tính một cách độc lập. Sự thoả mãn điều kiện (2.140) sẽ dễ dàng cho phép tính dao động của hệ hữu hạn bậc tự do có cản theo phương pháp khai triển theo các dạng riêng.

Phù hợp với điều kiện ma trận tắt dần thoả mãn điều kiện trực giao. Reighley đã giả định ma trận tắt dần bằng tổ hợp của các ma trận độ cứng và ma trận khối lượng :

$$[C] = a_o[M] + a_1[K] \qquad (2.141)$$

Trong đó: a_o và a_1 là các hệ số tỷ lệ nào đó. Các hệ số này được xác định theo các giá trị khác nhau của tham số tắt dần và tần số dao động riêng.

2. Tính dao động cưỡng bức theo phương pháp khai triển tải trọng theo các dạng riêng có xét đến lực cản

Khi phân tích dao động của hệ thành các dạng riêng, ta xem chuyển vị của hệ bằng tổng các chuyển vị thành phần, trong đó mỗi chuyển vị thành phần tương ứng với một dạng dao động riêng. Bài toán xét chuyển vị đối với từng thành phần là bài toán dao động của hệ một bậc tự do. Khi xét dao động cưỡng bức có kể đến ảnh hưởng của lực cản, phù hợp với giả thiết ở trên ta có thể xét một cách độc lập từng dạng dao động thành phần như hệ một bậc tự do.

Phương trình dao động của hệ một bậc tự do chịu tải trọng động bất kỳ có xét đến ảnh hưởng của lực cản có dạng :

$$y(t) = \frac{1}{M\omega_c}\int_0^t P(\tau)\,e^{-\omega\varepsilon(t-\tau)}\sin\omega_c(t-\tau)\,d\tau$$

Hoặc có thể viết : $y(t) = \frac{P}{M}K_a(t)$

Trong đó : $P(t) = P\,f(t)$ và :

$$K_a(t) = \frac{1}{\omega_c}\int_0^t f(\tau)\,e^{-\omega\varepsilon(t-\tau)}\sin\omega_c(t-\tau)\,d\tau$$

Đối với hệ hữu hạn bậc tự do, tải trọng khai triển theo các dạng dao động riêng có dạng:

$$P_k = \sum_{i=1}^{n} P_{ki} = P_{k1} + P_{k2} + ... + P_{kn}$$

chỉ có vectơ các hệ số ảnh hưởng động học sẽ kể đến ảnh hưởng của lực cản phù hợp với hệ số $K_a(t)$ ở trên. Cụ thể đối với các phần tử $K_{ai}(t)$ được viết như sau :

$$K_{ai}(t) = \frac{1}{\omega_{i,c}}\int_0^t f(\tau)\,e^{-\omega_i\varepsilon_i(t-\tau)}\sin\omega_{i,c}(t-\tau)\,d\tau \qquad (2.142)$$

Chuyển vị của hệ vẫn được xác định theo công thức :

$$\{Y(t)\} = [M]^{-1}[P_{kh}]\{K_{ai}(t)\}$$

3. Tính dao động cưỡng bức theo phương pháp toạ độ tổng quát có xét đến lực cản

Trong trường hợp xét đến ảnh hưởng của lực cản, phương trình vi phân biểu thị dao động đối với các toạ độ tổng quát có dạng sau :

$$M_i\,\ddot{Z}_i(t) + C_i\,\dot{Z}_i(t) + K_i\,Z_i(t) = P_i(t) \qquad (2.143)$$

Trong đó :

$$C_i = \{\varphi_i\}^T[C]\{\varphi_j\} = 2\omega_i\,\varepsilon_i\,M_i$$

Phương trình (2.143) được viết lại :

$$\ddot{Z}_i(t) + 2\omega_i\,\varepsilon_i\,\dot{Z}_i(t) + \omega_i^2\,Z_i(t) = \frac{P_i(t)}{M_i} \qquad (2.144)$$

Đây chính là phương trình vi phân dao động của hệ một bậc tự do ứng với tần số ω_i đối với hệ có khối lượng tổng quát M_i, độ cứng tổng quát K_i, chịu tải trọng tổng quát $P_i(t)$, và hệ số tắt dần tổng quát C_i. Toạ độ tổng quát $Z_i(t)$ là nghiệm của phương trình vi phân (2.144).

$$Z_i(t) = \frac{1}{M_i \omega_{i,c}} \int_0^t P_i(\tau) e^{-\omega_i \varepsilon_i (t-\tau)} \sin\omega_{i,c}(t-\tau) d\tau \qquad (2.145)$$

Chuyển vị của hệ là tổ hợp của các dạng riêng được tính bởi :

$$\{Y(t)\} = [\Phi]\{Z(t)\}$$

Trong đó : $\{Z(t)\}$ là vectơ có các phần tử được xác định theo (2.145).

❖ **<u>Trình tự tính toán hệ dao động hữu hạn bậc tự do chịu tác dụng của tải trọng động bất kỳ được tiến hành như sau:</u>**

1. Xác định các tần số dao động riêng và các dạng dao động riêng của hệ. Đối với bài toán cỡ lớn, ta phải giảm cỡ bài toán và chỉ xác định một số tần sô và dạng dao động riêng thấp.

2. Phân tích tải trọng tác dụng lên hệ ra các tải trọng khai triển theo từng dạng dao động riêng; hoặc xác định các toạ độ tổng quát ứng với các dạng dao động riêng.

3. Xác định chuyển vị của hệ từ kết quả nhận được ma trận tải trọng khai triển, hoặc ma trận các toạ độ tổng quát ở bước trên.

4. Xác định lực đàn hồi để tính nội lực của hệ :

$$\{P_d(t)\} = [K]\{Y(t)\}$$

Ở phương pháp khai triển tải trọng theo các dạng dao động riêng, lực đàn hồi có thể được tính trực tiếp từ ma trận tải trọng khai triển theo các dạng chính dao động. Trên cơ sở đã xác định được lực đàn hồi, ta có thể tìm được chuyển vị và nội lực của một điểm bất kỳ trên hệ. Ở phương pháp toạ độ tổng quát, lực đàn hồi phải tính qua chuyển vị $\{Y(t)\}$ và ma trận cứng $[K]$.

Chương 3
PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN THEO MÔ HÌNH CHUYỂN VỊ

Mục đích:

- Cung cấp cho sinh viên những kiến thức cơ bản của phương pháp phần tử hữu hạn và việc mô hình hóa tính toán kết cấu theo phương pháp PTHH.

Yêu cầu:

- Sinh viên nắm được phân chia kết cấu thành các phần tử;
- Sinh viên nhận biết được các ma trận của phần tử và véc tơ lực nút;
- Sinh viên nhận biết được các phương trình cơ bản để giải bằng phương pháp phần tử hữu hạn;
- Sinh viên nhận biết được các bước giải bài toán kết cấu bằng phương pháp PTHH.

3.1. Sự rời rạc hoá kết cấu liên tục

3.1.1. Khái niệm về phần tử hữu hạn

Trong phương pháp phần tử hữu hạn ta chia kết cấu thành một số hữu hạn bất kỳ các miền, các kết cấu con với kích thước càng nhỏ càng tốt. Các kết cấu đó được gọi là phần tử hữu hạn (PTHH).

Các PTHH có thể:

- Có hình dạng và kích thước khác nhau.
- Có tính chất vật liệu thay đổi từ phần tử này sang phần tử khác.

Kích thước và số lượng PTHH phụ thuộc vào:

- Dạng hình học và tính chất chịu lực của kết cấu.
- Độ chính xác yêu cầu của bài toán.

Mô hình rời rạc hoá cần thoả mãn các điều kiện:

- Xấp xỉ càng chính xác càng tốt các tính chất hình học và vật liệu của kết cấu thực.
- Tránh được càng nhiều càng tốt những khó khăn về mặt toán học khi dùng mô hình để phân tích kết cấu.

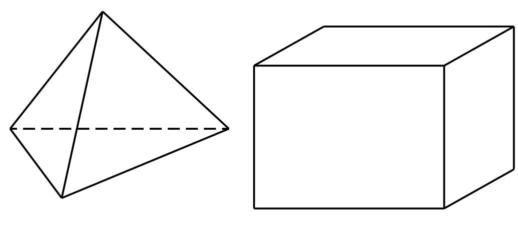
3.1.2. Tính chất của PTHH

a. Các PTHH có thể có dạng:

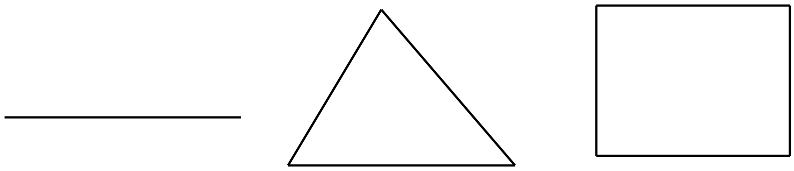
- Đối với dạng không gian:

+ Hình chóp

+ Hình hộp



- Đối với hệ phẳng:
+ Thanh thẳng
+ Tấm tam giác
+ Tấm chữ nhật



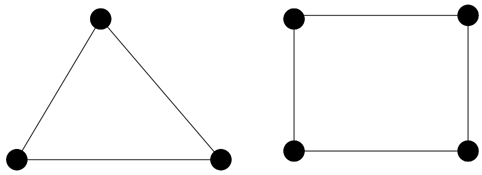
b. Biên của PTHH có thể:

- Thẳng
- Cong

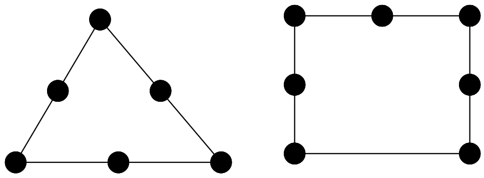
c. Liên kết giữa các phần tử:

- Không phải nối dọc theo toàn bộ các biên chung mà chỉ nối ở môt số điểm gọi là nút.
- Tuỳ theo số lượng nút trên mỗi biên mà chia ra:

+ *PTHH tuyến tính*: các nút chỉ được đặt ở đỉnh của phần tử, trên mỗi cạnh chỉ có 2 nút ở 2 đầu.



+ *PTHH bậc hai*: Mỗi cạnh có 3 nút, 2 nút ở đầu và 1 nút ở bên trong mỗi cạnh (thường ở giữa).



+ *PTHH bậc ba*: Mỗi cạnh có 4 nút.

→ Trong thực tế thường dùng PTHH tuyến tính, PTHH bậc hai. PTHH bậc hai có ưu điểm về độ chính xác cao hơn so với PTHH tuyến tính khi chọn số lượng PTHH cho một kết cấu.

3.2. Trường chuyển vị

3.2.1. Trường chuyển vị

Phương pháp PTHH theo mô hình chuyển vị chọn chuyển vị nút làm ẩn số. Vì vậy ta phải chọn một trường chuyển vị mà qua đó ta có thể xác định một sự tương ứng giữa các chuyển vị của các điểm bất kỳ bên trong PTHH với các chuyển vị nút của PTHH.

Do chưa biết tình hình chuyển vị bên trong phần tử nên ta giả thiết hàm chuyển vị cho từng PTHH. Thường chọn dưới dạng hàm đa thức:

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + ... \qquad (2\text{-}1)$$

Đối với bài toán không gian:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z \end{Bmatrix} \qquad (2\text{-}2)$$

Đối với bài toán phẳng:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \qquad (2\text{-}3)$$

Đối với bất kỳ loại phần tử nào, các hệ số α_i trong đa thức bằng tổng số các chuyển vị nút của PTHH tương ứng. Các hệ số α_i đóng vai trò thông số mà trong quá trình tính toán tiếp theo sẽ được biểu thị theo các chuyển vị nút q_i của PTHH thứ i.

Như vậy hàm chuyển vị {U} được biểu diễn thông qua ma trận chuyển vị nút {q} có dạng:

$$\{U\} = [B]\{q\} \qquad (2\text{-}4)$$

Trong đó:

[B]: là ma trận phụ thuộc dạng phần tử, là ma trận biến đổi chuyển vị nút q_i thành chuyển vị của điểm bất kỳ trong trường chuyển vị, là ma trận phụ thuộc và toạ độ x,y,z của điểm trong PTHH.

{q}: là véctơ chứa chuyển vị nút q_i của PTHH thứ i.

→ Các chuyển vị nút q_i là ẩn số của bài toán nên gọi là phương pháp phần tử hữu hạn theo mô hình chuyển vị.

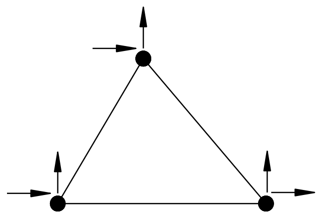
3.2.2 Ví dụ

1. Các phần tử tuyến tính:

- Điều kiện cần và đủ để một PTHH tuyến tính là các hàm chuyển vị của nó có dạng đa thức tuyến tính chứa một số số hạng bằng số lượng chuyển vị tại các nút của PTHH.

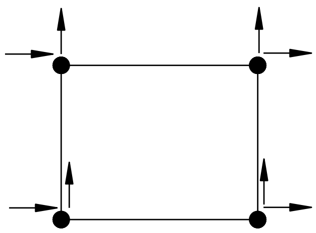
+ Phần tử tam giác:

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$
$$v(x,y) = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \qquad (2\text{-}5)$$



+ Phần tử chữ nhật:

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$
$$v(x,y) = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \qquad (2\text{-}6)$$



- Các PTHH bậc hai:

Điều kiện cần và đủ để một PTHH bậc hai tương thích là các hàm chuyển vị của nó có dạng đa thức bậc hai chứa một số số hạng bằng số lượng các nút của PTHH.

+ Phần tử tam giác:

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2$$
$$v(x,y) = \alpha_7 + \alpha_8 x + \alpha_9 y + \alpha_{10} x^2 + \alpha_{11} xy + \alpha_{12} y^2 \qquad (2\text{-}7)$$

+ Phần tử chữ nhật:

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^2 y + \alpha_8 xy^2$$
$$v(x,y) = \alpha_7 + \alpha_8 x + \alpha_9 y + \alpha_{10} x^2 + \alpha_{11} xy + \alpha_{12} y^2 + \alpha_{13} x^2 y + \alpha_{14} xy^2 \qquad (2\text{-}8)$$

3.3. Các phương trình cơ bản của phương pháp PTHH

3.3.1. Phương trình cân bằng của PTHH thứ i

a. Phương trình cân bằng của PTHH thứ i trong hệ toạ độ địa phương

Hệ toạ độ Oxyz gắn với PTHH thứ i

áp dụng nguyên lý công khả dĩ cho hệ đàn hồi tuyến tính:

- Theo điều kiện cân bằng: $\{R\}_i = \int_v [D]_i^T \{\sigma\}_i dv$

- Theo điều kiện vật lý: $\{\sigma\}_i = [E_0]_i \{\varepsilon\}_i$

- Theo điều kiện chập: $\{\varepsilon\}_i = [D]_i \{q\}_i$

Suy ra: $\{R\}_i = \int_v [D]_i^T [E_0]_i [D]_i dv \{q\}_i$

Hay: $\{R\}_i = [K]_i \{q\}_i$ với $[K]_i = \int_v [D]_i^T [E_0]_i [D]_i dv$ (2-9)

Trong đó:

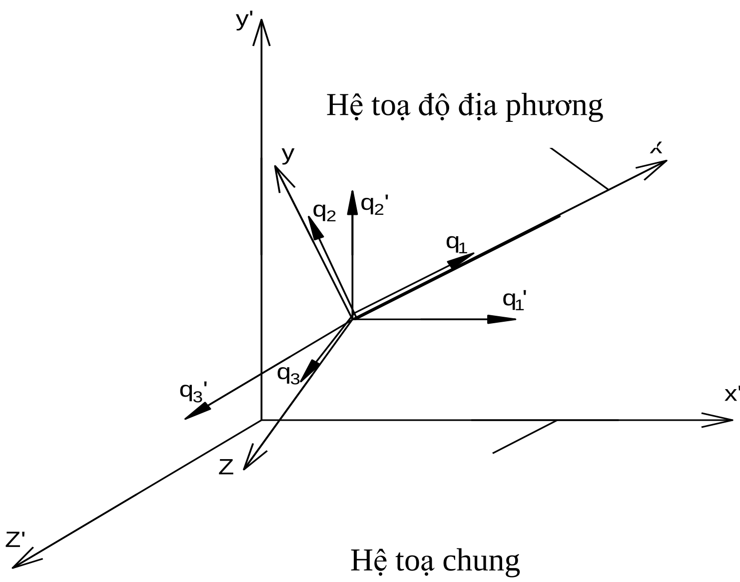
[K]$_i$ là mà trận độ cứng của PTHH thứ i, chứa các đặc trưng cơ học và hình học của phần tử đó. (biểu thị phép biến đổi tuyến tính từ ma trận chuyển vị sang ma trận lực). PTHH có f_i chuyển vị nút thì [K]$_i$ có cấp là f_i.

