

PGS. TSKH.
NGUYỄN TIẾN KHIÊM

CƠ SỞ
ĐỘNG LỰC HỌC CÔNG TRÌNH
(RÚT GỌN VÀ NÂNG CAO)

(Tài liệu dùng cho cán bộ nghiên cứu và học viên cao học ngành
Cơ học vật rắn, đã được Trung Tâm hợp tác đào tạo và bồi
dưỡng Cơ học, Đại học Quốc gia Hà Nội phê duyệt)

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI, 2003

Mở đầu

Bắt đầu từ năm 1999, Trung tâm Hợp tác đào tạo và bồi dưỡng Cơ học thuộc Đại học quốc gia Hà Nội mời tôi giảng chuyên đề 45 tiết về Động lực học công trình cho học viên cao học ngành Cơ học vật rắn. Với lượng thời gian rất ít phải trình bày một vấn đề rộng lớn, tôi buộc phải lựa chọn nội dung của các bài giảng.

Trước hết, phải phân biệt Động lực học công trình với Lý thuyết dao động nói chung và với Dao động kỹ thuật nói riêng. Lý thuyết dao động nói chung là cơ sở lý thuyết về các quá trình có tính chu kỳ, thường gặp trong nhiều ngành khoa học, kỹ thuật khác nhau như Vật lý, Cơ học, Chế tạo máy, Giao thông, Xây dựng,... ở đây nghiên cứu những khái niệm về dao động và các phương pháp để nghiên cứu, phát hiện các quá trình dao động trong thực tế. Dao động kỹ thuật là một sự cụ thể hoá lý thuyết dao động, nhằm cung cấp cho các kỹ sư sự hiểu biết cần thiết để lý giải và xử lý các hiện tượng dao động trong kỹ thuật. Động lực học công trình không thể dừng lại ở đối tượng kỹ thuật nói chung, mà tập trung vào nghiên cứu đối tượng cụ thể là công trình như một hệ cơ học đàn hồi. Tuy nhiên cũng không thể hiểu động lực học công trình như bộ môn Dao động của các hệ đàn hồi, mặc dù trong một vài trường hợp cũng khó mà phân biệt rõ ràng. Nếu đối tượng của Lý thuyết dao động các hệ đàn hồi là các mô hình toán học của các vật thể đàn hồi mang tính tổng quát, thì Động lực học công trình tập trung vào những đối tượng thực tế có thể được mô phỏng như các hệ đàn hồi - công trình. Bên cạnh đó, nếu lý thuyết dao động các hệ cơ học, do tính tổng quát, có thể không cần quan tâm nhiều đến việc mô hình hoá các hệ cơ học, thì Động lực học công trình, như là một bộ phận của Động lực học nói chung cần phải bắt đầu chính từ việc xây dựng mô hình toán học cho một đối tượng thực tế. Khi đó môn Động lực học công trình cũng phải cung cấp cả những công cụ để mô hình hoá các đối tượng (công trình) của mình. Với tư duy như vậy, những bài giảng của tôi được hình thành. Trong đó mỗi một tiết được trình bày một cách trọn vẹn từ việc mô hình hoá cho đến những lời giải, kết luận có ý nghĩa cụ thể. Tuy nhiên mục đích cũng chỉ để cung cấp cho học viên những ý tưởng để có thể tự mình giải các bài toán có thể gặp trong thực tế.

Nội dung mà tôi muốn truyền đạt chính là những khái niệm cơ bản, những phương pháp cần thiết và những ứng dụng có tính minh hoạ. Một số tính toán phức tạp không được trình bày chi tiết bởi vì

tôi muốn dành một số công việc cho người đọc tự làm như những bài tập, tham gia vào quá trình truyền đạt kiến thức. Có thể nói, đặc điểm riêng để phân biệt giáo trình này với những tài liệu đã công bố là ở tính cô đọng và cách tiếp cận các đặc trưng phổ đối với các bài toán quen thuộc.

Chương 1 dành cho việc trình bày những kiến thức cơ bản bao gồm các khái niệm, các mô hình đơn giản, các phương pháp giải tích cơ bản. Nội dung chương này gần giống như lý thuyết dao động các hệ đàn hồi, nhưng được trình bày như những khái niệm cơ bản.

Chương 2 trình bày những phương pháp mô hình hoá hiện đại, mà thực chất là các phương pháp rời rạc hoá hệ liên tục với mục đích xây dựng mô hình hữu hạn, đã được nghiên cứu ở chương 1, cho kết cấu công trình.

Chương 3 bao gồm việc trình bày một số bài toán thực tế của động lực học công trình như tính toán cầu khi có tải di động, tính toán tác động của động đất, sóng biển lên công trình. Cuối cùng tác giả bổ sung thêm một tiết (không có trong đề cương) nhằm giới thiệu sự ứng dụng Động lực học công trình trong Chẩn đoán kỹ thuật công trình, một lĩnh vực khá mới trong kỹ thuật hiện đại.

Xin cảm ơn Trung tâm HTĐT&BD Cơ học, Chương trình nghiên cứu cơ bản Nhà nước về khoa học tự nhiên đã tạo điều kiện và ủng hộ cả về tài chính lẫn tinh thần trong việc hoàn thành quyển sách nhỏ này. Đặc biệt xin cảm ơn các GS. TSKH. Đào Huy Bích (Chủ tịch Hội đồng đào tạo Trung tâm HTĐT&BD Cơ học), GS. Nguyễn Cao Mệnh (Chủ tịch Hội đồng xét duyệt cho xuất bản giáo trình này), GS. Nguyễn Văn Phó và PGS.TSKH. Đỗ Sơn (những phản biện) đã đọc kỹ và cho nhiều ý kiến rất xác đáng về nội dung cũng như cách trình bày mà tác giả đã cố gắng sửa lại theo ý kiến của họ. Tôi cũng xin cảm ơn các đồng nghiệp và học trò trong Phòng Chẩn đoán kỹ thuật công trình, Viện Cơ học đã hỗ trợ trong việc tính toán minh học bằng số, vẽ hình,...

Cuốn sách này chắc cũng không tránh khỏi những sai sót, mong rằng sẽ nhận được những góp ý của các đồng nghiệp.

Mọi ý kiến góp ý luôn được đón nhận một cách trân trọng và xin gửi về: Viện Cơ học, 264 Đội Cấn Hà Nội.

Tác giả

MỤC LỤC

Trang

Mở đầu

Chương 1. Những khái niệm cơ bản của Động lực học công trình

- 1.1 Khái niệm về Động lực học công trình
- 1.2 Hệ một bậc tự do
- 1.3 Hệ hữu hạn bậc tự do
- 1.4 Truyền sóng trong thanh đàn hồi
- 1.5 Dao động uốn của dầm đàn hồi.