{R}$_i$: ma trận (véctơ) ngoại lực có các thành phần đặt tại các nút của PTHH thứ i.

{q}$_i$: ma trận (véctơ) chuyển vị nút, có các thành phần tương ứng với các thành phần của {R}$_i$

b. Phương trình cân bằng của PTHH thứ i trong hệ toạ độ chung o'x'y'z'

- Hệ toạ độ o'x'y'z' gắn với toàn bộ kết cấu:



Hệ toạ chung

- Các ma trận {R}$_i$, [K]$_i$, {q}$_i$ được thiết lập cho hệ toạ độ địa phương oxyz gắn với PTHH thứ i. Ta sẽ thiết lập quan hệ {R'}$_i$, [K']$_i$, {q'}$_i$ trong hệ toạ độ chung gắn với toàn hệ.

+ *Quan hệ giữa {q}$_i$ và {q'}$_i$:*

Ta có sự liên hệ: $\{q\}_i = [T]_i.\{q'\}_i$ (2-10)

Trong đó là ma trận chuyển toạ độ từ hệ toạ độ o'x'y'z sang hệ toạ độ oxyz.

- Để đơn giản hoá, ta xét 1 điểm nút có 3 thành phần chuyển vị là:

$\{q\} = \{q_1, q_2, q_3\}$ trong hệ toạ độ địa phương oxyz

$\{q'\} = \{q'_1, q'_2, q'_3\}$ trong hệ toạ độ chung o'x'y'z'.

Ký hiệu:

$l_{xx'}$, $l_{xy'}$, $l_{xz'}$ là cosin chỉ phương của trục x so với o'x', o'y', o'z'.

$l_{yx'}$, $l_{yy'}$, $l_{yz'}$ là cosin chỉ phương của trục y so với o'x', o'y', o'z'.

$l_{zx'}$, $l_{zy'}$, $l_{zz'}$ là cosin chỉ phương của trục z so với o'x', o'y', o'z'.

Ta có:

$$q_1 = l_{xx'}q'_1 + l_{xy'}q'_2 + l_{xz'}q'_3$$

$$q_2 = l_{yx'}q'_1 + l_{yy'}q'_2 + l_{yz'}q'_3$$

$$q_1 = l_{zx'}q'_1 + l_{zy'}q'_2 + l_{zz'}q'_3$$

Viết dưới dạng ma trận:

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{xx'} & l_{xy'} & l_{xz'} \\ l_{yx'} & l_{yy'} & l_{yz'} \\ l_{zx'} & l_{zy'} & l_{zz'} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} q_1' \\ q_2' \\ q_3' \end{Bmatrix} \qquad (2\text{-}11)$$

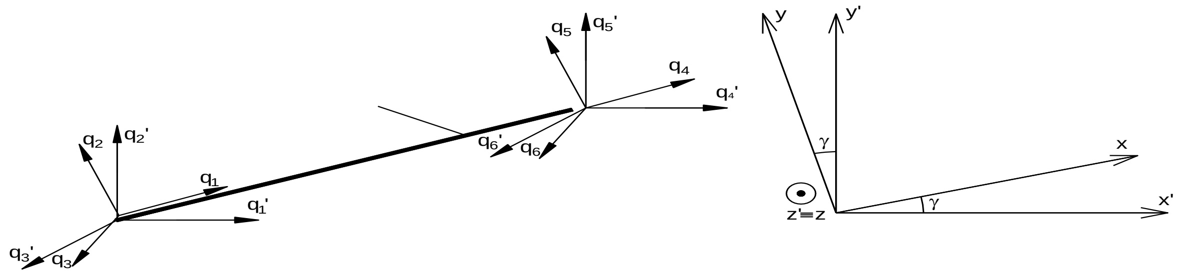
Hay: $\{q\}_i = [l].\{q'\}_i$

Trong đó [l] là ma trận các cosin chỉ phương.

Như vậy đối với 1 điểm thì:

$\{q\}_i = [T]_i.\{q'\}_i$ trong đó $[T]_i = [l]$ (2-12)

- Đối với hệ thanh phẳng trong mặt phẳng xoy, PTHH thứ i là thanh thẳng có 2 nút. Mỗi nút có 3 thành phần chuyển vị: 2 chuyển vị thẳng và 1 chuyển vị xoay.



$$[T]_i = \begin{bmatrix} [l] & 0 \\ 0 & [l] \end{bmatrix} \quad \text{với } [l] = \begin{bmatrix} l_{xx'} & l_{xy'} & 0 \\ l_{yx'} & l_{yy'} & 0 \\ 0 & 0 & l_{zz'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}13)$$

- Trường hợp thanh không gian, PTHH thứ i là thanh thẳng có 2 nút. Mỗi nút có 6 thành phần chuyển vị: 3 chuyển vị thẳng và 3 chuyển vị xoay.

$$[T]_i = \begin{bmatrix} [l] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [l] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [l] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [l] \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}14)$$

- Trường hợp tổng quát: PTHH thứ i có nhiều chuyển vị nút thì ma trận [T]i là ma trận khối chéo có dạng:

$$[T]_i = \begin{bmatrix} [l] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [l] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [l] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [l] \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}15)$$

- *Quan hệ giữa $\{R\}_i$ và $\{R'\}_i$* :

Do dùng chung 1 hệ toạ độ để mô tả tình hình lực và chuyển vị nút của hệ, do giả thiết là lực và chuyển vị tại toạ độ j là cùng chiều nên khi chuyển từ hệ toạ độ địa phương oxyz sang hệ toạ độ chung o'x'y'z' thì quan hệ giữa $\{R\}_i$ và $\{R'\}_i$ cũng có dạng tương tự như quan hệ giữa $\{q\}_i$ và $\{q'\}_i$

$\{R\}_i = [T]_i.\{R'\}_i \rightarrow \{R'\}_i = [T]^{-1}_i.\{R\}_i$ (2-16)

- *Phương trình cân bằng:*

+ *Trong mặt phẳng oxyz:*

Theo (2-9): $\{R\}_i = [K]_i\{q\}$

Theo (2-12): $\{q\}_i = [T]_i.\{q'\}_i$

Theo (2-16): $\{R'\}_i = [T]^{-1}_i.\{R\}_i$

+ *Vậy trong mặt phẳng o'x'y'z':*

$\{R'\}_i = [T]^{-1}_i.[K]_i.[T]_i.\{q'\}_i$ (2-17)

Với [T] là ma trận trực giao: $[T]^{-1}_i = [T]^T_i$ thay vào (2-17):

$\{R'\}_i = [T]^T_i.[K]_i.[T]_i.\{q'\}_i$

Hay: $\{R'\}_i = [K']_i.\{q'\}_i$ (2-18)

Với $[K']_i = [T]^T_i.[K]_i.[T]_i$ (2-19)

Mặt khác theo (2-16): $\{R'\}_i = [T]^T_i.\{R\}_i$ (2-20)

3.3.2. Phương trình cân bằng của toàn bộ kết cấu (phương trình cân bằng tại nút)

- Giả sử hệ được rời rạc hoá thành m phần tử.
- Viết phương trình cân bằng cho từng phần tử trong hệ toạ độ chung o'x'y'z' theo (2-18).
- Gộp các phương trình cân bằng của từng phần tử cho cả hệ gồm m PTHH.

$\{R'\}_1 = [K']_1 \qquad \{q\}_1$

$\{R'\}_1 = \qquad [K']_1 \qquad \{q\}_2$

………………..

$\{R'\}_m = \qquad [K']_m\{q\}_m$

Viết gộp lại ta có:

$$\begin{bmatrix} \{R'\}_1 \\ \{R'\}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \{R'\}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K']_1 & [0] & [0] & \cdot & [0] \\ [0] & [K']_2 & [0] & \cdot & [0] \\ [0] & [0] & . & \cdot & [0] \\ [0] & [0] & . & \cdot & [0] \\ [0] & [0] & . & \cdot & [0] \\ [0] & [0] & . & \cdot & [K']_m \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \{q'\}_1 \\ \{q'\}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \{q'\}_m \end{bmatrix}$$

Hay: $\{R'\} = [K'].\{q'\}$ (2-21)

Trong đó:

$\{R'\} = \{\{R'\}_1, \{R'\}_2, ..., \{R'\}_m\}$

$\{q'\} = \{\{q'\}_1, \{q'\}_2, ..., \{q'\}_m\}$ (2-22)

$[K'] = \lceil [K']_1, [K']_2, ..., [K']_m \rceil$

Nhận xét:

- Khi viết phương trình (2-21), một số phần tử của được viết lặp lại một số lần (ví dụ: tại nút k có r phần tử quy tụ tại nút thì trong {R'} = [K'].{q'} có r phương trình thể hiện điều kiện cân bằng tại nút k, các thành phần q_j' và R_j' được viết lặp lại r lần).

- Gộp r phương trình này thành 1 phương trình chung, ta viết lại phương trình cân bằng của toàn hệ ở dạng:

$\{\overline{R}\} = [\overline{K}].\{\overline{q}\}$ (2-23)

Trong đó các phần tử q_j' của $\{\overline{q}\}$ chỉ được viết 1 lần tại nút k.

+ Quan hệ giữa $\{\overline{q}\}$ và {q'}:

Biểu diễn {q'} theo $\{\overline{q}\}$ thông qua ma trận [H]:

$\{q'\} = [H].\{\overline{q}\}$ (2-24)

Trong đó [H] là ma trận mà cấu trúc của nó phụ thuộc vào dạng kết cấu.

+ Quan hệ giữa $\{\overline{R}\}$ và {R'}:

$\{\overline{R}\} = [H]^T.\{R'\}$ (2-25)

+ Quan hệ giữa $\{\overline{K}\}$ và {K'}:

Từ (2-25): $\{\overline{R}\} = [H]^T.\{R'\}$

Theo (2-18): $\{R'\}_i = [K']_i.\{q'\}_i$

Và theo (2-24): $\{q'\} = [H].\{\overline{q}\}$

Vậy suy ra: $\{\overline{R}\} = [H]^T.[K'].[H].\{\overline{q}\} = [\overline{K}].\{\overline{q}\}$

Vậy: $\{\overline{R}\} = [\overline{K}].\{\overline{q}\}$ với $[\overline{K}] = [H]^T.[K'].[H]$ (2-26)

Ghi chú:

- Véctơ $\{\overline{R}\}$ là véctơ lực nút đã quy đổi (tải trọng tác dụng bên trong phần tử được quy đổi thành các lực nút tương đương đặt tại nút).

Nếu tại nút của hệ còn có các ngoại lực tập trung, ta xếp thành các véc tơ ngoại lực tập trung $\{\overline{R_P}\}$ đặt tại nút của hệ trong hệ toạ độ chung và cộng thêm vào các véc tơ theo biểu thức:

$\{\overline{R}\} := \{\overline{R}\} + \{\overline{R}_P\}$ (2-27)

- Phương trình (2-23) biểu thị sự cân bằng của kết cấu vẫn còn là vật thể trong không gian (chưa có điều kiện biên). Ta phải đưa điều kiện biên của kết cấu thực và với các liên kết ngăn cản chuyển vị ($\overline{q}_j$=0) tại một số nút của hệ. Lúc này phương trình (2-23) có dạng:

$\{R*\} = [K*]\{q*\}$ (2-28)

{R*}, {q*} được suy ra từ $\{\overline{R}\}$, $\{\overline{q}\}$ bằng cách loại bỏ phần tử $\overline{R}_j$, $\overline{q}_j$ tương ứng với toạ độ (liên kết) thứ j có $\overline{q}_j$=0.

[K*] được suy ra từ $[\overline{K}]$ bằng cách loại bỏ hàng thứ j và cột thứ j tương ứng với liên kết thứ j có $\overline{q}_j$=0.

- Giải phương trình $\{q*\} = [K*]^{-1}.\{R*\}$ (2-29)

Tóm lại ta có các phương trình cân bằng sau:

1. PTCB cho PTHH thứ i, trong hệ toạ độ địa phương thông qua $[T]_i$:

$$\{R\}_i = [K]_i\{q\}_i$$

2. PTCB cho PTHH thứ i, trong hệ toạ độ chung:

$$\{R'\}_i = [K']_i.\{q'\}_i$$

3. PTCB cho các PTHH, trong hệ toạ độ chung thông qua [H]:

$$\{R'\} = [K']\{q'\}$$

4. PTCB cho kết cấu còn tự do (kể đến điều kiện liên kết giữa các phần tử, nhưng chưa có điều kiện biên), trong hệ toạ độ chung:

$$\{\overline{R}\} = [\overline{K}]\{\overline{q}\}$$

5. PTCB cho kết cấu cụ thể (đã có điều kiện biên), trong hệ toạ độ chung:

$$\{R*\} = [K*]\{q*\}$$

3.4. Xác định ma trận độ cứng $[K]_i$ của PTHH thứ i

- Đối với phần tử có hình dạng bất kỳ, ma trận độ cứng $[K]_i$ của PTHH thứ i được xác định theo (2-9):

$$[K]_i = \int_v [D]_i^T [E_0]_i [D]_i dv$$

Trong đó:

$[E_0]_i$ là ma trận đàn hồi của vật liệu, xác định tuỳ theo trạng thái ƯS - BD trong phần tử.

+ Trong bài toán không gian (bài toán 3 chiều):

$$[E_0] = \frac{E}{2(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix} 2(1-\mu) & 2\mu & 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 2\mu & 2(1-\mu) & 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 2\mu & 2\mu & 2(1-\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\mu \end{bmatrix} \quad (2\text{-}30)$$

+ Trong bài toán trạng thái ứng suất phẳng (bài toán 2 chiều):

$$[E_0]=\frac{E}{2(1-\mu^2)}\begin{bmatrix}2 & 2\mu & 0\\ 2\mu & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1-\mu\end{bmatrix} \quad (2\text{-}31)$$

+ Trong bài toán trạng thái biến dạng phẳng (bài toán 2 chiều):

$$[E_0]=\frac{E}{2(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix}2(1-\mu) & 2\mu & 0\\ 2\mu & 2(1-\mu) & 0\\ 0 & 0 & 1-2\mu\end{bmatrix} \quad (2\text{-}32)$$

+ Trong bài toán thanh (bài toán 1 chiều):

$[E_0]=E$ (2-33)

$[D]_i$ được xác định từ quan hệ: $\{\varepsilon\}=[D].\{q\}$

Mặt khác từ công thức Cauchy: $\{\varepsilon\}=[\nabla].\{U\}$

Theo (2-4) ta có $\{U\}=[B]\{q\}$

Vậy: $\{\varepsilon\}=[\nabla].[B].\{q\}=[D].\{q\} \rightarrow [D]=[\nabla].[B]$

Ma trận toán tử Laplace [∇] lấy như sau:

+ Trong bài toán không gian:

$$[\nabla]=\begin{bmatrix}\frac{\delta}{\delta x} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\delta}{\delta y} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\delta}{\delta z}\\ \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta x} & 0\\ 0 & \frac{\delta}{\delta z} & \frac{\delta}{\delta y}\\ \frac{\delta}{\delta z} & 0 & \frac{\delta}{\delta x}\end{bmatrix} \quad (2\text{-}34)$$

+ Trong bài toán phẳng:

$$[\nabla]=\begin{bmatrix}\frac{\delta}{\delta x} & 0\\ 0 & \frac{\delta}{\delta y}\\ \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta x}\end{bmatrix} \quad (2\text{-}35)$$

3.5. Quy đổi lực phân bố thành lực tập trung tương đương đặt tại nút của PTHH

Lực tác dụng ngoài lực đặt tại nút còn có:

- Lực phân bố theo thể tích có cường độ:

$$\{p_v\}=\{p_{vx}\ \ p_{vy}\ \ p_{vz}\} \quad (2\text{-}36)$$

- Lực phân bố theo diện tích có cường độ:

$$\{p_s\}=\{p_{sx}\ \ p_{sy}\ \ p_{sz}\} \quad (2\text{-}37)$$

Véc tơ lực nút:

$$\{R_v\} = \int_v [B]^T \{p_v\} dv \quad \text{và} \quad \{R_s\} = \int_s [B]^T \{p_s\} ds$$

Đối với phần tử thứ i, véc tơ lực nút tương đương là:

$$\{R\}_i = \{R_v\}_i + \{R_s\}_i$$

3.6. Trình tự giải bài toán theo phương pháp PTHH

Để giải bài toán dùng phương pháp PTHH theo mô hình chuyển vị ta cần thực hiện theo các bước như sau:

- *Bước 1* (bước chuẩn bị):

1. Chọn loại và dạng PTHH thích hợp với kết cấu đã cho.
2. Rời rạc hoá kết cấu thành lưới các PTHH.
3. Xác định trường chuyển vị {U} thích hợp của PTHH.

- *Bước 2*: Xét PTHH thứ i trong hệ toạ độ địa phương

4. Xác định $[K]_i$

$$[K]_i = \int_v [D]_i^T [E_0]_i [D]_i dv$$

+ Từ trường chuyển vị $\{U\} = [B]\{q\} \rightarrow$ [B]

+ Xác định $[D] = [\nabla].[B]$, [∇] tính theo (2-34), (2-35).

+ Xác định $\{E_0\}$ theo (2-30), (2-31), (2-32), (2-33).

5. Xác định $[R]_i$

$$\{R\}_i = \{R_v\}_i + \{R_s\}_i \text{ Với } \{R_v\} = \int_v [B]^T \{p_v\} dv \text{ và } \{R_s\} = \int_s [B]^T \{p_s\} ds$$

- *Bước 3*: Xét PTHH thứ i trong hệ toạ độ chung

6. Xác định $[K']_i$

$[K']_i = [T]^T_i.[K]_i.[T]_i$

$[T]_i$ xác định theo (2-12), (2-13), (2-14), (2-15).

7. Xác định $\{R'\}_i$

$\{R'\}_i = [T]^T_i.\{R\}_i$

$[T]_i$ xác định theo (2-12), (2-13), (2-14), (2-15).

- *Bước 4*: Xét toàn bộ kết cấu trong hệ toạ độ chung

8. Xác định [K']

$$[K'] = \lceil [K']_1, [K']_2, \ldots\ldots\ldots, [K']_m \rceil$$

9. Xác định {R'}

$\{R'\} = \{\{R'\}_1\ \{R'\}_2 \ldots\ldots \{R'\}_m\}$

10. Xác định $[\overline{K}]$

$$[\overline{K}] = [H]^T.[K'].[H]$$

11. Xác định $[\overline{R}]$

$\{\overline{R}\} = [H]^T.\{R'\}$

$\{\overline{R}\} := \{\overline{R}\} + \{\overline{R}_P\}$

12. Xác định [K*]

13. Xác định [R*]

14. Giải phương trình xác định được {q*}.

15. Xác định nội lực, ứng suất.

3.7. Phương pháp số mã để lập ma trận độ cứng [$\overline{K}$] và véctơ lực nút {$\overline{R}$} của toàn bộ hệ

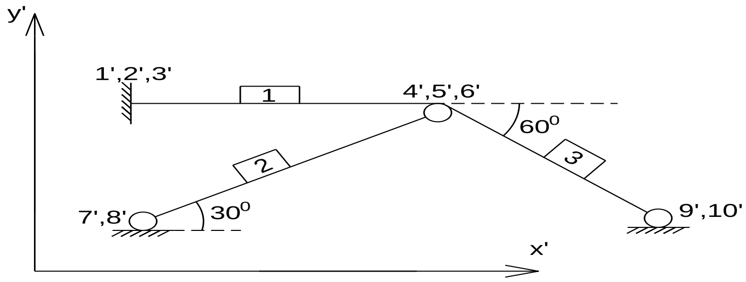
Hệ phương trình cơ bản để giải bài toán theo phương pháp phần tử hữu hạn có dạng:

$$\{R^*\} = [K^*]\{q^*\}$$

Phương trình này được suy ra từ phương trình: $\{\overline{R}\} = [\overline{K}]\{\overline{q}\}$

Trong đó véctơ chuyển vị nút {$\overline{q}$} gồm các phần tử được sắp xếp theo thứ tự chuyển vị nút cả toàn bộ kết cấu. Véctơ lực nút {$\overline{R}$} và ma trận độ cứng [$\overline{K}$] có các hàng và các cột cũng được sắp xếp theo thứ tự tương ứng với chuyển vị nút.

Ví dụ: Xét khung như hình vẽ:



Véctơ chuyển vị nút {$\overline{q}$} có dạng:

{$\overline{q}$}= {q'_1 q'_2 q'_3 q'_4 q'_5 q'_6 q'_7 q'_8 q'_9 q'_{10}}

Véctơ lực nút {$\overline{R}$} có dạng:

{$\overline{R}$}= {R'_1 R'_2 R'_3 R'_4 R'_5 R'_6 R'_7 R'_8 R'_9 R'_{10}}

Và ma trận độ cứng [$\overline{K}$] có các hàng và các cột cũng được sắp xếp theo thứ tự tương ứng với chuyển vị nút.

Ma trận [$\overline{K}$] và {$\overline{R}$} có được từ [K'] và {R'}, xuất phát từ ma trận độ cứng $[K']_i$ và ma trận lực nút $\{R'\}_i$ của phần tử thứ i trong kết cấu ở hệ toạ độ chung.

Phương trình cân bằng của PTHH thứ i trong hệ toạ độ chung là:

$$\{R'\}_i = [K']_i.\{q'\}_i$$

Trong đó là véctơ chuyển vị nút có các thành phần đã được đánh số và sắp xếp theo thứ tự đã được quy định cho phần tử.

Ví dụ:

- Phần tử 1 là thanh đầu ngàm đầu ngàm: $\{q'\}_1$= {q'_1 q'_2 q'_3 q'_4 q'_5 q'_6}$_1$
- Phần tử 3 là thanh đầu ngàm đầu khớp: $\{q'\}_3$= {q'_1 q'_2 q'_3 q'_4 q'_5}$_3$

- Phần tử 2 là thanh đầu khớp đầu khớp: $\{q'\}_2 = \{q'_1 \;\; q'_2 \;\; q'_3 \;\; q'_4\}_2$

Ma trận độ cứng $[K']_i$ và ma trận lực nút $\{R'\}_i$ cũng được đánh số và sắp xếp theo thứ tự tương ứng với $\{q'\}_i$.

Trong khi đó, ở véctơ chuyển vị nút của toàn bộ kết cấu , véctơ chuyển vị nút lại có các thành phần được đánh số và sắp xếp theo thứ tự.

- Phần tử 1: $\{q'\}_1 = \{q'_1 \;\; q'_2 \;\; q'_3 \;\; q'_4 \;\; q'_5 \;\; q'_6\}_1$
- Phần tử 3: $\{q'\}_3 = \{q'_4 \;\; q'_5 \;\; q'_6 \;\; q'_7 \;\; q'_9 \;\; q'_{10}\}_3$
- Phần tử 2: $\{q'\}_2 = \{q'_7 \;\; q'_8 \;\; q'_4 \;\; q'_5\}_1$

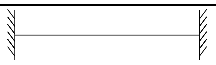
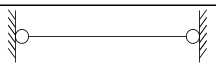
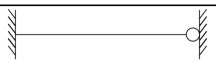
Do việc đánh số khác nhau về toạ độ chung của toàn bộ kết cấu và toạ độ chung của riêng phần tử nên ta cần lưu ý sắp xếp đúng vị trí của phần tử trong [K'] và {R'} vào $[\overline{K}]$ và $\{\overline{R}\}$. Việc sắp xếp này có thể được thực hiện nhờ phương pháp số mã như sau:

Mỗi chuyển vị nút và lực nút được đặt tên bởi 2 số mã:

1. *Số mã địa phương* là số mã từ 1 đến f (f là tổng số chuyển vị nút của mỗi phần tử – tổng số tọa độ chung của riêng phần tử). Nếu các phần tử có f chuyển vị nút như nhau thì số mã địa phương của chúng là giống nhau.

2. *Số mã chung* là số mã từ 1 đến n (n là tổng số chuyển vị nút của toàn bộ kết cấu – tổng số toạ độ chung của toàn bộ kết cấu).

Ta có thể xem bảng dưới đây để thấy rõ được cách đánh số mã cho chuyển vị nút của từng phần tử theo số mã địa phương và số mã chung của hệ cho trên hình vẽ:

PT	**Loại**	**γ°**	**Số mã địa phương**						**Số mã chung**					
1		0°	1'	2'	3'	4'	5'	6'	1'	2'	3'	4'	5'	6'
2		30°	1'	2'	3'	4'			7'	8'	4'	5'		
3		-60°	1'	2'	3'	4'	5'		4'	5'	6'	9'	10'	

Theo cách đánh số mã trên, ta có thể lập được ma trận $[\overline{K}]$ và $\{\overline{R}\}$ một cách dễ dàng hơn mà không phải thông qua ma trận [H].

Dựa vào ý nghĩa vật lý của các phần tử trong ma trận $[\overline{K}]$ và $\{\overline{R}\}$, ta có thể xác định các phần tử đó theo công thức sau:

$$\left[\overline{K}_{rj}\right] = \sum_i K'^{(i)}_{rj} \quad \text{và} \quad \left[\overline{R}_j\right] = \sum_i R'^{(i)}_j$$

Ở đây các chỉ số r và j được lấy theo số mã chung trong ma trận $[\overline{K}]$ và $\{\overline{R}\}$, và trong các ma trận $[K']_i$ và $\{R'\}_i$ của các phần tử thứ i.

$$[K']_1=\begin{array}{c|cccccc|l}
 & 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' & \textit{chung}\\ \hline
1' & * & * & * & * & * & * & 1'\\
2' & & * & * & * & * & * & 2'\\
3' & & & * & * & * & * & 3'\ \ K'^{(1)}_{45}\\
4' & & (\text{đx}) & & * & * & * & 4'\\
5' & & & & & * & * & 5'\\
6' & & & & & & * & 6'\\ \hline
\textit{địa phương} & 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' &
\end{array}
\qquad
[K']_2=\begin{array}{c|cccc|l}
 & 7' & 8' & 4' & 5' & \textit{chung}\\ \hline
1' & * & * & * & * & 7'\\
2' & & * & * & * & 8'\ \ K'^{(2)}_{45}\\
3' & (\text{đx}) & & * & * & 4'\\
4' & & & & * & 5'\\ \hline
\textit{địa phương} & 1' & 2' & 3' & 4' &
\end{array}$$

$$[K']_3=\begin{array}{c|ccccc|l}
 & 4' & 5' & 6' & 9' & 10' & \textit{chung}\\ \hline
1' & * & * & * & * & * & 4'\ \ K'^{(3)}_{45}\\
2' & & * & * & * & * & 5'\\
3' & & & * & * & * & 6'\\
4' & & (\text{đx}) & & * & * & 9'\\
5' & & & & & * & 10'\\ \hline
\textit{địa phương} & 1' & 2' & 3' & 4' & 5' &
\end{array}
\qquad
[\bar{K}]=\begin{array}{cccccccccc|l}
1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' & 7' & 8' & 9' & 10' & \textit{chung}\\ \hline
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & 1'\\
 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & 2'\\
 & & * & * & * & * & * & * & * & * & 3'\\
 & & & * & * & * & * & * & * & * & 4'\ \ \bar{K}_{45}\\
 & & & & * & * & * & * & * & * & 5'\\
 & & & & & * & * & * & * & * & 6'\\
 & & & (\text{đx}) & & & * & * & * & * & 7'\\
 & & & & & & & * & * & * & 8'\\
 & & & & & & & & * & * & 9'\\
 & & & & & & & & & * & 10'
\end{array}$$

Chẳng hạn phần tử [$\bar{K}_{45}$] (*hàng 4, cột 5*) của ma trận [$\bar{K}$] được xác định là tổng của các phần tử K'_{45} của ma trận của $[K']_1$ phần tử 1 (*hàng 4, cột 5*), $[K']_2$ của phần tử 2 (*hàng 3, cột 4*) và $[K']_3$ của phần tử 3 (*hàng 1, cột 2*).

$$K_{45} = K'^{(1)}_{45} + K'^{(2)}_{45} + K'^{(3)}_{45}$$

Thực hiện tương tự đối với các phần tử trong ma trận $\{\bar{R}\}$:

$$\{R'\}_1=\begin{array}{c}1'\ \ 2'\ \ 3'\ \ 4'\ \ 5'\ \ 6'\ \ \textit{chung}\\ \{\ *\ \ *\ \ *\ \ \boxed{*\ \ *\ \ *}\ \}\\ 1'\ \ 2'\ \ 3'\ \ 4'\ \ 5'\ \ 6'\ \ \textit{địa phương}\end{array}
\qquad
\{R'\}_2=\begin{array}{c}7'\ \ 8'\ \ 4'\ \ 5'\ \ \textit{chung}\\ \{\ *\ \ *\ \ \boxed{*\ \ *}\ \}\\ 1'\ \ 2'\ \ 3'\ \ 4'\ \ \textit{địa phương}\end{array}$$

$$\{R'\}_3=\begin{array}{c}4'\ \ 5'\ \ 6'\ \ 9'\ \ 10'\ \textit{chung}\\ \{\ \boxed{*\ \ *\ \ *}\ \ *\ \ *\ \}\\ 1'\ \ 2'\ \ 3'\ \ 4'\ \ 5'\ \ \textit{địa phương}\end{array}
\qquad
\{\bar{R}\}=\begin{array}{c}1'\ \ 2'\ \ 3'\ \ 4'\ \ 5'\ \ 6'\ \ 7'\ \ 8'\ \ 9'\ \ 10'\ \textit{chung}\\ \{\ *\ \ *\ \ *\ \ \boxed{*\ \ *\ \ *}\ \ *\ \ *\ \ *\ \ *\ \}\end{array}$$

Chẳng hạn: Phần tử $\overline{R_4}$ của ma trận $\{\bar{R}\}$ (*hàng 4*) là tổng của các phần tử R'_4 của các ma trận $\{R'\}_1$ của phần tử 1 (*hàng 4*), $\{R'\}_2$ của phần tử 2 (*hàng 3*) và $\{R'\}_3$ của phần tử 3 (*hàng 1*).

Như vậy, xuất phát từ các ma trận ta có thể lập được ma trận [$\bar{K}$] và { $\bar{R}$ } một cách dễ dàng hơn mà không phải thông qua ma trận [H]. Sau đó ta lập ma trận {R*} và [K*] bằng cách suy ra từ $\{\overline{R}\}$ với việc loại bỏ phần tử $\overline{R}_j$ tương ứng với toạ độ (liên kết) thứ j có $\overline{q}_j$=0 và từ $[\overline{K}]$ với việc loại bỏ hàng thứ j và cột thứ j tương ứng với liên kết thứ j có $\overline{q}_j$=0.

Ta thấy có những phần tử của $[\overline{K}]$ và $\{\overline{R}\}$ không tham gia vào [K*] và {R*}, cũng đồng nghĩa là có những phần tử của $[K']_i$ và $\{R'\}_i$ không tham gia vào {R*} và [K*]. Vì vậy ta chỉ tính những phần tử của $[K']_i$ và $\{R'\}_i$ tham gia vào việc xác định {R*} và [K*]. Trên các ma trận $[K']_i$ và $\{R'\}_i$,các phần tử cần được tính toán trong ô vuông có đường viền đứt nét.

Để tiện cho việc tính toán ta cũng có thể sắp xếp các phần tử thành các ma trận:

Trong đó $\{\overline{R}_P*\}$là véc tơ ngoại lực tập trung đặt tại nút được sắp xếp theo số mã chung tham gia vào tính $[K^*]_i$ và $\{R^*\}_i$ là những ma trận có các phần tử được lấy từ ma trận $[K']_i$ và $\{R'\}_i$ của PTHH thứ i, được sắp xếp theo số mã chung tham gia vào tính [K*] và {R*}.

Phần câu hỏi và bài tập chương 3:

- Đính kèm trong file giao nhiệm vụ và bài tập cho sinh viên.

Chương bốn
TÍNH HỆ THANH THEO PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Mục đích:

- Vận dụng kiến thức ở chương ba để tính hệ thanh theo phương pháp phần tử hữu hạn.