Chương 2. Những phương pháp tính toán cơ bản của Động lực học công trình

- 2.1 Phương pháp ma trận hệ số ảnh hưởng
- 2.2 Phương pháp ma trận truyền
- 2.3 Phương pháp phần tử hữu hạn
- 2.4 Phương pháp ma trận độ cứng động lực
- 2.5 Công cụ máy tính trong động lực học công trình

Chương 3. Một số bài toán thực tế của Động lực học công trình

- 3.1 Dao động của cầu dưới tác động của tải trọng di động
- 3.2 Động lực học công trình trong động đất
- 3.3 Động lực học công trình biển
- 3.4 Bài toán Chẩn đoán kỹ thuật công trình

Một số đề bài kiểm tra

Tài liệu tham khảo

Chương 1

NHỮNG KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA ĐỘNG LỰC HỌC CÔNG TRÌNH

1.1. Khái niệm về động lực học công trình

1.1.1. Khái niệm về động lực học.

Cơ học nói chung là khoa học về chuyển động và sự cân bằng dưới tác dụng của các lực khác nhau. Nếu chỉ xét các trạng thái cân bằng của vật thể dưới tác dụng của lực ngoài ta có bài toán của tĩnh học. Trạng thái cân bằng được hiểu là không có chuyển động, tức khi đó vật thể có gia tốc và vận tốc bằng không. Suy luận này thông thường sẽ dẫn đến một quan niệm cho rằng tĩnh học đã bỏ qua yếu tố thời gian khi nghiên cứu trạng thái cân bằng của các vật thể. Và do đó, động lực học được hiểu là bộ phận của cơ học, trong đó có kể đến yếu tố thời gian. Thực chất, quan điểm này chưa đầy đủ. Yếu tố thời gian chỉ là điều kiện cần chứ chưa đủ của động lực học.

Động lực học là một bộ phận của cơ học nghiên cứu chuyển động của các vật thể có kể đến quán tính của chúng.

Quán tính là một thuộc tính của vật chất, có xu hướng bảo tồn trạng thái đang tồn tại, chống lại những tác động bên ngoài nhằm thay đổi trạng thái sẵn có của chúng. Quán tính được đặc trưng bởi khối lượng và lực quán tính được tính bằng khối lượng nhân với gia tốc của vật thể trong chuyển động. Như vậy, *quán tính là dấu hiệu cốt lõi của động lực học*. Nếu bỏ qua quán tính, tức cho gia tốc bằng không, thì bài toán không còn là động lực học nữa mặc dù vẫn có thể nó đang chuyển động đều.

Nếu tĩnh học có lịch sử lâu dài cùng với Cơ học, thì động lực học chỉ thực sự trở thành một bộ phận của Cơ học nhờ những phát minh của Niuton. Ba định luật cơ bản của Niuton trở thành những viên gạch đầu tiên xây nên bộ môn động lực học cổ điển. Trong các định luật này, quan trọng nhất là định luật thứ hai *“Tổng hợp tất cả các lực ngoài tác dụng lên một vật có khối lượng m bằng ma , với a là gia tốc của vật”*. Tư tưởng cơ bản này của động lực học vẫn còn ý nghĩa cho đến ngày hôm nay trong Cơ học.

1.1.2. Khái niệm về công trình.

Trong Cơ học cổ điển của Niuton, người ta chỉ xét đến các chất điểm. Sau này có nghiên cứu đến các vật rắn tuyệt đối. Đây là đối tượng chính

của cơ học lý thuyết mà đã có thời trở thành một môn học cơ bản của sinh viên các ngành khoa học tự nhiên và kỹ thuật. Trong sự phát triển của cơ học sau này người ta đã mở rộng đối tượng sang các vật thể có thể biến dạng. Các vật thể này thường xác định bằng các hàm số phụ thuộc không chỉ vào thời gian mà còn cả tọa độ trong không gian chứa vật thể đó. Vì vậy các vật thể biến dạng tạo thành hệ cơ học với các tham số phân bố liên tục và thường được gọi là hệ liên tục hay hệ vô số bậc tự do.

Công trình là một hệ cơ học gồm nhiều vật thể biến dạng liên kết với nhau tạo thành một chỉnh thể thực hiện một số chức năng định sẵn.

Vì là một hệ cơ học phức tạp gồm nhiều thành phần khác nhau liên kết lại thành một đối tượng có hình dáng kích thước, nên công trình thực chất là một hệ vô số bậc tự do. Mô hình cơ học của công trình được gọi là kết cấu công trình. Các tham số của kết cấu công trình bao gồm các tham số hình học, vật liệu, liên kết giữa các phần tử và với môi trường.

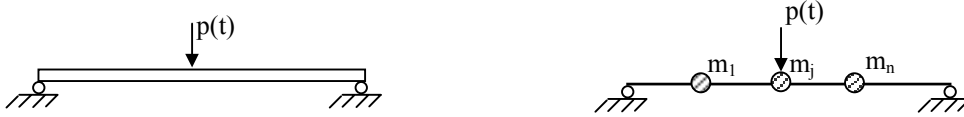
Như vậy động lực học công trình là khoa học nghiên cứu các đặc trưng động lực học và trạng thái ứng suất, biến dạng của công trình dưới tác dụng của các tải trọng ngoài có kể đến quán tính của chúng.

1.1.3. Các phương pháp mô hình hóa công trình

Việc tính toán động lực học công trình trở nên phức tạp do sự phụ thuộc vào lực quán tính của công trình mà chính lực quán tính này lại phụ thuộc vào khối lượng và chuyển vị của công trình. Các công trình là các hệ cơ học có khối lượng phân bố liên tục trong không gian nên lực quán tính cũng là một trường véc tơ phân bố trong không gian, do đó bài toán động lực học công trình thường được mô tả bởi các phương trình vi phân đạo hàm riêng rất phức tạp.

a) Phương pháp tập trung khối lượng

Nếu ta chấp nhận gần đúng rằng sự phân bố khối lượng liên tục trong không gian của công trình được quy về tập trung tại một số điểm nào đó thì bài toán động lực học công trình trở nên đơn giản hơn vì lực quán tính được xác định tại các điểm khối lượng tập trung. Lúc này, bài toán động lực học công trình được mô tả bởi hệ các phương trình vi phân thường. Tuy nhiên, việc tập trung bao nhiêu khối lượng và việc quy đổi khối lượng tại từng điểm như thế nào để đảm bảo độ chính xác của kết quả phân tích động lực học phụ thuộc vào kinh nghiệm và sự hiểu biết của từng chuyên gia đối với từng loại công trình cụ thể.