Yêu cầu:

- Sinh viên thiết lập ma trận độ cứng [K]i của PTHH thứ i trong hệ toạ độ địa phương; Thiết lập ma trận độ cứng [K']i của PTHH thứ i trong hệ toạ độ chung.
- Sinh viên thiết lập ma trận lực nút {R}i tại các nút của PTHH thứ i trong hệ toạ độ địa phương; Thiết lập ma trận lực nút {R'}i tại các nút của PTHH thứ i trong hệ toạ độ chung.
- Sinh viên có thể tính toán xác định nội lực của PTHH thứ i trong hệ toạ độ địa phương.
- Sử dụng kiến thức chương ở chương 3 để giải hệ kết cấu, từ đó xác định được chuyển vị, nội lực.

4.1. Phần tử thanh 2 đầu ngàm

Ta sẽ lần lượt nghiên cứu các nội dung sau:

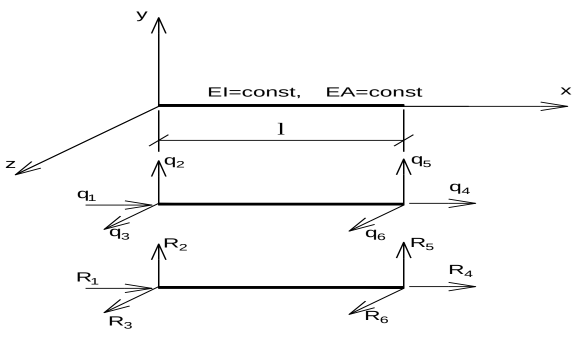
- Ma trận độ cứng $[K]_i$ của PTHH thứ i trong hệ toạ độ địa phương
- Ma trận độ cứng $[K']_i$ của PTHH thứ i trong hệ toạ độ chung.
- Véc tơ lực nút $\{R\}_i$ tại các nút của PTHH thứ i trong hệ toạ độ địa phương.
- Véc tơ lực nút $\{R'\}_i$ tại các nút của PTHH thứ i trong hệ toạ độ chung.
- Xác định nội lực.

Xét trường hợp PTHH là một thanh có liên kết ngàm ở 2 đầu, có chiều dài l, có độ cứng EI và EA là không đổi dọc theo chiều dài thanh.

Trong mỗi thanh tải trọng tác dụng gồm:

- Tải trọng phân bố dọc trục có cường độ t_x, tải trọng phân bố vuông góc với trụccó cường độ $p_{(x)}$.

- Tải trọng tập trung dọc trục T, tải trọng tập trung vuông góc với trục P và mômen tập trung M.



4.1.1. Ma trận độ cứng $[K]_i$ của PTHH thứ i trong hệ toạ độ địa phương

- *Phương trình cân bằng*:

Phương trình cân bằng của PTHH thứ i trong hệ toạ độ địa phương:

$$\{R\}_i = [K]_i.\{q\}_i$$

$$\{R\}_i = \{R_1 \;\; R_2 \;\; R_3 \;\; R_4 \;\; R_5 \;\; R_6\}_i \qquad (3\text{-}1)$$

$$\{q\}_i = \{q_1 \;\; q_2 \;\; q_3 \;\; q_4 \;\; q_5 \;\; q_6\}_i$$

Trong đó, theo (2-11): $[K]_i = \int_v [D]_i^T [E_0]_i [D]_i dv$

Để thiết lập được ma trận $[K]_i$ ta cần xác định ma trận $[D]_i$. Do đó theo ta giả thiết hàm chuyển vị.

- *Hàm chuyển vị*:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u_{(x)} \\ v_{(x)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{(x)} = \alpha_1 + \alpha_2 x \\ v_{(x)} = \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 x^3 \end{Bmatrix} \qquad (3\text{-}2)$$

Điều kiện biên để xác định $\alpha_{1,2,3,4,5,6}$ là:

$$\begin{cases} u_{(0)} = q_1 \\ u_{(l)} = q_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = q_1 \\ \alpha_2 = \dfrac{q_4 - q_1}{l} \end{cases} \qquad (3\text{-}3)$$

$$\begin{cases} v_{(0)} = q_2 \\ v'_{(0)} = q_3 \\ v_{(l)} = q_5 \\ v'_{(l)} = q_6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_3 = q_2 \\ \alpha_4 = q_3 \\ \alpha_5 = \dfrac{-3q_2 - 2lq_3 + 3q_5 - lq_6}{l^2} \\ \alpha_5 = \dfrac{2q_2 + lq_3 - 2q_5 + lq_6}{l^3} \end{cases}$$

Thay giá trị của $\alpha_{1,2}$ vào biểu thức của u(x) và $\alpha_{3,4,5,6}$ vào biểu thức của v(x):

$$\begin{cases} u_{(x)} = (1 - \dfrac{x}{l}).q_1 + \dfrac{x}{l}.q_4 = H_{1(x)}.q_1 + H_{4(x)}.q_4 \\ v_{(x)} = H_{2(x)}.q_2 + H_{3(x)}.q_3 + H_{5(x)}.q_5 + H_{6(x)}.q_6 \end{cases} \qquad (3\text{-}4)$$

Trong đó:

$$H_{1(x)} = 1 - \frac{x}{l}; \quad H_{2(x)} = 1 - 3.\frac{x^2}{l^2} + 2.\frac{x^3}{l^3}; \quad H_{3(x)} = x - 2.\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \qquad (3\text{-}5)$$

$$H_{4(x)} = \frac{x}{l}; \quad H_{5(x)} = 3.\frac{x^2}{l^2} - 2.\frac{x^3}{l^3}; \quad H_{6(x)} = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}$$

Hàm chuyển vị được viết dưới dạng ma trận:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u_{(x)} \\ v_{(x)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{1(x)} & 0 & 0 & H_{4(x)} & 0 & 0 \\ 0 & H_{2(x)} & H_{3(x)} & 0 & H_{5(x)} & H_{6(x)} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} = [B]_i.\{q\}_1 \qquad (3\text{-}6)$$

Với:

$$[B]_i = \begin{bmatrix} B_u \\ B_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{1(x)} & 0 & 0 & H_{4(x)} & 0 & 0 \\ 0 & H_{2(x)} & H_{3(x)} & 0 & H_{5(x)} & H_{6(x)} \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}7)$$

- *Xác định [D]ᵢ*:

Từ : $\{\varepsilon\} = [D].\{q\}$

Đối với thanh ta có: $\{\varepsilon\} = \varepsilon_x$ (bài toán uốn 1 chiều).

Vậy: $[D]_i = [H'_{1(x)} \quad -y.H''_{2(x)} \quad -y.H''_{3(x)} \quad H'_{4(x)} \quad -y.H''_{5(x)} \quad -y.H''_{6(x)}]$ (3-8)

Với:

$$H'_{1(x)} = -\frac{1}{l}; \quad H''_{2(x)} = -\frac{6}{l^2} + 12.\frac{x}{l^3}; \quad H''_{3(x)} = -\frac{4}{l} + 6.\frac{x}{l^2} \qquad (3\text{-}9)$$

$$H'_{4(x)} = \frac{1}{l}; \quad H''_{5(x)} = \frac{6}{l^2} - 12.\frac{x}{l^3}; \quad H''_{6(x)} = -\frac{2}{l} + 6.\frac{x}{l^2}$$

- *Xác định $[E_0]_i$*:

Vì $\{\varepsilon\} = \varepsilon_x$ nên $[E]_0$=E (bài toán uốn 1 chiều).

- *Xác định $[K]_i$*:

Ma trận độ cứng được xác định theo công thức:

$$[K]_i = \int_v [D]_i^T [E_0]_i [D]_i \, dv$$

Sau khi thay vào và tính tích phân, ta được ma trận độ cứng có dạng:

$$[K]_i = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & \frac{-EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{-12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{-6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{-EF}{l} & 0 & 0 & \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{l^3} & \frac{-6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{-6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{-6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

Viết gọn lại:

$$[K]_i = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 & -S & 0 & 0 \\ & D & C & 0 & -D & C \\ & & A & 0 & -C & B \\ & & & S & 0 & 0 \\ \text{đối xứng} & & & & D & -C \\ & & & & & A \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}10)$$

Với ký hiệu:

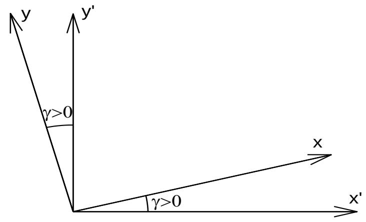
$$A = \frac{4EI}{l}; \quad B = \frac{2EI}{l}; \quad C = \frac{6EI}{l^2}; \quad D = \frac{12EI}{l^3}; \quad S = \frac{EF}{l} \qquad (3\text{-}11)$$

4.1.2. Ma trận độ cứng $[K]_i$ của PTHH thứ i trong hệ toạ độ chung

Áp dụng công thức: $[K']_i = [T]^T_i.[K]_i.[T]_i$

Trong đó $[K]_i$ xác định theo (3-10).

$[T]_i$ được xác định theo (2-14), (2-15) với $C_x=\cos\gamma_i$, $C_y=\sin\gamma_i$.



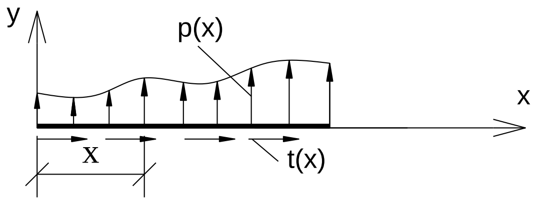
Kết quả thực hiện phép nhân:

$$[K']_i=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & -B_2 & -A_1 & -A_2 & -B_2 \\ & A_3 & B_1 & -A_2 & -A_3 & B_1 \\ & & A & B_2 & -B_1 & B \\ & & & A_1 & A_2 & B_2 \\ & \text{đối xứng} & & & A_3 & -B_1 \\ & & & & & A \end{bmatrix}$$

Với ký hiệu:

$$\begin{cases} A_1 = D.C_y^2 + S.C_x^2 \\ A_2 = C_x.C_y.(S-D) \\ A_3 = D.C_x^2 + S.C_y^2 \\ B_1 = C.C_x \\ B_2 = C.C_y \end{cases} \qquad (3\text{-}12)$$

4.1.3. Véc tơ lực nút $\{R\}_i$ tương đương trong hệ toạ độ địa phương



- *Tải trọng phân bố*:

Tải trọng tác dụng trong thanh được quy ước dấu:

+ Lực $p_{(x)}>0$ khi hướng lên (theo chiều trục y).

+ Lực $t_{(x)}>0$ khi hướng sang phải (theo chiều trục x).

Theo:

$$\{R\}_i = \{R_s\}_i = \int_0^l [B]_i^T.\{p_s\}_i dx$$

Ở đây, lực p_s được hiểu là lực phân bố trên thanh có bề rộng bằng đơn vị.

$$\{R\}_i = \left\{ \frac{tl}{2} \quad \frac{pl}{2} \quad \frac{pl^2}{12} \quad \frac{tl}{2} \quad \frac{pl}{2} \quad -\frac{pl^2}{12} \right\} \qquad (3\text{-}13)$$

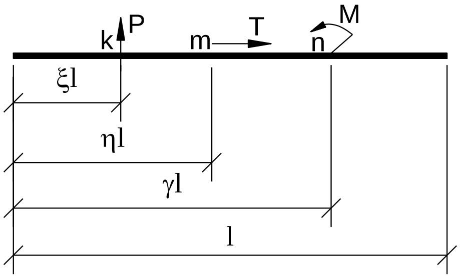
- *Ngoại lực tập trung*:

Lực P tại điểm k, lực T tại điểm m, mômen M tại điểm n. Tải trọng tác dụng trong thanh được quy ước dấu.

+ Lực P>0 khi hướng lên trên (theo chiều trục y).

+ Lực T>0 khi hướng sang phải (theo chiều trục x).

+ Mômen M>0 khi M quay ngược chiều kim đồng hồ.



Khi tải trọng tập trung đặt tại giữa thanh:

$$\{R\}_i = \left\{ \frac{T}{2} \quad \frac{P}{2} - \frac{3M}{2l} \quad \frac{Pl}{8} - \frac{M}{4} \quad \frac{T}{2} \quad \frac{P}{2} + \frac{3M}{2l} \quad -\frac{Pl}{8} - \frac{M}{4} \right\} \qquad (3\text{-}14)$$

4.1.4. Véc tơ lực nút {R'}ᵢ tương đương trong hệ toạ độ chung

Theo: $\{R'\}_i = [T]^T.\{R\}_i$

Vậy:

$$[R']_i = \begin{bmatrix} R'_1 \\ R'_2 \\ R'_3 \\ R'_4 \\ R'_5 \\ R'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & -C_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_y & C_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_x & -C_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x.R_1 - C_y.R_2 \\ C_y.R_1 + C_x.R_2 \\ R_3 \\ C_x.R_4 - C_y.R_5 \\ C_y.R_4 + C_x.R_5 \\ R_6 \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}15)$$

Ở đây:

R_1, R_2, R_3 và R_4, R_5, R_6 là các thành phần lực nút tương đương trong hệ toạ độ địa phương tại đầu trái và đầu phải của PTHH thứ i.

R'_1, R'_2, R'_3 và R'_4, R'_5, R'_6 là các thành phần lực nút tương đương trong hệ toạ độ chung tại đầu trái và đầu phải của PTHH thứ i.

4.1.5. Xác định nội lực

Nội lưc trong toàn bộ kết cấu được ghép từ nội lực của từng phần tử. Do đó ta nghiên cứu cách xác định nội lực trong từng PTHH thứ i.

Sau khi lập các ma trận ta xác định được véc tơ chuyển vị {q*} từ phương trình cân bằng của toàn bộ kết cấu: $\{q^*\}=[K^*]^{-1}.\{R^*\}$

- *Lập véctơ {q'}ᵢ*:

Từ các phần tử q'_j của {q*}, ta lấy ra các phần tử thích hợp theo số mã chung, sắp xếp chúng vào véctơ chuyển vị $\{q'\}_i$ cho từng PTHH thứ i ứng với các chuyển vị nút của PTHH thứ i trong hệ toạ độ chung rồi ký hiệu lại các chuyển vị nút này theo số mã địa phương:

$$\{q'\}_i = \{q'_1 \quad q'_2 \quad q'_3 \quad q'_4 \quad q'_5 \quad q'_6\} \qquad (3\text{-}16)$$

- Xác định véctơ lực nút $\{R_q\}_i$ do riêng các chuyển nút tại hai đầu phần tử thứ i gây ra:

Nhờ ma trận chuyển toạ độ $[T]_i$ của PTHH thứ i, ta xác định được véc tơ chuyển vị $\{q\}_i$ cho PTHH thứ i trong hệ toạ địa phương theo biểu thức:

$\{q\}_i = [T]_i.\{q'\}_i$

Ký hiệu $\{R_q\}_i = \{R_q^1 \quad R_q^2 \quad R_q^3 \quad R_q^4 \quad R_q^5 \quad R_q^6\}$ (3-17)

là véctơ lực nút của PTHH thứ i trong hệ toạ độ địa phương do riêng các chuyển vị nút tại hai đầu phần tử thứ i gây ra, thì $\{R_q\}_i$ được xác định theo công thức đã biết:

$\{R_q\}_i = [K]_i.\{q\}_i = [K]_i.[T]_i.\{q'\}_i$

ở đây:

Các phần tử $q'_1, q'_2, q'_3, q'_4, q'_5, q'_6$ của $\{q'\}i$ được lấy từ các phần tử thích hợp của $\{q^*\}$ theo

$[T]_i$ được xác định theo (2-14), (2-15) có chứa C_x, C_y.

$[K]_i$ được xác định theo (3-10) có chứa A, B, C, D, S.

Sau khi nhận ta được:

$$\{R_q\}_i = \begin{bmatrix} R_q^1 \\ R_q^2 \\ R_q^3 \\ R_q^4 \\ R_q^5 \\ R_q^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1.q'_{14} + N_2.q'_{25} \\ -Q_2.q'_{14} + Q_1.q'_{25} + C.(q'_3 + q'_6) \\ -B_2.q'_{14} + B_1.q'_{25} + A.q'_3 + B.q'_6 \\ -N_1.q'_{14} - N_2.q'_{25} = -R_q^1 \\ Q_2.q'_{14} - Q_1.q'_{25} - C.(q'_3 + q'_6) = -R_q^2 \\ -B_2.q'_{14} + B_1.q'_{25} + B.q'_3 + A.q'_6 \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}18)$$

$N_1 = S.C_x$; $B_1 = C.C_x$; $Q_1 = D.C_x$; $q'_{14} = q'_1 - q'_4$

$N_2 = S.C_y$; $B_2 = C.C_y$; $Q_2 = D.C_y$; $q'_{25} = q'_2 - q'_5$ (3-19)

- Xác định véctơ lực nút tổng cộng $\{R_q\}_i$:

Tại hai đầu PTHH thứ i đã có sẵn các véctơ lực nút quy đổi $\{R\}_i$ do tải trọng tác dụng trên phần tử gây ra trong hệ toạ độ địa phương, được xác định theo các công thức

$\{R\}_i = \{R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad R_4 \quad R_5 \quad R_6\}$ (3-20)

Ký hiệu $\{R_P\}_i = \{R_P^1 \quad R_P^2 \quad R_P^3 \quad R_P^4 \quad R_P^5 \quad R_P^6\}$ (3-21)

là véctơ lực nút tổng cộng của PTHH thứ i trong hệ toạ độ địa phương thì $\{R_P\}_i$ sẽ là tổng của hai véctơ $\{R_q\}_i$ và $\{R\}_i$ nhưng $\{R\}_i$ lấy dấu ngược lại:

$$\{R_P\}_i = \{R_q\}_i - \{R\}_i = \begin{bmatrix} R_P^1 \\ R_P^2 \\ R_P^3 \\ R_P^4 \\ R_P^5 \\ R_P^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_q^1 - R_1 \\ R_q^2 - R_2 \\ R_q^3 - R_3 \\ R_q^4 - R_4 \\ R_q^5 - R_5 \\ R_q^6 - R_6 \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}22)$$

- Biểu đồ nội lực toàn hệ:

Để vẽ biểu đồ nội lực cho toàn hệ, ta vẽ biểu đồ nội lực cho từng phàn tử dựa trên kết quả nhận được $\{R_P\}_i$. Ta có thể quy ước dấu của mômen uốn, lực cắt và lực dọc cho phần tử thanh thứ i như hình vẽ:

$$\{R_P\}_i = \begin{bmatrix} R_P^1 \\ R_P^2 \\ R_P^3 \\ R_P^4 \\ R_P^5 \\ R_P^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -N^{tr} \\ Q^{tr} \\ -M^{tr} \\ N^{ph} \\ -Q^{ph} \\ M^{ph} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} N^{tr} \\ Q^{tr} \\ M^{tr} \\ N^{ph} \\ Q^{ph} \\ M^{ph} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 - R_q^1 \\ R_q^2 - R_2 \\ R_3 - R_q^3 \\ R_q^4 - R_4 \\ R_5 - R_q^5 \\ R_q^6 - R_6 \end{bmatrix} \quad \text{hay} \quad \begin{bmatrix} M^{tr} \\ M^{ph} \\ Q^{tr} \\ Q^{ph} \\ N^{tr} \\ N^{ph} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_3 - R_q^3 \\ R_q^6 - R_6 \\ R_q^2 - R_2 \\ R_5 - R_q^5 \\ R_1 - R_q^1 \\ R_q^4 - R_4 \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}23)$$

Trong đó: M^{tr}, Q^{tr}, N^{tr} và M^{ph}, Q^{ph}, N^{ph} lần lượt là mômen, lực cắt, lực dọc tại đầu trái và đầu phải của PTHH thứ i.

Như vậy muốn xác định nội lực của PTHH thứ, ta cần xác định véctơ chuyển vị $\{q'\}_i$ theo và véctơ lực nút $\{R'_q\}_i$ theo, xác định nội lực M^{tr}, Q^{tr}, N^{tr} và M^{ph}, Q^{ph}, N^{ph} theo

Chú ý:

Sau khi vẽ biểu đồ mômen cho phần tử thứ i theo $\{R_P\}_i$, ta cần treo thêm vào biểu đồ mômen do tải trọng tác dụng trong phần tử gây ra khi coi phần tử thanh thứ i là một dầm đơn giản.

4.2. Phần tử thanh đầu ngàm đầu khớp

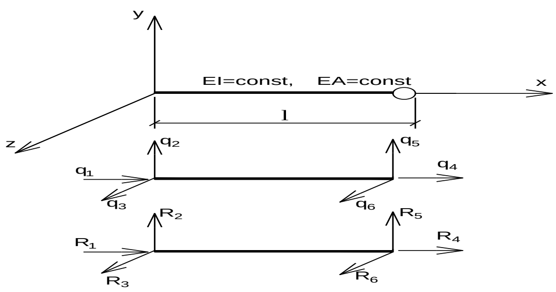
Ta sẽ lần lượt nghiên cứu các nội dung sau:

- Ma trận độ cứng $[K]_i$ của PTHH thứ i trong hệ toạ độ địa phương
- Ma trận độ cứng $[K']_i$ của PTHH thứ i trong hệ toạ độ chung.
- Véc tơ lực nút $\{R\}_i$ tại các nút của PTHH thứ i trong hệ toạ độ địa phương.
- Véc tơ lực nút $\{R'\}_i$ tại các nút của PTHH thứ i trong hệ toạ độ chung.
- Xác định nội lực.

Xét trường hợp PTHH là một thanh có liên kết ngàm ở đầu trái và khớp ở đầu phải, có chiều dài l, có độ cứng EI và EA là không đổi dọc theo chiều dài thanh.

Trong mỗi thanh tải trọng tác dụng gồm:

- Tải trọng phân bố dọc trục có cường độ t_x, tải trọng phân bố vuông góc với truccó cường độ $p_{(x)}$.
- Tải trọng tập trung dọc trục T, tải trọng tập trung vuông góc với trục P và mômen tập trung M.



4.2.1. Ma trận độ cứng $[K]_i$ của PTHH thứ i trong hệ toạ độ địa phương

- *Phương trình cân bằng*:

Phương trình cân bằng của PTHH thứ i trong hệ toạ độ địa phương:

$\{R\}_i = [K]_i.\{q\}_i$

$\{R\}_i = \{R_1 \;\; R_2 \;\; R_3 \;\; R_4 \;\; R_5 \;\; R_6\}_i$ (3-24)

$\{q\}_i = \{q_1 \;\; q_2 \;\; q_3 \;\; q_4 \;\; q_5 \;\; q_6\}_i$

Trong đó, theo (2-11): $[K]_i = \int_v [D]_i^T [E_0]_i [D]_i dv$

Để thiết lập được ma trận $[K]_i$ ta cần xác định ma trận $[D]_i$. Do đó theo ta giả thiết hàm chuyển vị.

- *Hàm chuyển vị*:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u_{(x)} \\ v_{(x)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{(x)} = \alpha_1 + \alpha_2 x \\ v_{(x)} = \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 x^3 \end{Bmatrix} \qquad (3\text{-}25)$$

Điều kiện biên để xác định $\alpha_{1,2,3,4,5,6}$ là:

$$\begin{cases} u_{(0)} = q_1 \\ u_{(l)} = q_4 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} v_{(0)} = q_2 \\ v'_{(0)} = q_3 \\ v_{(l)} = q_5 \\ v'_{(l)} = 0 \end{cases} \qquad (3\text{-}26)$$

Thay giá trị của $\alpha_{1,2}$ vào biểu thức của u(x) và $\alpha_{3,4,5,6}$ vào biểu thức của v(x), hàm chuyển vị được viết dưới dạng ma trận:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u_{(x)} \\ v_{(x)} \end{Bmatrix} = [B]_i.\{q\}_1 \qquad (3\text{-}27)$$

Với:

$$[B] = \begin{bmatrix} B_u \\ B_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{1(x)} & 0 & 0 & H_{4(x)} & 0 & 0 \\ 0 & H^*_{2(x)} & H^*_{3(x)} & 0 & H^*_{5(x)} & H^*_{6(x)} \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}28)$$

Trong đó:

$$H_{1(x)} = 1 - \frac{x}{l}; \quad H^*_{2(x)} = 1 - \frac{3x^2}{2l^2} + \frac{x^3}{2l^3}; \quad H^*_{3(x)} = x - \frac{3x^2}{2l} + \frac{x^3}{2l^2} \qquad (3\text{-}29)$$

$$H_{4(x)} = \frac{x}{l}; \quad H^*_{5(x)} = \frac{3x^2}{2l^2} - \frac{x^3}{2l^3}; \quad H^*_{6(x)} = 0$$

- *Xác định $[D]_i$*:

Từ : $\{\varepsilon\} = [D].\{q\}$

Đối với thanh ta có: $\{\varepsilon\} = \varepsilon_x$ (bài toán uốn 1 chiều).

Vậy: $[D]_i = [H'_{1(x)} \;\; -y.H^{*''}_{2(x)} \;\; -y.H^{*''}_{3(x)} \;\; H'_{4(x)} \;\; -y.H^{*''}_{5(x)} \;\; -y.H^{*''}_{6(x)}]$ (3-30)

Với:

$$H'_{1(x)} = -\frac{1}{l}; \quad H^{*''}_{2(x)} = -3 + 3.\frac{x}{l^3}; \quad H^{*''}_{3(x)} = -\frac{3}{l} + 3.\frac{x}{l^2} \qquad (3\text{-}31)$$

$$H'_{4(x)} = \frac{1}{l}; \qquad H^{*"}_{5(x)} = \frac{3}{l^2} - 3.\frac{x}{l^3}; \qquad H^{*"}_{6(x)} = 0$$

- *Xác định [E0]i*:

Vì $\{\varepsilon\} = \varepsilon_x$ nên $[E]_0$=E (bài toán uốn 1 chiều).

- *Xác định [K]i*:

Ma trận độ cứng được xác định theo công thức:

$$[K]_i = \int_v [D]_i^T [E_0]_i [D]_i dv$$

Sau khi thay vào và tính tích phân, ta được ma trận độ cứng có dạng:

$$[K]_i = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{-EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & 0 & \frac{-3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & \frac{-3EI}{l^2} & 0 \\ \frac{-EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3EI}{l^3} & \frac{-3EI}{l^2} & 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Viết gọn lại:

$$[K]_i = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 & -S & 0 & 0 \\ & D_3 & D_2 & 0 & -D_3 & 0 \\ & & D_1 & 0 & -D_2 & 0 \\ & & & S & 0 & 0 \\ & \text{đối xứng} & & & D_3 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}32)$$

Với ký hiệu:

$$D_1 = \frac{3EI}{l}; \quad D_2 = \frac{3EI}{l^2}; \quad D_3 = \frac{3EI}{l^3}; \quad S = \frac{EA}{l} \qquad (3\text{-}33)$$

4.1.2. Ma trận độ cứng $[K]_i$ của PTHH thứ i trong hệ toạ độ chung

Áp dụng công thức: $[K']_i = [T]^T_i.[K]_i.[T]_i$

Trong đó $[K]_i$ xác định theo (3-32).

$[T]_i$ được xác định theo (2-14), (2-15) với $C_x=\cos\gamma_i$, $C_y=\sin\gamma_i$.

Kết quả thực hiện phép nhân:

$$[K']_i = \begin{bmatrix} D_4 & D_5 & -D_7 & -D_4 & -D_5 & 0 \\ & D_6 & D_8 & -D_5 & -D_6 & 0 \\ & & D_1 & D_7 & -D_8 & 0 \\ & & & D_4 & D_5 & 0 \\ & \text{đối xứng} & & & D_6 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Với ký hiệu:

$$\begin{cases} A_1 = D.C_y^2 + S.C_x^2 \\ A_2 = C_x.C_y.(S-D) \\ A_3 = D.C_x^2 + S.C_y^2 \\ B_1 = C.C_x \\ B_2 = C.C_y \end{cases} \qquad (3\text{-}34)$$

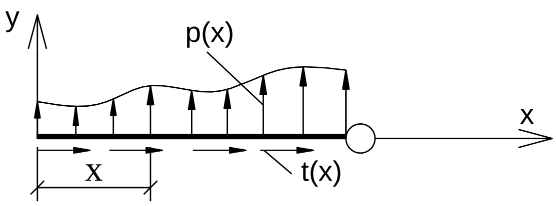
c. Véc tơ lực nút {R}i tương đương trong hệ toạ độ địa phương

- *Tải trọng phân bố*:

Tải trọng tác dụng trong thanh được quy ước dấu:

+ Lực $p_{(x)}>0$ khi hướng lên (theo chiều trục y).

+ Lực $t_{(x)}>0$ khi hướng sang phải (theo chiều trục x).



Theo:

$$\{R\}_i = \{R_s\}_i = \int_0^l [B]_i^T.\{p_s\}_i dx$$

Ở đây, lực p_s được hiểu là lực phân bố trên thanh có bề rộng bằng đơn vị.

Trường hợp tải trọng phân bố đều: $t_{(x)} = t = const$, $p_{(x)} = p = const$

$$\{R\}_i = \left\{ \frac{tl}{2} \quad \frac{5pl}{8} \quad \frac{pl^2}{8} \quad \frac{tl}{2} \quad \frac{3pl}{8} \quad 0 \right\} \qquad (3\text{-}35)$$

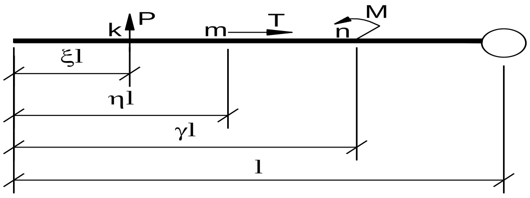
- *Ngoại lực tập trung*:

Lực P tại điểm k, lực T tại điểm m, mômen M tại điểm n. Tải trọng tác dụng trong thanh được quy ước dấu.

+ Lực P>0 khi hướng lên trên (theo chiều trục y).

+ Lực T>0 khi hướng sang phải (theo chiều trục x).

+ Mômen M>0 khi M quay ngược chiều kim đồng hồ.



Khi tải trọng tập trung đặt tại giữa thanh:

$$\{R\}_i = \left\{ \frac{T}{2} \quad \frac{11P}{16} - \frac{9M}{8l} \quad \frac{3Pl}{16} - \frac{M}{8} \quad \frac{T}{2} \quad \frac{5P}{16} + \frac{9M}{8l} \quad 0 \right\} \qquad (3\text{-}36)$$

d. Véc tơ lực nút {R'}i tương đương trong hệ toạ độ chung

Theo: $\{R'\}_i = [T]^T.\{R\}_i$

Vậy:

$$[R']_i=\begin{bmatrix}R'_1\\R'_2\\R'_3\\R'_4\\R'_5\\R'_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_x & -C_y & 0 & 0 & 0 & 0\\C_y & C_x & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & C_x & -C_y & 0\\0 & 0 & 0 & C_y & C_x & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}R_1\\R_2\\R_3\\R_4\\R_5\\R_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_x.R_1-C_y.R_2\\C_y.R_1+C_x.R_2\\R_3\\C_x.R_4-C_y.R_5\\C_y.R_4+C_x.R_5\\R_6\end{bmatrix} \qquad (3\text{-}15)$$

Ở đây:

R_1, R_2, R_3 và R_4, R_5, R_6 là các thành phần lực nút tương đương trong hệ toạ độ địa phương tại đầu trái và đầu phải của PTHH thứ i.

R'_1, R'_2, R'_3 và R'_4, R'_5, R'_6 là các thành phần lực nút tương đương trong hệ toạ độ chung tại đầu trái và đầu phải của PTHH thứ i.

e. Xác định nội lực

Nội lưc trong toàn bộ kết cấu được ghép từ nội lực của từng phần tử. Do đó ta nghiên cứu cách xác định nội lực trong từng PTHH thứ i.

Sau khi lập các ma trận ta xác định được véc tơ chuyển vị {q*} từ phương trình cân bằng của toàn bộ kết cấu: $\{q^*\}=[K^*]^{-1}.\{R^*\}$

- *Lập véctơ $\{q'\}_i$:*

Từ các phần tử q'_j của {q*}, ta lấy ra các phần tử thích hợp theo số mã chung, sắp xếp chúng vào véctơ chuyển vị $\{q'\}_i$ cho từng PTHH thứ i ứng với các chuyển vị nút của PTHH thứ i trong hệ toạ độ chung rồi ký hiệu lại các chuyển vị nút này theo số mã địa phương:

$$\{q'\}_i = \{q'_1 \quad q'_2 \quad q'_3 \quad q'_4 \quad q'_5 \quad q'_6\} \qquad (3\text{-}37)$$

- *Xác định véctơ lực nút $\{R_q\}_i$* do riêng các chuyển nút tại hai đầu phần tử thứ i gây ra:

Nhờ ma trận chuyển toạ độ $[T]_i$ của PTHH thứ i, ta xác định được véc tơ chuyển vị $\{q\}_i$ cho PTHH thứ i trong hệ toạ địa phương theo biểu thức:

$\{q\}_i = [T]_i.\{q'\}_i$

Ký hiệu $\{R_q\}_i = \{R_q^1 \quad R_q^2 \quad R_q^3 \quad R_q^4 \quad R_q^5 \quad R_q^6\}$ (3-38)

là véctơ lực nút của PTHH thứ i trong hệ toạ độ địa phương do riêng các chuyển vị nút tại hai đầu phần tử thứ i gây ra, thì $\{R_q\}_i$ được xác định theo công thức đã biết:

$\{R_q\}_i = [K]_i.\{q\}_i = [K]_i.[T]_i.\{q'\}_i$

ở đây:

Các phần tử q'_1, q'_2, q'_3, q'_4, q'_5, q'_6 của {q'}i được lấy từ các phần tử thích hợp của {q*} theo

$[T]_i$ được xác định theo (2-14), (2-15) có chứa C_x, C_y.