Hình 1.1.1. Dầm đơn giản và mô hình các khối lượng tập trung thay thế
 b) Phương pháp tọa độ suy rộng

Dựa trên giả thiết rằng chuyển vị của hệ có thể biểu diễn ở dạng tổng chuỗi vô hạn các hàm trực giao $\Psi_n(x,y,z)$ đã biết thỏa mãn các điều kiện biên hình học

$$\begin{aligned}
 u(x,y,z,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \Psi_n(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n^c \cos(\omega_n t) + B_n^s \sin(\omega_n t)) \Psi_n(x,y,z) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(\omega_n t + \alpha_n) \Psi_n(x,y,z)
 \end{aligned}
 \tag{1.1.1}$$

Đối với mỗi dạng chuyển vị cho trước $\Psi_n(x,y,z)$, dạng dao động của công trình phụ thuộc vào biên độ B_n được xem là các tọa độ suy rộng của công trình. Độ chính xác của phương pháp tọa độ suy rộng sẽ tăng lên nếu ta lấy nhiều số hạng của chuỗi xấp xỉ, tuy nhiên khi đó khối lượng tính toán cũng tăng lên đáng kể.

c) Phương pháp phân tử hữu hạn (PTHH)

Đây là một phương pháp cơ bản, hiện đại và thông dụng nhất dùng để mô hình hoá và phân tích tĩnh, động lực học các công trình. Nội dung của phương pháp PTHH như sau: Chia công trình thành một số hữu hạn các phần tử có kích thước tùy ý được liên kết với nhau tại các điểm nút có tọa độ xác định trong không gian. Trạng thái ứng suất, biến dạng tại các điểm bên trong phần tử có thể xác định được thông qua các hàm dạng là các hàm chuyển vị cho trước và các véc tơ chuyển vị nút. Sau đó từ các định luật, nguyên lý cơ bản của cơ học thiết lập được hệ phương trình vi phân thường đối với các chuyển vị nút. Phương pháp PTHH thực chất là một dạng đặc biệt của phương pháp tọa độ suy rộng nhưng nó tỏ ra ưu việt hơn vì tính chất tự động hóa khi tính toán cũng như khối lượng tính toán giảm nhiều so với phương pháp tọa độ suy rộng.

1.1.4. Các dạng tải trọng tác động lên công trình

Trong quá trình sử dụng, các công trình chịu nhiều loại tải trọng khác nhau. Tải trọng tĩnh đặt lên hệ một cách từ từ, êm đềm trong một thời gian đáng kể gây ra gia tốc biến dạng bé có thể bỏ qua lực quán tính. Tải trọng động bao gồm tải trọng tuần hoàn, xung tức thời hay tải trọng dạng bất kỳ

theo thời gian gây ra gia tốc biến dạng lớn, không thể bỏ qua lực quán tính. Tải trọng tuần hoàn là tải trọng lặp lại trong một khoảng thời gian nhất định như tải trọng phát sinh khi đặt mô tơ có độ lệch tâm lên công trình, tải trọng sóng... Sử dụng khai triển chuỗi Fourie, việc tính toán công trình chịu tải trọng tuần hoàn bất kỳ dẫn về việc tính công trình chịu tải trọng điều hòa đơn giản dạng sin, cos. Tải trọng xung tức thời như tải trọng do nổ mìn, đóng cọc bằng búa, do va đập xảy ra trong một thời gian ngắn gây ra sự thay đổi vận tốc biến dạng tại các điểm vật chất của công trình. Các dạng tải trọng trên đây xem như là đã xác định được về dạng và về giá trị, việc xét đến tính ngẫu nhiên của các tham số và dạng tải trọng nằm ngoài phạm vi trình bày của tài liệu này.

1.1.5. Các nguyên lý cơ bản của động lực học công trình.

Niuton đã đưa ra định luật cơ bản để thiết lập phương trình chuyển động của hệ cơ học, tuy nhiên định luật này khó áp dụng cho các hệ phức tạp, ví dụ như hệ chịu ràng buộc. Để thuận tiện cho việc thiết lập phương trình chuyển động của các hệ cơ học, những nguyên lý khác nhau, mà thực chất là sự mô tả khác của định luật cơ bản, đã được nghiên cứu và phát triển. Dưới đây xin giới thiệu một số nguyên lý cơ bản ứng dụng trong động lực học công trình.

a) Nguyên lý D'alambert

Nguyên lý này xuất phát từ định luật thứ hai của Niuton và được phát biểu như sau

“Tổng véc tơ các lực tác dụng lên vật thể nằm ở trạng thái cân bằng, kể cả lực quán tính, bằng không”.

Trong bài toán động lực học công trình, lực tác dụng lên vật thể gồm

- \vec{F}_I là lực quán tính bằng khối lượng nhân với gia tốc và lấy dấu trừ.
- \vec{F}_S là lực đàn hồi trong vật thể chống lại sự biến dạng của công trình thường được mô hình như là lò xo với độ cứng lò xo đã biết.
- \vec{F}_D là lực cản trong vật thể tiêu hao một phần năng lượng, chuyển thành nhiệt... thường được mô hình như cản nhớt tỷ lệ với vận tốc biến dạng.
- \vec{F}_P là lực ngoài tác động lên hệ. Khi đó theo nguyên lý D'alambert

$$\vec{F}_I + \vec{F}_S + \vec{F}_D + \vec{F}_P = 0; \quad \vec{F}_I = -m \frac{\partial^2 u(t, x, y, z)}{\partial t^2} \quad (1.1.2)$$

Thực chất, nguyên lý này đã đưa bài toán động lực học về một bài toán tĩnh học nhờ khái niệm lực quán tính. Nguyên lý này chỉ áp dụng khi tất cả các lực ngoài đều có thể tính được.

b) Nguyên lý công khả dĩ

Nguyên lý Đalamber nêu trên là bước đầu phát triển định luật Niuton và phát hiện ra rằng thực chất phương trình chuyển động của động lực học cũng là sự cân bằng các lực. Nhưng các phương trình vẫn ở dạng véctơ và nói chung khó áp dụng cho các hệ bị ràng buộc. Sự phát triển tiếp theo các nguyên lý động lực học là nguyên lý công khả dĩ. Nguyên lý này dựa trên khái niệm dịch chuyển khả dĩ, tức là những chuyển vị có thể, thoả mãn các ràng buộc của hệ, được phát biểu như sau

“Đối với vật thể nằm ở trạng thái cân bằng, công của tất cả các lực tác động lên vật thể trên các dịch chuyển khả dĩ bằng không.”

Trong bài toán động lực học công trình, nguyên lý công khả dĩ có dạng

$$\int_V \tilde{\varepsilon}^T \sigma dV = \int_V \tilde{u}_V^T \left(f_V - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) dV + \int_S \tilde{u}_S^T f_S dS + \sum_j \tilde{u}_j^T f_C^j \quad (1.1.3)$$

với ρ là mật độ khối lượng; σ là trường ứng suất phát sinh trong vật thể; f_V, f_S, f_C^j là các lực khối, lực mặt và lực tập trung tác động lên hệ; $\tilde{\varepsilon}, \tilde{u}_V, \tilde{u}_S, \tilde{u}_j$ là các biến dạng và chuyển vị khả dĩ thoả mãn các liên kết hình học bên trong vật thể, trên bề mặt và tại các điểm đặt lực tập trung.

Thực chất đây vẫn là sự cân bằng của các lực, nhưng được xét trong không gian các dịch chuyển khả dĩ. Ưu điểm nổi bật của nguyên lý này là cho phép thiết lập phương trình chuyển động của các hệ chịu ràng buộc và thay vì phải tính toán các đại lượng véctơ thì ở đây chỉ cần tính một đại lượng vô hướng là công của các lực.

c) Nguyên lý biến phân

Dù nguyên lý công khả dĩ đã được phát triển thêm một bước so với nguyên lý Đalamber, nhưng nó vẫn khó áp dụng cho các hệ với khối lượng phân bố. Để giải quyết khó khăn này, các nguyên lý biến phân đã được quan tâm phát triển. Tư tưởng cội nguồn của chúng, theo chúng tôi, xuất phát từ nguyên lý Dirichle trong tĩnh học: Tại các vị trí cân bằng ổn định, thế năng của hệ đạt giá trị cực tiểu. Các nguyên lý biến phân cũng dẫn đến tìm cực tiểu của một phiếm hàm biểu diễn các đặc trưng cơ học của hệ.