$[K]_i$ được xác định theo (3-32) có chứa D_1, D_2, D_3, S.

Sau khi nhận ta được:

$$\{R_q\}_i = \begin{bmatrix} R_q^1 \\ R_q^2 \\ R_q^3 \\ R_q^4 \\ R_q^5 \\ R_q^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1.q'_{14}+N_2.q'_{25} \\ -N_4.q'_{14}+N_3.q'_{25}+D_2.q'_3 \\ -D_7.q'_{14}+D_8.q'_{25}+D_1.q'_3 \\ -N_1.q'_{14}-N_2.q'_{25}=-R_q^1 \\ N_4.q'_{14}-N_3.q'_{25}-D_2.q'_3=-R_q^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3\text{-}39)$$

$N_1 = S.C_x$; $N_3 = D_3.C_x$; $D_8 = D_2.C_x$; $q'_{14} = q'_1 - q'_4$

$N_2 = S.C_y$; $N_4 = D_3.C_y$; $D_7 = D_2.C_y$; $q'_{25} = q'_2 - q'_5$ (3-40)

- *Xác định véctơ lực nút tổng cộng $\{R_P\}_i$:*

Tại hai đầu PTHH thứ i đã có sẵn các véctơ lực nút quy đổi $\{R\}_i$ do tải trọng tác dụng trên phần tử gây ra trong hệ toạ độ địa phương, được xác định theo các công thức

$\{R\}_i = \{R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad R_4 \quad R_5 \quad R_6\}$ (3-41)

Ký hiệu $\{R_P\}_i = \{R_P^1 \quad R_P^2 \quad R_P^3 \quad R_P^4 \quad R_P^5 \quad R_P^6\}$ (3-42)

là véctơ lực nút tổng cộng của PTHH thứ i trong hệ toạ độ địa phương thì $\{R_P\}_i$ sẽ là tổng của hai véctơ $\{R_q\}_i$ và $\{R\}_i$ nhưng $\{R\}_i$ lấy dấu ngược lại:

$$\{R_P\}_i = \{R_q\}_i - \{R\}_i = \begin{bmatrix} R_P^1 \\ R_P^2 \\ R_P^3 \\ R_P^4 \\ R_P^5 \\ R_P^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_q^1 - R_1 \\ R_q^2 - R_2 \\ R_q^3 - R_3 \\ R_q^4 - R_4 \\ R_q^5 - R_5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3\text{-}43)$$

- *Biểu đồ nội lực toàn hệ:*

Để vẽ biểu đồ nội lực cho toàn hệ, ta vẽ biểu đồ nội lực cho từng phần tử dựa trên kết quả nhận được $\{R_P\}_i$. Ta có thể quy ước dấu của mômen uốn, lực cắt và lực dọc cho phần tử thanh thứ i như hình vẽ:

$$\{R_P\}_i = \begin{bmatrix} R_P^1 \\ R_P^2 \\ R_P^3 \\ R_P^4 \\ R_P^5 \\ R_P^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -N^{tr} \\ Q^{tr} \\ -M^{tr} \\ N^{ph} \\ -Q^{ph} \\ M^{ph} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} N^{tr} \\ Q^{tr} \\ M^{tr} \\ N^{ph} \\ Q^{ph} \\ M^{ph} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 - R_q^1 \\ R_q^2 - R_2 \\ R_3 - R_q^3 \\ R_q^4 - R_4 \\ R_5 - R_q^5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{hay} \quad \begin{bmatrix} M^{tr} \\ M^{ph} \\ Q^{tr} \\ Q^{ph} \\ N^{tr} \\ N^{ph} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_3 - R_q^3 \\ 0 \\ R_q^2 - R_2 \\ R_5 - R_q^5 \\ R_1 - R_q^1 \\ R_q^4 - R_4 \end{bmatrix} \quad (3\text{-}44)$$

Trong đó: M^{tr}, Q^{tr}, N^{tr} và M^{ph}, Q^{ph}, N^{ph} lần lượt là mômen, lực cắt, lực dọc tại đầu trái và đầu phải của PTHH thứ i.

Như vậy muốn xác định nội lực của PTHH thứ i, ta cần xác định véctơ chuyển vị $\{q'\}_i$ theo và véctơ lực nút $\{R'_q\}_i$ theo, xác định nội lực M^{tr}, Q^{tr}, N^{tr} và M^{ph}, Q^{ph}, N^{ph} theo

Chú ý:

Sau khi vẽ biểu đồ mômen cho phần tử thứ i theo $\{R_P\}_i$, ta cần treo thêm vào biểu đồ mômen do tải trọng tác dụng trong phần tử gây ra khi coi phần tử thanh thứ i là một dầm đơn giản.

4.3. Phần tử thanh đầu khớp đầu ngàm

Ta sẽ lần lượt nghiên cứu các nội dung sau:

- Ma trận độ cứng $[K]_i$ của PTHH thứ i trong hệ toạ độ địa phương
- Ma trận độ cứng $[K']_i$ của PTHH thứ i trong hệ toạ độ chung.
- Véc tơ lực nút $\{R\}_i$ tại các nút của PTHH thứ i trong hệ toạ độ địa phương.
- Véc tơ lực nút $\{R'\}_i$ tại các nút của PTHH thứ i trong hệ toạ độ chung.
- Xác định nội lực.

Xét trường hợp PTHH là một thanh có liên kết khớp ở đầu trái và ngàm ở đầu phải, có chiều dài l, có độ cứng EI và EA là không đổi dọc theo chiều dài thanh.

Trong mỗi thanh tải trọng tác dụng gồm:

- Tải trọng phân bố dọc trục có cường độ t_x, tải trọng phân bố vuông góc với trụccó cường độ $p_{(x)}$.
- Tải trọng tập trung dọc trục T, tải trọng tập trung vuông góc với trục P và mômen tập trung M.

4.3.1. Ma trận độ cứng $[K]_i$ của PTHH thứ i trong hệ toạ độ địa phương

- *Phương trình cân bằng*:

Phương trình cân bằng của PTHH thứ i trong hệ toạ độ địa phương:

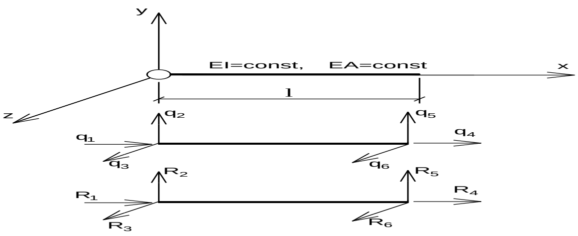
$$\{R\}_i = [K]_i . \{q\}_i$$

$$\{R\}_i = \{R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad R_4 \quad R_5 \quad R_6\}_i \qquad (3\text{-}45)$$

$$\{q\}_i = \{q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6\}_i$$

Trong đó, theo (2-11): $[K]_i = \int\limits_v [D]_i^T [E_0]_i [D]_i dv$

Để thiết lập được ma trận $[K]_i$ ta cần xác định ma trận $[D]_i$. Do đó theo ta giả thiết hàm chuyển vị.



- *Hàm chuyển vị*:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u_{(x)} \\ v_{(x)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{(x)} = \alpha_1 + \alpha_2 x \\ v_{(x)} = \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 x^3 \end{Bmatrix} \qquad (3\text{-}46)$$

Điều kiện biên để xác định $\alpha_{1,2,3,4,5,6}$ là:

$$\begin{cases} u_{(0)} = q_1 \\ u_{(l)} = q_4 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} v_{(0)} = q_2 \\ v'_{(0)} = 0 \\ v_{(l)} = q_5 \\ v'_{(l)} = q_6 \end{cases} \quad (3\text{-}47)$$

Thay giá trị của $\alpha_{1,2}$ vào biểu thức của u(x) và $\alpha_{3,4,5,6}$ vào biểu thức của v(x), hàm chuyển vị được viết dưới dạng ma trận:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u_{(x)} \\ v_{(x)} \end{Bmatrix} = [B]_i.\{q\}_1$$

Với $$\{B\} = \begin{Bmatrix} B_u \\ B_v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{1(x)} & 0 & 0 & H_{4(x)} & 0 & 0 \\ 0 & H^k_{2(x)} & H^k_{3(x)} & 0 & H^k_{5(x)} & H^k_{6(x)} \end{bmatrix} \quad (3\text{-}48)$$

Trong đó:

$$H_{1(x)} = 1 - \frac{x}{l}; \quad H^k_{2(x)} = 1 - \frac{3x}{2l} + \frac{x^3}{2l^3}; \quad H^k_{3(x)} = 0 \quad (3\text{-}49)$$

$$H_{4(x)} = \frac{x}{l}; \quad H^k_{5(x)} = \frac{3x}{2l} - \frac{x^3}{2l^3}; \quad H^k_{6(x)} = -\frac{x}{2} + \frac{x^3}{2l^2}$$

- *Xác định [D]i*:

Từ : $\{\varepsilon\} = [D].\{q\}$

Đối với thanh ta có: $\{\varepsilon\} = \varepsilon_x$ (bài toán uốn 1 chiều).

Vậy: $$[D]_i = [H'_{1(x)} \quad -y.H^{*''}_{2(x)} \quad -y.H^{*''}_{3(x)} \quad H'_{4(x)} \quad -y.H^{*''}_{5(x)} \quad -y.H^{*''}_{6(x)}] \quad (3\text{-}50)$$

Với:

$$H'_{1(x)} = -\frac{1}{l}; \quad H^{*''}_{2(x)} = 3.\frac{x}{l^3}; \quad H^{*''}_{3(x)} = 0 \quad (3\text{-}51)$$

$$H'_{4(x)} = \frac{1}{l}; \quad H^{*''}_{5(x)} = -3.\frac{x}{l^3}; \quad H^{*''}_{6(x)} = 3.\frac{x}{l^2}$$

- *Xác định [E0]i*:

Vì $\{\varepsilon\} = \varepsilon_x$ nên $[E]_0$=E (bài toán uốn 1 chiều).

- *Xác định [K]i*:

Ma trận độ cứng được xác định theo công thức:

$$[K]_i = \int_v [D]^T_i [E_0]_i [D]_i dv$$

Sau khi thay vào và tính tích phân, ta được ma trận độ cứng có dạng:

$$[K]_i = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{-EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & \frac{-3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3EI}{l^3} & 0 & & \frac{3EI}{l^3} & \frac{-3EI}{l^2} \\ 0 & \frac{3EI}{l^2} & 0 & 0 & \frac{-3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix}$$

Viết gọn lại:

$$[K]_i = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 & -S & 0 & 0 \\ & D_3 & 0 & 0 & -D_3 & D_2 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & S & 0 & 0 \\ \text{đối xứng} & & & & D_3 & -D_2 \\ & & & & & D_1 \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}52)$$

Với ký hiệu:

$$D_1 = \frac{3EI}{l}; \quad D_2 = \frac{3EI}{l^2}; \quad D_3 = \frac{3EI}{l^3}; \quad S = \frac{EA}{l} \qquad (3\text{-}53)$$

4.3.2. Ma trận độ cứng $[K]_i$ của PTHH thứ i trong hệ toạ độ chung

Áp dụng công thức: $[K']_i = [T]^T_i.[K]_i.[T]_i$

Trong đó $[K]_i$ xác định theo (3-52).

$[T]_i$ được xác định theo (2-14), (2-15) với $C_x=\cos\gamma_i$, $C_y=\sin\gamma_i$.

Kết quả thực hiện phép nhân:

$$[K']_i = \begin{bmatrix} D_4 & D_5 & 0 & -D_4 & -D_5 & -D_7 \\ & D_6 & 0 & -D_5 & -D_6 & D_8 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_4 & D_5 & D_7 \\ \text{đối xứng} & & & & D_6 & -D_8 \\ & & & & & D_1 \end{bmatrix}$$

Với ký hiệu:

$$\begin{cases} D_4 = D_3.C_y^2 + S.C_x^2 \\ D_5 = C_x.C_y.(S - D_3) \\ D_6 = D_3.C_x^2 + S.C_y^2 \\ D_7 = D_2.C_y \\ D_8 = D_2.C_x \end{cases} \qquad (3\text{-}54)$$

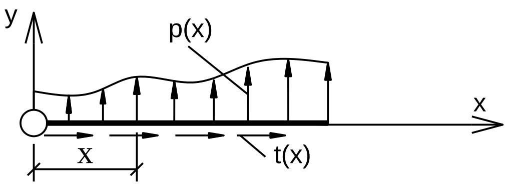
4.3.3. Véc tơ lực nút $\{R\}_i$ tương đương trong hệ toạ độ địa phương

- *Tải trọng phân bố*:

Tải trọng tác dụng trong thanh được quy ước dấu:

+ Lực $p_{(x)}>0$ khi hướng lên (theo chiều trục y).

+ Lực $t_{(x)}>0$ khi hướng sang phải (theo chiều trục x).



Theo:

$$\{R\}_i = \{R_s\}_i = \int_0^l [B]_i^T.\{p_s\}_i dx$$

ở đây, lực p_s được hiểu là lực phân bố trên thanh có bề rộng bằng đơn vị.

Trường hợp tải trọng phân bố đều: $t_{(x)} = t = const$, $p_{(x)} = p = const$

$$\{R\}_i = \begin{Bmatrix} \frac{tl}{2} & \frac{3pl}{8} & 0 & \frac{tl}{2} & \frac{5pl}{8} & -\frac{pl^2}{2} \end{Bmatrix} \qquad (3\text{-}55)$$

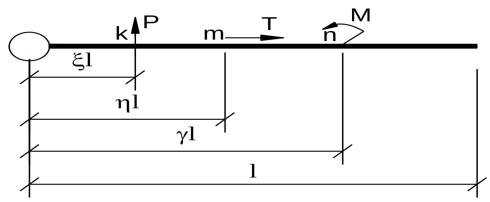
- *Ngoại lực tập trung*:

Lực P tại điểm k, lực T tại điểm m, mômen M tại điểm n. Tải trọng tác dụng trong thanh được quy ước dấu.

+ Lực P>0 khi hướng lên trên (theo chiều trục y).

+ Lực T>0 khi hướng sang phải (theo chiều trục x).

+ Mômen M>0 khi M quay ngược chiều kim đồng hồ.



Khi tải trọng tập trung đặt tại giữa thanh:

$$\{R\}_i = \begin{Bmatrix} \frac{T}{2} & \frac{5P}{16}-\frac{9M}{8l} & 0 & \frac{T}{2} & \frac{11P}{16}+\frac{9M}{8l} & -\frac{3Pl}{16}-\frac{M}{8} \end{Bmatrix} \qquad (3\text{-}56)$$

4.3.4. Véc tơ lực nút {R'}ᵢ tương đương trong hệ toạ độ chung

Theo: $\{R'\}_i = [T]^T.\{R\}_i$

Vậy:

$$[R']_i = \begin{bmatrix} R'_1 \\ R'_2 \\ R'_3 \\ R'_4 \\ R'_5 \\ R'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & -C_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_y & C_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_x & -C_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x.R_1-C_y.R_2 \\ C_y.R_1+C_x.R_2 \\ R_3 \\ C_x.R_4-C_y.R_5 \\ C_y.R_4+C_x.R_5 \\ R_6 \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}15)$$

Ở đây:

R_1, R_2, R_3 và R_4, R_5, R_6 là các thành phần lực nút tương đương trong hệ toạ độ địa phương tại đầu trái và đầu phải của PTHH thứ i.

R'_1, R'_2, R'_3 và R'_4, R'_5, R'_6 là các thành phần lực nút tương đương trong hệ toạ độ chung tại đầu trái và đầu phải của PTHH thứ i.

4.3.5. Xác định nội lực

Nội lưc trong toàn bộ kết cấu được ghép từ nội lực của từng phần tử. Do đó ta nghiên cứu cách xác định nội lực trong từng PTHH thứ i.

Sau khi lập các ma trận ta xác định được véc tơ chuyển vị {q*} từ phương trình cân bằng của toàn bộ kết cấu: $\{q^*\}=[K^*]^{-1}.\{R^*\}$

- *Lập véctơ {q'}ᵢ:*

Từ các phần tử q'_j của {q*}, ta lấy ra các phần tử thích hợp theo số mã chung, sắp xếp chúng vào véctơ chuyển vị $\{q'\}_i$ cho từng PTHH thứ i ứng với các chuyển vị nút của PTHH thứ i trong hệ toạ độ chung rồi ký hiệu lại các chuyển vị nút này theo số mã địa phương:

$$\{q'\}_i = \{q'_1 \quad q'_2 \quad q'_3 \quad q'_4 \quad q'_5 \quad q'_6\} \qquad (3\text{-}57)$$

- *Xác định véctơ lực nút $\{R_q\}_i$* do riêng các chuyển nút tại hai đầu phần tử thứ i gây ra:

Nhờ ma trận chuyển toạ độ $[T]_i$ của PTHH thứ i, ta xác định được véc tơ chuyển vị $\{q\}_i$ cho PTHH thứ i trong hệ toạ địa phương theo biểu thức:

$\{q\}_i = [T]_i.\{q'\}_i$

Ký hiệu $\{R_q\}_i = \{R_q^1 \quad R_q^2 \quad R_q^3 \quad R_q^4 \quad R_q^5 \quad R_q^6\}$ (3-58)

là véctơ lực nút của PTHH thứ i trong hệ toạ độ địa phương do riêng các chuyển vị nút tại hai đầu phần tử thứ i gây ra, thì $\{R_q\}_i$ được xác định theo công thức đã biết:

$\{R_q\}_i = [K]_i.\{q\}_i = [K]_i.[T]_i.\{q'\}_i$

ở đây:

Các phần tử q'_1, q'_2, q'_3, q'_4, q'_5, q'_6 của {q'}i được lấy từ các phần tử thích hợp của {q*} theo

$[T]_i$ được xác định theo (2-14), (2-15) có chứa C_x, C_y.

$[K]_i$ được xác định theo (3-52) có chứa D_1, D_2, D_3, S.

Sau khi nhận ta được:

$$\{R_q\}_i = \begin{bmatrix} R_q^1 \\ R_q^2 \\ R_q^3 \\ R_q^4 \\ R_q^5 \\ R_q^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1.q'_{14}+N_2.q'_{25} \\ -N_4.q'_{14}+N_3.q'_{25}+D_2.q'_6 \\ 0 \\ -N_1.q'_{14}-N_2.q'_{25}=-R_q^1 \\ N_4.q'_{14}-N_3.q'_{25}-D_2.q'_6=-R_q^2 \\ -D_7.q'_{14}+D_8.q'_{25}+D_1.q'_6 \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}59)$$

$N_1 = S.C_x$; $N_3 = D_3.C_x$; $D_8 = D_2.C_x$; $q'_{14} = q'_1-q'_4$

$N_2 = S.C_y$; $N_4 = D_3.C_y$; $D_7 = D_2.C_y$; $q'_{25} = q'_2-q'_5$ (3-60)

- *Xác định véctơ lực nút tổng cộng $\{R_q\}_i$:*

Tại hai đầu PTHH thứ i đã có sẵn các véctơ lực nút quy đổi $\{R\}_i$ do tải trọng tác dụng trên phần tử gây ra trong hệ toạ độ địa phương, được xác định theo các công thức

$\{R\}_i = \{R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad R_4 \quad R_5 \quad R_6\}$ (3-61)

Ký hiệu $\{R_P\}_i = \{R_P^1 \quad R_P^2 \quad R_P^3 \quad R_P^4 \quad R_P^5 \quad R_P^6\}$ (3-62)

là véctơ lực nút tổng cộng của PTHH thứ i trong hệ toạ độ địa phương thì $\{R_P\}_i$ sẽ là tổng của hai véctơ $\{R_q\}_i$ và $\{R\}_i$ nhưng $\{R\}_i$ lấy dấu ngược lại:

$$\{R_P\}_i = \{R_q\}_i - \{R\}_i = \begin{bmatrix} R_P^1 \\ R_P^2 \\ R_P^3 \\ R_P^4 \\ R_P^5 \\ R_P^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_q^1 - R_1 \\ R_q^2 - R_2 \\ 0 \\ R_q^4 - R_4 \\ R_q^5 - R_5 \\ R_q^6 - R_6 \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}63)$$

- Biểu đồ nội lực toàn hệ:

Để vẽ biểu đồ nội lực cho toàn hệ, ta vẽ biểu đồ nội lực cho từng phàn tử dựa trên kết quả nhận được $\{R_P\}_i$. Ta có thể quy ước dấu của mômen uốn, lực cắt và lực dọc cho phần tử thanh thứ i như hình vẽ:

$$\{R_P\}_i = \begin{bmatrix} R_P^1 \\ R_P^2 \\ R_P^3 \\ R_P^4 \\ R_P^5 \\ R_P^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -N^{tr} \\ Q^{tr} \\ -M^{tr} \\ N^{ph} \\ -Q^{ph} \\ M^{ph} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} N^{tr} \\ Q^{tr} \\ M^{tr} \\ N^{ph} \\ Q^{ph} \\ M^{ph} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 - R_q^1 \\ R_q^2 - R_2 \\ 0 \\ R_q^4 - R_4 \\ R_5 - R_q^5 \\ R_q^6 - R_6 \end{bmatrix} \quad \text{hay} \quad \begin{bmatrix} M^{tr} \\ M^{ph} \\ Q^{tr} \\ Q^{ph} \\ N^{tr} \\ N^{ph} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ R_q^6 - R_6 \\ R_q^2 - R_2 \\ R_5 - R_q^5 \\ R_1 - R_q^1 \\ R_q^4 - R_4 \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}64)$$

Trong đó: M^{tr}, Q^{tr}, N^{tr} và M^{ph}, Q^{ph}, N^{ph} lần lượt là mômen, lực cắt, lực dọc tại đầu trái và đầu phải của PTHH thứ i.

Như vậy muốn xác định nội lực của PTHH thứ, ta cần xác định véctơ chuyển vị $\{q'\}_i$ theo và véctơ lực nút $\{R'_q\}_i$ theo, xác định nội lực M^{tr}, Q^{tr}, N^{tr} và M^{ph}, Q^{ph}, N^{ph} theo

Chú ý:

Sau khi vẽ biểu đồ mômen cho phần tử thứ i theo $\{R_P\}_i$, ta cần treo thêm vào biểu đồ mômen do tải trọng tác dụng trong phần tử gây ra khi coi phần tử thanh thứ i là một dầm đơn giản.

Phần câu hỏi và bài tập chương 4:

- Đính kèm trong file giao nhiệm vụ và bài tập cho sinh viên.

Chương năm
PHẦN MỀM SAP 2000

Mục đích:

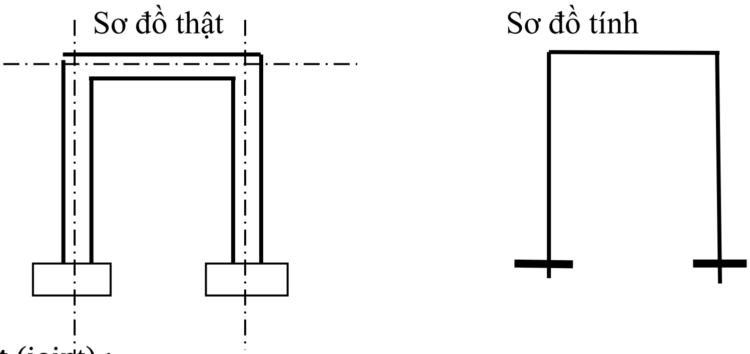
- Hướng dẫn sinh viên sử dụng phần mềm SAP200 để tính toán kết cấu công trình cụ thể. Qua đó sinh viên sẽ biết được một chương trình tính toán kết cấu sẽ làm việc ra sao, từ đó nhận biết được làm thế nào để nhận được kết quả đúng đắn khi sử dụng một chương trình tính toán kết cấu.

Yêu cầu:

- Sinh viên nắm được cấu trúc của chương trình;
- Sinh viên sử dụng chương trình để khai báo các dữ liệu đầu vào cho chương trình tính toán kết cấu SAP2000;
- Sinh viên biết chạy chương trình và cho ra kết quả đầu ra;
- Sinh viên nhận biết được các kết quả sai khi sử dụng chương trình.

5.1 Những khái niệm cơ bản

I. SƠ ĐỒ KẾT CẤU - SƠ ĐỒ TÍNH



1. Nút (joint) :

a) Vị trí của nút :

- Điểm liên kết các phần tử
- Điểm thay đổi về đặc trưng vật liệu , đặc trưng hình học
- Điểm cần xác định chuyển vị & điểm có chuyển vị cưỡng bức
- Điểm xác định điều kiện biên
- Tải trọng tập trung
- Khối lượng tập trung

b) Khai báo nút trong SAP :

- Các nút được tạo tự động khi tạo phân tử
- Số hiệu nút được gán tự động
- Có thể thêm các nút tại các vị trí bất kỳ
- Hệ toạ độ cho nút có thể lấy mặc định theo hệ toạ độ tổng thể hoặc hệ toạ độ riêng của nút
- Nút có các loại hệ toạ độ riêng cho: liên kết, bậc tự do, lực TT, khối lượng TT…

c) Bậc tự do của nút:

- Một nút có 6 bậc tự do: U1, U2, U3 (thẳng); R1, R2, R3 (xoay).

- Chiều dương qui ước của các bậc tự do tương ứng với 6 thành phần trong hệ toạ độ tổng thể

- Bậc tự do tính toán: (DOF=Degree Of Freedom): số bậc tính toán của mỗi nút có thể hạn chế theo từng loại sơ đồ (Analyze - Option Def)

- Bậc tự do nào không có tải trọng, liên kết hay điều kiện biên thì SAP tự động bỏ qua BTD đó

d) Một số đối tượng khác liên quan đến nút:

- Các lực tập trung có thể khai báo tại nút (Joint Load)
- Khai báo khối lượng tập trung tại nút (Mas)

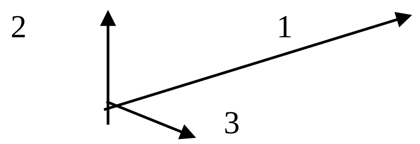
e) Các kết quả phân tích nút:

- Các chuyển vị tại nút
- Các phản lực tại nút
- Các lực liên kết tại nút (Forces)

2. Phần tử

a) Phần tử thanh (Frame)

- Là một đoạn thẳng biểu diễn trục của các cấu kiện, có hai nút ký hiệu **i** và **j**
- Biểu diễn cho các kết cấu dầm, dàn, khung 2D hoặc 3D
- Mỗi thanh có một hệ tọa độ địa phương riêng mô tả cho các đại lượng của tiết diện, tải trọng và kết quả nội lực

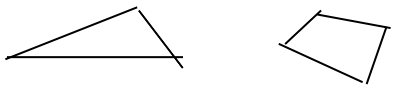


* *Mặc định* : Trục 1 theo trục thanh từ **i** đến **j**, trục 2, 3 tuân theo qui tắc bàn tay phải.

- Khi vẽ các phần tử nên theo trật tự từ trái sang phải , dưới lên trên .
- Thanh có thể có tiết diện không đổi (Primastic) hoặc thay đổi (Non- Primastic)
- Thanh có thể có các loại liên kết khác nhau tại các nút (Release, Rigid)
- Các đặc trưng hình học của phần tử thanh:
    + Section modulus: Mô men chống uốn
    + Plastic modulus : Mô men dẻo
    + Radius of Gyration: Bán kính quán tính
- Các loại tải trọng tác dụng lên PT thanh :
    + TT tập trung trên phần tử
    + TT phân bố (đều hoặc không đều)
    + Trọng lực , TT bản thân
    + TT nhiệt
    + TT US trước
    + TT động (Response Spectrum & Time History)
    + TT di động

b) Phần tử vỏ (Shell)

- Có thể có 3 hoặc 4 nút, là mặt phẳng trung bình của các kết cấu loại tấm, vỏ, bản ... được khai báo qua chiều dày của PT .



- Có các loại : (Type)

+ Membrane (phần tử màng): chỉ chịu kéo (nén), chuyển vị trong mặt phẳng & xoay quanh trục vuông góc với mặt phẳng PT.

+ Plate (phần tử tấm): chỉ chịu uốn (2 chiều trong mặt phẳng & ngoài mặt phẳng), chuyển vị theo phương vuông góc với mặt phẳng.

+ Shell (vỏ phần tử không gian): có thể chịu cả kéo (nén) hoặc uốn.

- Hệ toạ độ riêng của phần tử là: trục 1& 2 nằm trong mặt phẳng, 3 luôn vuông góc với bề mặt phần tử.

+ Theo mặc định, trục 3 hướng ra màn hình hoặc theo phương Z

+ Cũng có thể sử dụng góc phần tử như PT thanh

- Các loại tải trọng tác dụng lên PT thanh :

+ TT tập trung tại các nút

+ TT phân bố đều

+ Trọng lực, TT bản thân

+ TT nhiệt

+ TT áp lực: có hướng vuông góc với PT (surface Presure), TT thay đổi theo các điểm nút (Joint Pattern) dùng cho áp lực nước hoặc tường chắn .

c) Phần tử khối phẳng (Plan, Asolid)

- Có thể 3 đến 9 nút, là mặt phẳng trung bình của phần tử, cho các kết cấu tấm, tường, đê chắn . . .chịu tải trọng đối xứng trục, biến dạng phẳng và ứng suất phẳng.

d) Phần tử khối 3D (solid)

- Có 9 nút, dùng cho các kết cấu khối chịu tải trọng 3 chiều

3. Liên kết

- Liên kết tại giao điểm của các phần tử (nút) LK1) LK1
- Liên kết nối đất (LK2)
- Ràng buộc chuyển vị

a) Liên kết cứng (Restraints): tuyệt đối cứng

* *Đặc điểm* :

- Chuyển vị theo phương các bậc tự do mà nút gán bằng 0 L~~K2~~

tương ứng có các thành phần phản lực của nút đó

- Các thành phần gán Restrain có thể có chuyển vị cưỡng bức
- Liên kết Restrain đảm bảo cho mô hình không bị biến hình . Nếu KC bị biến hình, chương trình sẽ thông báo " Structure to be unstable "

b) Liên kết đàn hồi (Spring)

- Cũng có các thành phần chuyển vị:

+ Translation U1, U2, U3= UX,UY,UZ

+ Rotation R1, R2, R3= RX, RY, RZ

- Độ cứng của gối liên kết có giá trị hữu hạn
- Giá trị chuyển vị của liên kết hữu hạn và phụ thuộc vào gối đàn hồi
- Phản lực của gối là phản lực đàn hồi
- Liên kết cũng phải đảm bảo cho kết cấu không biến hình
- Gối đàn hồi cũng có thể chịu các chuyển vị cưỡng bức & phản lực đàn hồi bằng tổng phản lực của 2 chuyển vị
- Không khai báo liên kết nút Restraints trùng Spring.

c) Ràng buộc chuyển vị

- Để mô hình làm việc đúng tính chất thực của nó và không biến hình
- Có các kiểu Constraints : Body, Plan, Diaphragm . . .
- Giảm số phương trình và khối lượng tính toán

4. Tải trọng :

- Tải trọng tính là tải trọng không thay đổi theo thời gian : TT bản thân , tập trung, phân bố , áp lực , gió . . .
- Tải trọng động : là tải trọng thay đổi theo thời gian : TT động đất, gió động , sóng biển , TT xe di động trên cầu .

II. HỆ TOẠ ĐỘ

- *Hệ toạ độ tổng thể* (global) có thể là hệ toạ độ Đècác (ký hiệu X, Y, Z) hoặc hệ toạ độ cầu, trụ (Z, R, θ)
- *Hệ toạ độ riêng* (Local) ký hiệu 1, 2, 3 cho các loại phần

∗ *Đặc điểm*:

+ Chỉ có một hệ Global nhưng có thể có nhiều hệ toạ độ con, các hệ toạ độ con là so với hệ tọa độ tổng thể .