Chính vì thế mà phương trình thu được cũng là một dạng phương trình cân bằng. Đại diện cho các nguyên lý biến phân là nguyên lý tác dụng tối thiểu của Hamilton, được xây dựng dựa trên những tính toán biến phân của năng lượng trong một khoảng thời gian $[t_1, t_2]$ bất kỳ

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta[T(t) - V(t)]dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W(t)dt = 0 \quad (1.1.4)$$

trong đó T là động năng; V là hàm thế năng của các lực bảo toàn bao gồm thế năng biến dạng và thế năng của các lực ngoài bảo toàn; W là công của các lực không bảo toàn như lực cản, các lực ngoài không có thế; δ là toán tử biến phân.

Áp dụng nguyên lý này cho một hệ đã được rời rạc hoá, ta được hệ phương trình Lagrăng

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j \quad (1.1.5)$$

$$Q_j = \frac{\delta W}{\delta q_j}; j = 1, 2, \dots, n.$$

trong đó $q_j, j=1, \dots, n$ là các tọa độ suy rộng của hệ; T là động năng; V là thế năng; Q_j là lực suy rộng tương ứng với tọa độ suy rộng q_j . Phương trình này là cơ sở để nghiên cứu động lực học của nhiều hệ cơ học khác nhau, trong đó có cả hệ phân bố, tức cả công trình.

Cả ba nguyên lý trên đây đều có giá trị tương đương nhau và cùng dẫn về một hệ phương trình chuyển động, việc lựa chọn cách xây dựng như thế nào tùy thuộc dạng bài toán và người khảo sát lựa chọn.

1.2. Hệ một bậc tự do

1.2.1. Khái niệm bậc tự do

Bậc tự do của một hệ cơ học là tập hợp các tham số độc lập tối thiểu đủ để xác định vị trí và hình dáng bản thân hệ một cách duy nhất trong không gian. Các tham số này được gọi là các bậc tự do hay tọa độ suy rộng của hệ. Số lượng các tham số trong tập hợp nêu trên gọi là số bậc tự do của hệ. Hệ cơ học có thể có một, nhiều hay vô số bậc tự do. Trên hình 1.2.1.a là dầm không khối lượng mang vật nặng m , để xác định vị trí của vật nặng ta cần biết độ võng y tại tiết diện đặt vật nặng, khi đó hệ được xem là 1 bậc tự do.

Tuy nhiên, nếu chuyển vị dọc trục của dầm xấp xỉ chuyển vị ngang của tiết diện thì cần 2 tham số mới xác định vị trí khối lượng m , khi đó hệ được xem là có 2 bậc tự do. Trên hình 1.2.1.b là hệ 2 thanh không có khối lượng mang một vật nặng m nhưng cần hai thông số mới xác định được vị trí của khối lượng m ở trạng thái biến dạng, như vậy hệ được xem là có 2 bậc tự do.



Hình 1.2.1 Xác định số bậc tự do: a) Hệ 1 bậc tự do, b) Hệ 2 bậc tự do

Trong Cơ học, người ta thường phân biệt hai dạng hệ theo số lượng bậc tự do. Đó là các hệ hữu hạn bậc tự do và hệ vô số bậc tự do. Việc chọn các bậc tự do (hay tọa độ suy rộng) phụ thuộc vào chủ thể nghiên cứu của đối tượng. Số bậc tự do nói chung là các số tự nhiên, tuy nhiên cũng có khi phải dùng đến cả các số lẻ như $1+1/2$ để mô tả số bậc tự do của các hệ phức tạp. Những hệ hữu hạn bậc tự do đóng vai trò cơ sở để nghiên cứu các hệ vô số bậc tự do và do đó cũng thuộc các khái niệm cơ bản của động lực học công trình. Chúng ta sẽ bắt đầu tìm hiểu môn Động lực học công trình bằng cách nghiên cứu các hệ hữu hạn bậc tự do.

1.2.2. Khái niệm về dao động

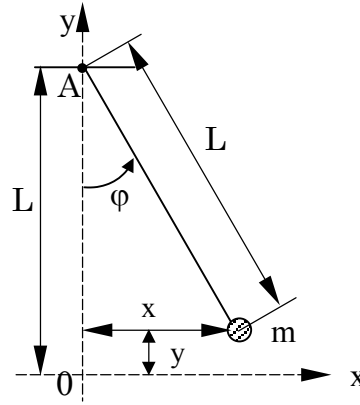
Ta nghiên cứu chuyển động của một con lắc toán học đơn giản như trong Hình 1.2.2. Chất điểm có khối lượng m , tập trung ở đầu dây không trọng lượng độ dài L được cố định đầu kia tại một điểm A nào đó. Vị trí của chất điểm trong mặt phẳng được xác định bằng hai tọa độ x và y . Nhưng vì một đầu dây cố định và khoảng cách từ vật đến vị trí A không đổi bằng L nên hệ sẽ chỉ có một bậc tự do, đó là góc giữa đoạn dây tạo với phương thẳng đứng, ký hiệu là φ .

Chọn hệ tọa độ như trong hình vẽ, ta có

$$x = L \sin \varphi, y = L(1 - \cos \varphi)$$

Khi đó động năng và thế năng của vật bằng:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} mL^2 \dot{\varphi}^2 \\ V &= mgy = mgL(1 - \cos \varphi) \end{aligned} \tag{1.2.1}$$



Hình 1.2.2. Dao động của con lắc đơn giản

Bỏ qua những lực khác, phương trình Lagrăng của hệ có dạng

$$\ddot{\varphi} + (g/L)\sin\varphi = 0$$

trong đó g là gia tốc trọng trường. Đây là một phương trình vi phân bậc hai phi tuyến và sau khi khai triển Taylor hàm \sin , có dạng

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi - \frac{\omega_0^2}{2}\varphi^3 + \dots = 0; \quad \omega_0^2 = \frac{g}{L}$$