+ Mỗi hệ toạ độ con có thể có những thuộc tính riêng như hệ lưới, gọi thư viện mẫu, đơn vị và có thể hiện theo từng hệ con .

+ Hệ toạ độ global dùng để vào dữ liệu và hiện kết quả cho nút, lực nút, liên kết, tải trọng tập trung, phân bố, phản lực, chuyển vị gối tựa và chuyển vị nút .

+ Hệ toạ độ riêng dùng để vào dữ liệu cho phần tử, tải trọng trên phần tử, hiện nội lực của phần tử . . .

III. ĐƠN VỊ

Nên chọn đơn vị trước khi thao tác với quá trình thiết lập sơ đồ kết cấu

- Chiều dài: m, cm, mm, inch, feet . . .
- Lực: kgF, KN, T, kip . . .

∗ Đặc điểm :

- Có thể dùng nhiều hệ đơn vị khác nhau cho dữ liệu khác nhau trong một sơ đồ kết cấu.
- Các hệ đơn vị sẽ được chương trình tự động qui về một loại .
- Kết quả đưa ra theo một hệ đơn vị chung (hệ khai báo đầu tiên).

IV. NHỮNG BƯỚC CHÍNH KHI THỰC HIỆN PHÂN TÍCH KẾT CẤU

1. Thiết lập sơ đồ kết cấu

- Xây dựng hệ lưới hoặc chọn thư viện mẫu .
- Khai báo vật liệu
- Khai báo các đặc trưng hình học (tiết diện , chiều dày . . .)
- Vẽ phần tử
- Gán tiết diện cho phần tử
- Khai báo liên kết nối đất
- Khai báo các trường hợp tải trọng
- Gán tải trọng cho phần tử cho từng trường hợp tải trọng
- Tổ hợp tải trọng

2. Phân tích kết cấu

- Chọn kiểu kết cấu (dàn, khung, vỏ . . .)
- Khai báo một số tham số cần thiết (tham số để tính, in hoặc tham số động)
- Thực hiện phân tích (chạy chương trình)

3. Xem kết quả

IV.2 Thiết lập sơ đồ và tính kết cấu hệ thanh

I. TẠO LẬP KẾT CẤU

1. Từ thư viện mẫu hoặc từ hệ lưới

Trong SAP2000 có một hệ thống thư viện mẫu phong phú để tạo sẵn các kết cấu hệ thanh,vỏ . . .

Để tạo ra các kết cấu này, người sử dụng chọn loại sơ đồ và sau đó cung cấp các giá trị cho một số tham số cụ thể mà sơ đồ đòi hỏi. Tuỳ theo các dữ liệu này có thể có các dạng kết cấu khác nhau .

2. Khai báo vật liệu: *Define → Material*

- Có 3 loại vật liệu mẫu là: bê tông, thép và bất kỳ, mặc định luôn lấy là STEEL, nếu giá trị không phù hợp thì phải thay đổi. Để thay đổi các giá trị mặc định về đặc trưng vật liệu của SAP vào Option → Preferences khai báo cho các giá trị sẽ hiện đối với Steel-Concrete-Aluminum, hoặc *Frame/Cable → Frame Property Modifier* thay đổi cho các nhóm mới khai báo.

3. Khai báo các loại tiết diện: *Define → Frame/Cable → Section*

- Khai báo các tiết diện trong SAP2000 có thể dùng một trong các kiểu :

+ Lấy các tiết diện có sẵn trong các tệp thư viện của SAP: *Define →Frame/Cable → Section → Import Wide Flange* (đối với thép , có thể theo chuẩn của Mỹ-AISC, Canada-CISC, Anh . . .) bằng cách chọn các tệp *.pro sau đó chọn kiểu thép (thép góc, hình chữ L,T . . .) trong trường hợp này không phải khai báo kích thước tiết diện .

+ Chọn một trong số các tiết diện có hình dạng thông dụng SAP đã có sẵn như tiết diện chữ nhật, tròn,T ,U ,C . . .(*đối với bê tông*), trong trường hợp này chỉ cần khai báo một số kích thước tối thiểu như chiều cao, rộng . . .mà SAP yêu cầu. Tuỳ theo kích thước đưa vào mà có các dạng hình học khác nhau. Để khai báo cho các tiết diện này vào: *Define →Frame/Cable → Section →Rectangular*

+ Khai báo một tiết diện bất kỳ không có sẵn trong SAP (dùng chức năng *User trong Choose property Type Add*), người dùng phải tính sẵn và đưa vào các giá trị đặc trưng Tiết diện như diện tích ,mômen quán tính . . . (A , I22, I33, J . . .)

+ Người dùng cũng có thể tạo ra thư viện riêng cho mình với các loại tiết diện mới.

4. Vẽ phần tử: *Draw → Draw Frame /Cable*

Để chọn chức năng vẽ, có thể gọi lệnh từ thanh menu hoặc từ biểu tượng trên thanh công cụ :

- Có thể vẽ phần tử thông thường hoặc vẽ nhanh (Quick Draw)
- Nên thống nhất hướng của các phần tử trong quá trình vẽ (từ dưới lên trên và từ trái qua phải)
- Tận dụng các chức năng biến đổi đối tượng như **copy, move, delete, device, replicate . . .** trong quá trình tạo phần tử .

• Để có thể hiện được các sơ đồ hình học của kết cấu đã tạo, dùng các chức năng:

- 3D View (hiện các hình vẽ không gian)
- 2D XY , XZ . . . (hiện từng mặt phẳng)
- Nếu có hệ lưới, có thể di chuyển mặt phẳng theo các dòng lưới ↑ ↓
- Để xem kết cấu theo một số thông số cài đặt dùng *View → Set Display Option*

Ví dụ cho hiện kết cấu với tên của phần tử và dạng khối: chọn Frame/Cable > Label và Shade Option (Hình trái)

- Để xem các thông số của phần tử hay nút đang hiện trên màn hình, nhấn vào đối tượng và chuột phải (Hình phải).

5. Gán tiết diện cho phần tử : *Assign → Frame/Cable /Section*

- Chọn các phần tử muốn gán dùng các chức năng của Select
  + Chọn từng phần tử , chọn theo cửa sổ - Pointer/Window
  + Chọn theo đường thẳng đi qua các phần tử - Interxecting Line
  + Chọn theo tên các tiết diện - Section
  + Chọn theo các nhóm (Group) đã khai báo- Group
  + Chọn theo từng mặt phẳng XY (XZ,YZ) Plane
  + Chọn theo tên đối tượng Label
- Mở hộp thoại: *Assign → Frame/Cable /Section*

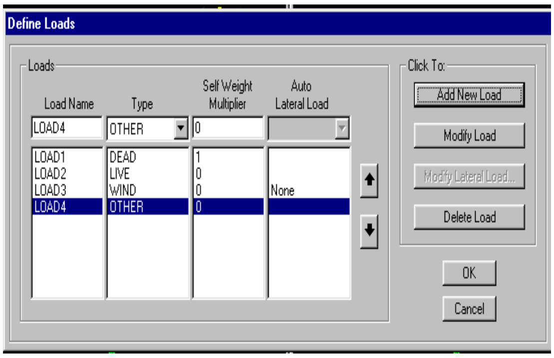
Trong quá trình chọn phần tử có thể kết hợp với Deselect (loại bỏ) để có hiệu quả nhanh hơn .

6. Khai báo liên kết: *Assign → Joint → Restraint*

- Chọn các nút cần gán liên kết nối đất
- Mở hộp thoại Assign → Joint → Restraint, chọn loại liên kết cần gán

7. Khai báo các trường hợp tải trọng: *Define → Loac*

- Trường hợp tải trọng là các phương án tải khác nhau, độc lập để từ đó có thể dễ dàng đưa vào các tổ hợp tải trọng. Trường hợp tải trọng có thể chia nhỏ tuỳ ý , mỗi trường hợp có hệ số riêng đối với tải trọng bản thân (Self Weight Mutiplier) , mặc định của SAP2000 là 1cho loại DEAD .



- Khi tính toán, SAP mặc định sẽ tính và cho kết quả của tất cả các trường hợp TT đã khai báo . Người sử dụng có thể hạn chế số trường hợp cần tính khi chọn tham số trong *Define → Analyse Case* hoặc *Analyse → Set Analyse Case to Run* trước khi phân tích kết cấu.

- **Các bước khai báo một trường hợp tải trọng tĩnh** (*Static load cases*)**:**

Vào Menu Define => Load case. Trong đó:

+ Tên trường hợp tải: **Load Case Name**

+ Kiểu tải trọng (**type**): **Dead** (Tĩnh tải), **Live** (Hoạt tải), **Wind** (Giú), **Snow** (tuyết), **Quake** (Tải trọng tĩnh do động đất) -> Nếu tổ hợp theo TCVN thì các lựa chọn này không quan trọng (Default combination).

+ **Sefl weight**: hệ số tính trọng lượng bản thân cho mọi phần tử có mặt trong kết cấu.

+ **Delete** : Xóa một trường hợp tải trọng.

8. Gán tải trọng cho phần tử của từng trường hợp tải trọng

Muốn thực hiện bước này, các trường hợp tải trọng phải khai báo trước trong Define.

Để gán tải trọng cho các phần tử theo các bước:

- Chọn các phần tử cần gán (chú ý đơn vị)
- Chọn loại tải trọng cần gán, khi gán chú ý :
    + Kiểm tra loại tải trọng
    + Kiểm tra hướng tải trọng (theo trục nào của global hay Local)
    + Kiểm tra trạng thái gán trong check box (add , replace hay delete)
    + Kiểm tra trường hợp của tải trọng đang gán
- Đưa vào giá trị của tải trọng

+ Tải trọng bản thân: chỉ cần khai báo hệ số Mutiplier trong Load Case (chú ý phải khai báo giá trị của trọng lượng bản thân **W** trong Material)

+ Selft -Weight: là hệ số tính tải trọng bản thân áp dụng cho mọi phần tử trong kết cấu. Nó tính trọng lượng bản thân theo phương -Z và luôn có giá trị dương .

+ Gravity: là hệ số tính tải trọng bản thân áp dụng cho một số phần tử nhất định trong kết cấu đã chọn, có thể có các phương X,Y,Z. Nếu theo phương -Z thì có giá trị âm .

Tải trọng tập trung tại nút	Tải trọng tập trung trên phần tử
Assign → Joint Load → Force	*Assign → Frame Load → Joint*

9 . Tổ hợp tải trọng

- Tổ hợp tải trọng là các phương án tải cần tính trong thực tế (đưa ra kết quả) dựa trên các trường hợp tải trọng đã khai báo. Trong mỗi tổ hợp tải trọng có thể xếp nhiều trường hợp tải trọng một lúc và mỗi tổ hợp tải trọng có thể có hệ số tổ hợp khác nhau.

- Cách khai báo tổ hợp :

+ Chọn tên (Name)

+ Chọn phương pháp tổ hợp (Type)

+ Đưa vào hệ số tổ hợp cho từng trường hợp TT tham gia trong tổ hợp này (Define)

- Các đại lượng trong Tổ hợp tải trọng (**Load Combination**):

+ Tên tổ hợp: **Combo name**

+ Kiểu tổ hợp các giá trị: **Type**

Add : tổ hợp theo PP cộng tác dụng.

Enve : Tính tổ hợp Bao nội lực.

SRSS: Căn của tổng bình phương các trường hợp tải trọng;

ABS: Trị tuyệt đối của các trường hợp tải.

Scale factor: Hệ số tổ hợp, tức là hệ số tổ hợp của từng trường hợp tải trọng trong một tổ hợp.

II. PHÂN TÍCH - TÍNH TOÁN

1. Chọn sơ đồ kết cấu: *Analyse → Set Analyse Option*

- Với các loại kết cấu nằm trong các kết cấu mẫu của SAP thì chỉ cần nhấn vào đó, SAP tự động biết đó là loại gì và tự động thay đổi các tham số của *Degree of fredom.*

- Với các loại kết cấu không có trong các kết cấu mẫu của SAP thì phải khai báo các bậc tự do có thể của toàn kết cấu trong các tham số của *Degree of fredom*. Một số loại :

+ Dàn phẳng : chỉ chuyển vị theo Ux và Uz

+ Tấm phẳng : Uz , Rx, Ry

+ Phần tử ASOLID: Ux và Uz   ; SOLID : Ux , Uy và Uz

2. Thực hiện tính toán: *Analyse → Set Analysis Case to Run*

- Để thực hiện tính toán vào *Analyse → Set Analysis Case to Run* để lựa chọn các trường hợp cần tính đó khai bỏo và hiện trong Action (Run) sau đó nhấn **Run now .**

- Các loại phân tích:

+ Phân tích tĩnh: chỉ chịu tải trọng tĩnh

+ Tính dao động riêng: khai báo Mode shape

+ Phân tích P-Delta: bài toán ổn định (chọn P-Delta)

+ Phân tích động:

  + Tải trọng điều hoà (Harmonic steady-state)

  + Phân tích phổ phản ứng (Response spectrum) TT có gia tốc nền

  + Phân tích theo hàm thời gian (Time History): tuyến tính, phi tuyến

- Phân tích với tải trọng di động : bài toán cầu (Moving Load)

- Các kiểu phân tích được thực hiện một lần có thể in riêng hoặc tổ hợp với nhau **Combo**: Là một tổ hợp có thể là cộng tác dụng hoặc bao nội lực của các trường hợp trên hoặc của chính các trường hợp tổ hợp khác.Mỗi kiểu mặc định có thể có nhiều trường hợp khác nhau, ví dụ Load1, Load2…Mode1, Mode2…Combo1, Combo2... hoặc tên do người dùng đặt nhưng kiểu thí không thay đổi được

3. Xem kết quả

Kết quả của SAP2000 có thể xem bằng đồ hoạ (các biểu đồ, hình vẽ) hoặc qua các bảng chữa dữ liệu theo dạng Text hoặc cấu trúc dựa trên các cơ sở dữ liệu của Excel, Access. Để xem kết quả thường thao tác một số phần sau :

- Chọn 1- 4 cửa sổ hiện : Option Window
- Chọn các đối tượng muốn xem kết quả (thông thường là cả kết cấu)
- Chọn trường hợp hoặc tổ hợp muốn xem
- Chọn thành phần dữ liệu vào (các khai báo mô hình) hoặc kết quả đã tính (chuyển vị, nội lực...) muốn hiện
- Các loại tệp tin :

Dữ liệu đầu vào : *. sdb , *.$2k ,

Kết quả : *.out , *.txt, *.xls , *.mdb

a. Đồ hoạ: *Display*

- Xem các đại lượng đưa vào:

+ Xem sơ đồ hình học: *Display → Undeformation Shape*

Xem cho từng trường hợp và từng loại tải trọng trên nút hoặc trên phần tử (có thể hiện cả giá trị).

+ Xem sơ đồ tải trọng tải trọng: *Display -> Show Load Assign*

Hiện các sơ đồ tải trọng mục đích kiểm tra lại các trường hợp tải đã gán. Có thể hiện :

- Hiện cho từng trường hợp tải trọng (Chọn Load name)
- Từng loại tải trọng (Load Type): Joint - Frame - Area - Solid - Link
- Hiện hình dạng và giá trị (Value): có thể hiện tải trọng nút cùng tải trọng trên phần tử
- Hệ toạ độ khi hiện (Coordinate Sys)

+ Xem các đại lượng đã gán cho kết cấu: *Display -> Show Misc Assign*

b. Hiện các kết quả tính

- Hiện các biểu đồ chuyển vị: *Display -> Show deformed Shape*

+ Chọn trường hợp/tổ hợp muốn hiện Case/Combo

+ Chọn tỉ lệ khi hiện Scaling

+ Chọn kiểu hiện:

- Wire: Hiện sơ đồ KC (mờ) và dạng chuyển vị
- Cubic: Chỉ hiện dạng chuyển vị

- Hiện các biểu đồ nội lực: *Display > Show Forces/Stress*

+ Chọn trường hợp-Tổ hợp (Case/Comb)

+ Chọn đối tượng hiện :

- Joint: Reaction-Sprring

- Frame/Cable: 6 thành phần nội lực: Axial - Shear –Moment

- Shell, Planes . . .

+ Scaling: chọn tỷ lệ

+ Option: Fill - tô màu, Show value - sợi -có giá trị

- Hiện các biểu đồ: *Display -> Show Virtual Work Diargam*

- Xem các đường ảnh hưởng: *Display -> Show Influence Lines*