Nếu chỉ xét thành phần bậc nhất ta được phương trình cơ bản biểu diễn dao động điều hoà

$$\ddot{x} + \omega_0^2x = 0 \tag{1.2.2}$$

Phương trình này cho ta nghiệm

$$x = a \sin(\omega_0 t + \theta) \tag{1.2.3}$$

biểu diễn một *dao động điều hoà* với a được gọi là biên độ dao động, ω_0 là tần số dao động và θ là pha ban đầu (Hình 1.2.3). Dao động điều hoà này có thể biểu diễn ở dạng phức

$$x = \text{Re}\{Ae^{-i\omega_0 t}\}$$

trong đó A gọi là biên độ phức của dao động điều hoà $A = aie^{-i\theta}$ và

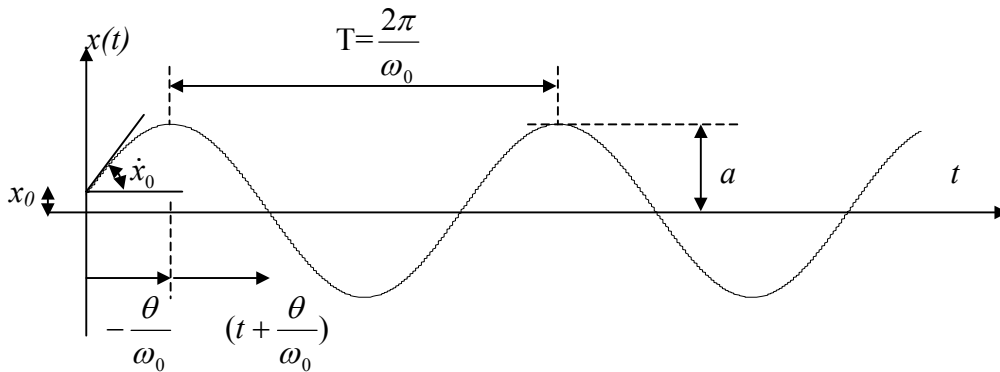
$$a = |A|; \quad \theta = -\arg A + \frac{\pi}{2} \tag{1.2.4}$$

Vì vậy thông thường ta sử dụng dạng phức của dao động điều hoà

$$X = Ae^{-i\omega_0 t} \tag{1.2.5}$$

Trong trường hợp dao động tự do không cản của hệ một bậc tự do, biên độ và pha ban đầu được xác định bằng điều kiện đầu $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0$, tức

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}}, \quad \theta = \arctg\left(\frac{x_0\omega_0}{\dot{x}_0}\right) \tag{1.2.6}$$



Hình 1.2.3. Dao động tự do không có cản

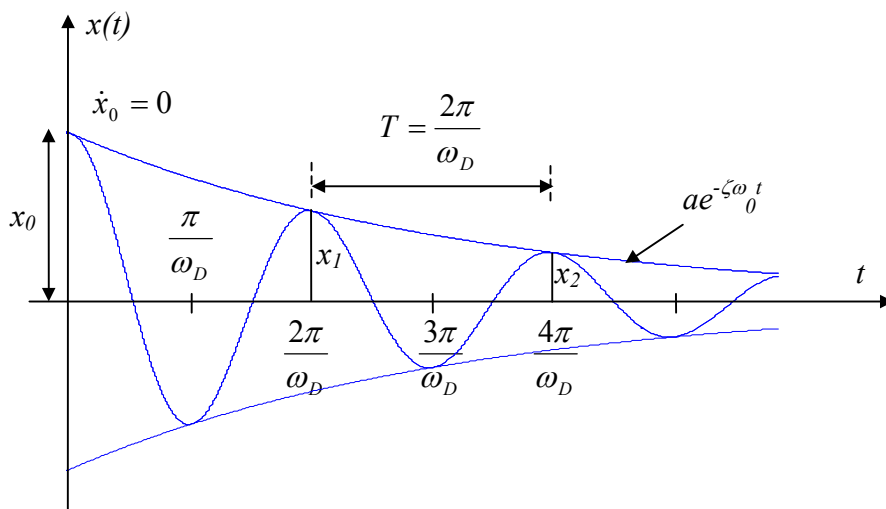
Khi kể đến lực cản nhớt tỷ lệ với vận tốc, dao động tự do của hệ một bậc tự do có cản được mô tả bằng phương trình

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0 \tag{1.2.7}$$

Nghiệm phương trình biểu diễn một *dao động tắt dần*

$$x = ae^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_D t + \theta) \tag{1.2.8}$$

$$\omega_D = \omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}$$



Hình 1.2.4. Dao động tự do có cản nhỏ

với ζ là một số dương và được gọi là *hệ số tắt dần dao động*, đặc trưng cho lực cản nhớt, ω_D là tần số dao động của hệ có cản (Hình 1.2.4). Trong khuôn khổ dao động chúng ta chỉ xét trường hợp hệ số tắt dần nhỏ hơn 1 ($0 < \zeta < 1$). Biên độ a và pha ban đầu θ của hệ có cản được xác định bằng điều kiện đầu $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0$ có dạng

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + \zeta\omega_0 x_0)^2}{\omega_D^2}}, \quad \theta = \arctg\left(\frac{x_0\omega_D}{\dot{x}_0 + \zeta\omega_0 x_0}\right) \quad (1.2.9)$$

Ký hiệu x_n và x_{n+1} là hai đỉnh dương liên tiếp của dao động tại các thời điểm $n\frac{2\pi}{\omega_D}$ và $(n+1)\frac{2\pi}{\omega_D}$; δ là hệ số suy giảm dao động logarit $\delta = \ln\frac{x_n}{x_{n+1}}$. Khi đó ta có thể xác định hệ số tắt dần dao động ζ từ phương trình

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (1.2.10)$$

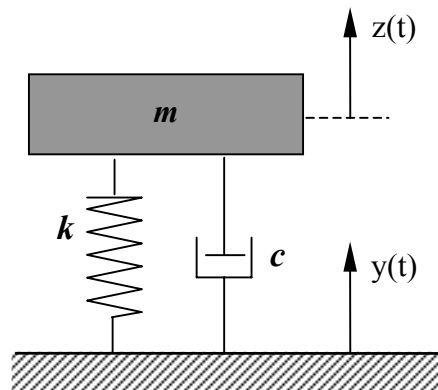
1.2.3. Dao động cưỡng bức của công trình chịu tải trọng tuần hoàn

Xét hệ cơ học được mô tả trong Hình 1.2.5. Giả sử nền bị dịch chuyển với gia tốc $\ddot{y}(t)$ và chuyển dịch tuyệt đối của vật là $z(t)$. Chọn gốc toạ độ tương ứng với điểm cân bằng tĩnh của lò xo, khi đó động năng và thế năng của hệ bằng

$$T = \frac{1}{2}m\dot{z}^2; \quad V = \frac{1}{2}k(z-y)^2 \quad (1.2.11)$$

Lực suy rộng là lực cản bằng $Q = -c(\dot{z} - \dot{y})$. Phương trình Lagrăng cho ta

$$m\ddot{z} + c(\dot{z} - \dot{y}) + k(z - y) = 0 \quad (1.2.12)$$



Hình 1.2.5. Dao động của hệ một bậc tự do có xét đến ảnh hưởng của chuyển vị nền.

Đưa vào tọa độ suy rộng $x = z - y$ là chuyển vị tương đối của vật thể so với nền, ta được phương trình

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{y}(t) \quad (1.2.13)$$

Như vậy, bài toán dao động của hệ 1 bậc tự do có nền bị dịch chuyển với gia tốc $\ddot{y}(t)$ là một trường hợp riêng của bài toán dao động của hệ 1 bậc tự do chịu tải trọng bất kỳ như trên Hình 1.2.6 có dạng

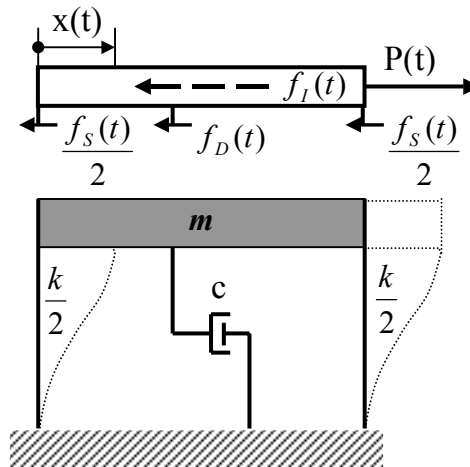
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t) \quad (1.2.14)$$

hay là

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = \frac{P(t)}{m} \quad (1.2.15)$$

trong đó

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (1.2.16)$$



Hình 1.2.6. Dao động của hệ một bậc tự do có cản chịu tải trọng ngoài

Xét phương trình dao động (1.2.14). Giả sử tải trọng ngoài là quá trình dao động điều hoà $P(t) = P_0 e^{i\omega t}$ với biên độ phức P_0 và tần số ω . Khi đó, nghiệm đầy đủ của (1.2.15) có dạng

$$x = x_T(t) + x_p(t) = ae^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_D t + \theta) + Ae^{i\omega t} \quad (1.2.17)$$

$$A = A(\omega) = \frac{P_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\zeta\omega_0\omega}$$

trong đó

- $x_T(t)$ là nghiệm tổng quát phụ thuộc vào điều kiện đầu $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0$, là dao động điều hòa tắt dần. $x_T(t)$ được gọi là *quá trình chuyển tiếp*.
- $x_P(t)$ là nghiệm riêng không phụ thuộc vào điều kiện ban đầu, là dao động điều hòa có tần số bằng tần số lực kích động ω và biên độ phức $A(\omega)$ là một hàm của tần số kích động. $x_P(t)$ được gọi là *dao động cưỡng bức* của hệ. Biên độ a_P và pha đầu θ_P của dao động cưỡng bức có dạng

$$a_P = |A| = \frac{P_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2 \omega_0^2 \omega^2}} \quad (1.2.18)$$

$$\theta_P = \arctan \frac{2\zeta \omega_0 \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

lần lượt được gọi là *đặc trưng biên độ - tần số* và *đặc trưng pha* hay các *đặc trưng phổ* của hệ đã cho.

Hàm phức

$$K(\omega) = \frac{P_0}{A} = k - m\omega^2 + ic\omega \quad (1.2.19)$$

được gọi là *độ cứng động (Dynamic Stiffness)* của hệ một bậc tự do. Hàm này là tỷ số giữa biên độ phức của lực tác dụng và biên độ phức của dịch chuyển (ý nghĩa độ cứng) và phụ thuộc vào tần số lực kích động (ý nghĩa động lực học). Dễ dàng nhận thấy $K(0) = k$, đặc trưng cho độ cứng tĩnh.

Hàm phức

$$H(\omega) = \frac{1}{K(\omega)} = \frac{1}{k - m\omega^2 + ic\omega} \quad (1.2.20)$$

được gọi là *độ mềm động* hay *hàm phản ứng tần số*.

Trở kháng cơ học (Mechanical Impedance) của hệ là đại lượng được xác định bằng tỷ số giữa biên độ phức của lực tác dụng với biên độ phức của vận tốc và có dạng

$$I(\omega) = \frac{P_0}{i\omega A} = (k - m\omega^2 + ic\omega) / i\omega. \quad (1.2.21)$$

Hàm phức

$$M(\omega) = \frac{1}{I(\omega)} = \frac{i\omega}{k - m\omega^2 + ic\omega} \quad (1.2.22)$$

được gọi là *độ dẫn cơ học (Mechanical Mobility)* của hệ một bậc tự do.

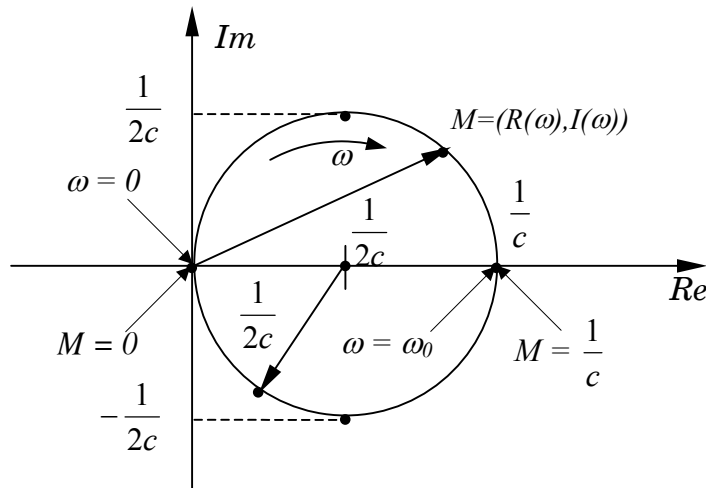
Hàm $M(\omega)$ là hàm phức có phần thực và phần ảo như sau

$$\operatorname{Re}(\omega) = \frac{c\omega^2}{(k - \omega^2 m)^2 + (c\omega)^2}; \quad \operatorname{Im}(\omega) = \frac{\omega(k - m\omega^2)}{(k - \omega^2 m)^2 + (c\omega)^2}.$$

Để dàng nhận thấy đối với các hàm trên ta có hằng đẳng thức

$$\left[\operatorname{Re}(\omega) - \frac{1}{2c} \right]^2 + [\operatorname{Im}(\omega)]^2 = \left[\frac{1}{2c} \right]^2 \quad (1.2.23)$$

với mọi ω , hay trên mặt phẳng phức trục hoành là phần thực và trục tung là phần ảo của hàm độ dẫn cơ học thì độ dẫn cơ học được biểu diễn bằng một đường tròn bán kính bằng $1/2c$ với tâm tại điểm có tọa độ $(1/2c, 0)$, xem Hình 1.2.7. Đường tròn này đi qua gốc tọa độ (ứng với $\omega=0$), cắt trục hoành tại điểm ứng với $\omega = \omega_0 = \sqrt{k/m}$ (tần số riêng), khi đó phần thực hay chính giá trị của độ dẫn cơ học bằng $1/c$. Đường tròn này được gọi là chu trình Nyquist của độ dẫn cơ học. Rõ ràng là đặc tính nêu trên cho phép ta tìm được tần số riêng và hệ số cản của hệ nếu biết đường tròn Nyquist của độ dẫn cơ học. Chỉ cần tìm giao điểm của đường tròn với trục hoành, khi đó giá trị của tần số tương ứng với giao điểm bằng tần số riêng, còn hệ số cản là nghịch đảo của hoành độ giao điểm.



Hình 1.2.7. Biểu đồ Nyquist của hàm độ dẫn cơ học $M(\omega)$

Tương tự ta có thể xây dựng chu trình Nyquist của hàm độ mềm động hay phản ứng tần số $H(\omega)$ nêu trên.

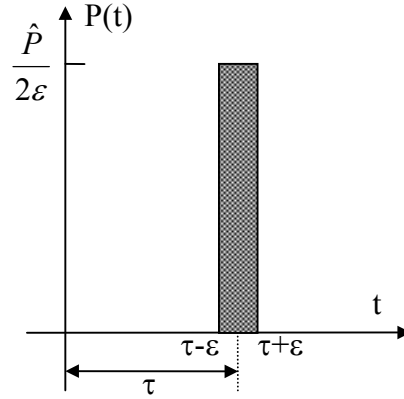
1.2.4. Dao động của công trình chịu tải trọng xung

Tải trọng xung thường được đặc trưng bởi một xung chính có giá trị lớn xảy ra trong một khoảng thời gian ngắn.

Ta có thể biểu diễn xung $P(t)$ ở dạng

$$P(t) = \begin{cases} 0 & t < \tau - \varepsilon \\ \frac{\hat{P}}{2\varepsilon} & \tau - \varepsilon < t < \tau + \varepsilon \\ 0 & t > \tau + \varepsilon \end{cases} \quad (1.2.24)$$

như trên Hình 1.2.8 với $\varepsilon > 0$ là một số đủ nhỏ.



Hình 1.2.8. Tải trọng xung

Xung lượng của tải trọng xung $P(t)$ là

$$I_p(\varepsilon) = \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} P(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) dt = \frac{\hat{P}}{2\varepsilon} 2\varepsilon = \hat{P}$$

Như vậy, hàm $P(t)$ có tính chất $P(t - \tau) = 0; t \neq \tau$ và $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t - \tau) dt = \hat{P}$.

Khi $\varepsilon \rightarrow 0$ và $\hat{P} = 1$ thì hàm $P(t)$ được gọi là hàm Delta - Dirac $\delta(t)$.

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}; \quad I_\delta = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1.2.25)$$

Xét hệ 1 bậc tự do ở thời điểm ban đầu đứng yên $x(0) = 0; \dot{x}(0^-) = 0$ chịu tải trọng xung $P(t)$, khi đó động lượng của hệ thay đổi là

$$m\dot{x}(0^+) - m\dot{x}(0^-) = m\dot{x}(0^+) = \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} P(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) dt = \frac{\hat{P}}{2\varepsilon} 2\varepsilon = \hat{P}$$

suy ra $\dot{x}(0^+) = \frac{\hat{P}}{m}$. Như vậy, ta thấy tác động của tải trọng xung $P(t)$ đối với

hệ 1 bậc tự do tương tự với việc áp dụng điều kiện đầu $x(0) = 0; \dot{x}(0) = \frac{\hat{P}}{m}$.

Từ đó, áp dụng công thức (1.2.6) cho hệ không có cản hay công thức (1.2.9) cho hệ có cản, ta có thể viết lại (1.2.3) và (1.2.8) dưới dạng

$$x(t) = \hat{P}h(t) \tag{1.2.26}$$

trong đó hàm số $h(t)$

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_D} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\zeta\omega_D t) \tag{1.2.27}$$

là chuyển vị của hệ đứng yên $x(0) = 0; \dot{x}(0) = 0$ dưới tác động của hàm xung Delta – Dirac $\delta(t)$. Hàm $h(t)$ được gọi là *hàm phản ứng xung* của hệ.

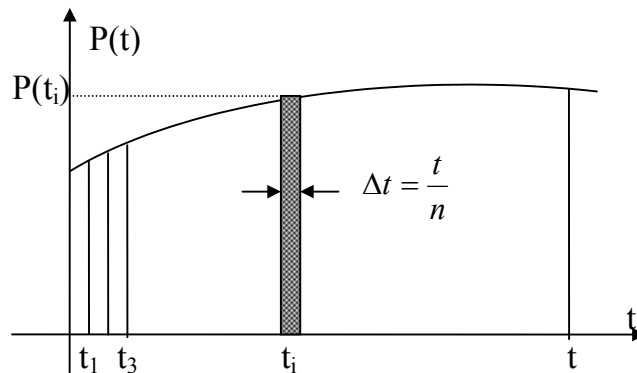
Nếu xung $P(t)$ tác dụng vào thời điểm τ thì (1.2.27) có dạng

$$h(t - \tau) = \begin{cases} \frac{1}{m\omega_D} e^{-\zeta\omega_0(t-\tau)} \sin[\zeta\omega_D(t-\tau)] & t > \tau \\ 0 & 0 < t < \tau \end{cases} \tag{1.2.28}$$

1.2.5. Dao động của công trình chịu tải trọng bất kỳ

Xét hệ một bậc tự do tại thời điểm ban đầu đứng yên $x(0) = 0; \dot{x}(0) = 0$ chịu tải trọng $P(t)$ bất kỳ với phương trình dao động có dạng (1.2.14).

Ta chia lực ngoài $P(t)$ thành từng xung có dạng (1.2.24) với $\hat{P} = P(t_i)\Delta t$ tác động trong khoảng thời gian vô cùng nhỏ $\Delta t = t/n$ như trên Hình 1.2.9.



Hình 1.2.9. Lực ngoài $P(t)$ được chia thành n xung nhỏ.

Phản ứng của hệ chịu tác động xung sau thời điểm t_i theo (1.2.28) có dạng

$$\Delta x(t_i) = P(t_i)(\Delta t)h(t - t_i)$$

như vậy phản ứng của hệ sau j khoảng thời gian ($j=1,2,\dots,n$) bằng tổng

$$x(t_j) = \sum_{i=1}^j \Delta x(t_i) = \sum_{i=1}^j P(t_i)h(t - t_i)\Delta t$$

Do phương trình (1.2.14) là tuyến tính nên khi $\Delta t \rightarrow 0$ (hay $n \rightarrow \infty$) ta có

$$x(t) = \int_0^t P(\tau)h(t-\tau)d\tau = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t P(\tau)e^{-\zeta\omega_0(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)]d\tau; \quad t > 0 \quad (1.2.29)$$

ta có thể viết lại

$$x(t) = \int_0^t P(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^t P(t-\tau)h(\tau)d\tau = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t P(t-\tau)e^{-\zeta\omega_0\tau} \sin(\omega_D\tau)d\tau; \quad t > 0 \quad (1.2.30)$$

Tích phân (1.2.30) được gọi là *tích phân Duhamel* hay *tích phân tiến hóa*.

Nếu tại thời điểm ban đầu hệ không đứng yên, tức là $x(0) = x_0$; $\dot{x}(0) = v_0$, khi đó nghiệm đầy đủ của (1.2.14) bao gồm nghiệm riêng là (1.2.29) hay tích phân Duhamel (1.2.30) và nghiệm tổng quát có dạng (1.2.8) với hai hằng số tích phân được xác định từ các điều kiện ban đầu

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} \left\{ x_0 \cos(\omega_D t) + \frac{\dot{x}_0 + \zeta x_0 \omega_0}{\omega_D} \sin(\omega_D t) \right\} + \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t P(\tau)e^{-\zeta\omega_0(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)]d\tau; \quad t > 0 \quad (1.2.31)$$

Vì $h(t-\tau)=0$ với $t < \tau$ nên khi thực hiện phép biến đổi Fourier đối với hàm phản ứng xung (1.2.27), ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{m\omega_D} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\zeta\omega_D t) \right] e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{k - m\omega^2 + ic\omega} = H(\omega) \quad (1.2.32)$$

Thực hiện phép biến đổi ngược Fourier đối với hàm phản ứng tần số (1.2.20), ta thu được

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega)e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k - m\omega^2 + ic\omega} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{m\omega_D} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\zeta\omega_D t) = h(t) \quad (1.2.33)$$

Như vậy, hàm phản ứng tần số (hay độ mềm động) $H(\omega)$ (1.2.20) và hàm phản ứng xung $h(t)$ (1.2.27) là các biến đổi Fourier của nhau.

Thực hiện biến đổi Fourier đối với tích phân Duhamel (1.2.30), ta có

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} P(\tau)h(t-\tau)d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \quad (1.2.34)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\tau)h(t-\tau)e^{-j\omega t} dt d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\tau)h(t')e^{-j\omega(t+t')} dt dt' = H(\omega)P(\omega)$$

trong đó $X(\omega)$, $P(\omega)$ lần lượt là các biến đổi Fourier của $x(t)$ và $P(t)$. Cũng có thể rút ra kết quả này khi thực hiện biến đổi Fourier phương trình (1.2.14).

1.2.6. Phổ phản ứng và hệ số động lực

Trong thực tế, công trình là một hệ cơ học chịu nhiều loại tải trọng, tác động khác nhau như tải trọng tuần hoàn, xung, va chạm, động đất,... Để đánh giá được khả năng chịu lực của công trình đối với các tác động này, ta cần phải đánh giá được phản ứng lớn nhất của công trình (chuyển vị, vận tốc, gia tốc, hay một chỉ tiêu nào khác) như là hệ một bậc tự do chịu các tác động này gây ra. Đồ thị thể hiện phản ứng lớn nhất của hệ 1 bậc tự do theo các tần số riêng khác nhau đối với từng loại tải trọng cho trước được gọi là *phổ phản ứng* của công trình cho loại tải trọng này. Ngoài ra, người ta còn sử dụng khái niệm *hệ số động lực* là tỷ số giữa chuyển vị động lớn nhất theo thời gian và chuyển vị tĩnh của hệ.

Trên cơ sở tích phân Duhamel (1.2.30), ta có thể xác định được chuyển vị lớn nhất của hệ cơ học do tác động của tải trọng bất kỳ là

$$\begin{aligned} \max|x(t)| &= \max\left|\int_0^t P(\tau)h(t-\tau)d\tau\right| = \\ &= \frac{1}{m\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}} \max\left|\int_0^t P(\tau)e^{-\zeta\omega_0(t-\tau)} \sin\left[\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}(t-\tau)\right]d\tau\right|; t > 0 \end{aligned} \quad (1.2.35)$$

Sau đây ta xét một số trường hợp quan trọng hay gặp

a) *Tải trọng tuần hoàn* $P(t) = P_0 e^{i\omega t}$. *Hiện tượng cộng hưởng*

Ký hiệu

$$\delta_T = \frac{P_0}{k} \quad (1.2.36)$$

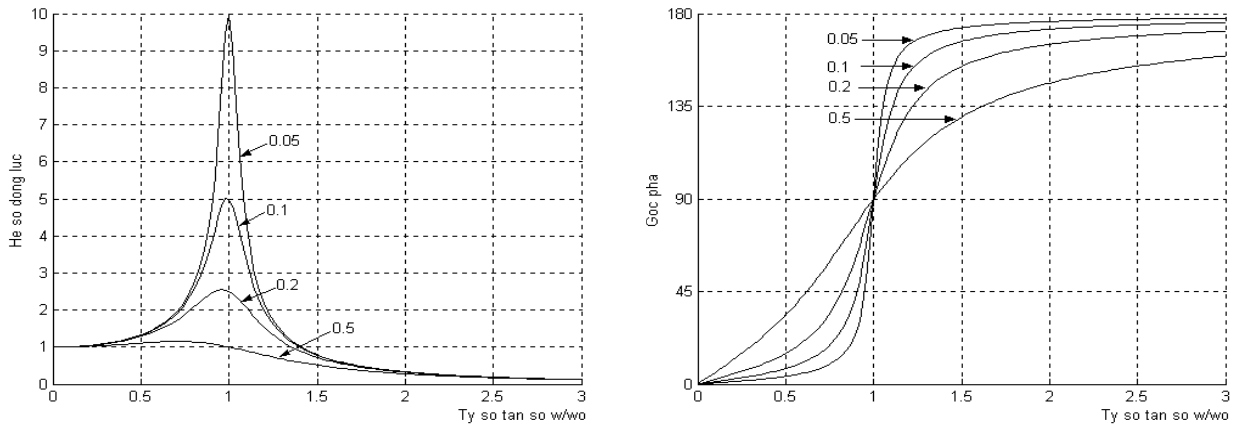
là chuyển vị tĩnh của hệ (1.2.14) khi chọn lực tĩnh có giá trị bằng biên độ P_0 đặt lên hệ. Khi đó biên độ chuyển vị cưỡng bức có dạng (1.2.18). Tỷ số giữa biên độ chuyển vị cưỡng bức a_P với chuyển vị tĩnh δ_T là

$$k_d = \frac{a_P}{\delta_T} = \frac{P_0/m}{\frac{P_0}{k} \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2 \omega_0^2 \omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad (1.2.37)$$

được gọi hệ số động lực của hệ. Giá trị hệ số động lực k_d càng lớn thì hiệu ứng động lực tác động lên công trình càng lớn. Nếu tần số tải trọng

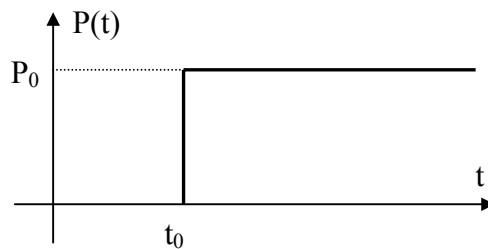
ngoài ω gần với tần số riêng ω_0 thì xảy ra hiện tượng cộng hưởng, khi đó hệ số động lực $k_d = \frac{1}{2\zeta}$ và với hệ số cản nhỏ $\zeta \approx 0$ thì $k_d \approx \infty$. Việc không để xảy ra hoặc giảm tối đa ảnh hưởng của cộng hưởng đối với công trình là một trong những nhiệm vụ chính của động lực học công trình.

Đồ thị hệ số động lực k_d xác định từ (1.2.37) và góc pha θ_p xác định từ (1.2.18) theo tỷ số giữa tần số dao động cưỡng bức ω và tần số riêng của hệ ω_0 với các giá trị hệ số cản ζ khác nhau thể hiện trên Hình 1.2.10.



Hình 1.2.10. Đồ thị hệ số động lực k_d và góc pha ϕ theo tỷ số tần số ω/ω_0 với các hệ số cản $\zeta = 0.05; 0.1; 0.2; 0.5$

b) Tải trọng có giá trị không đổi tác động đột ngột (bài toán va chạm)



Hình 1.2.10.

Từ hình 1.2.10, theo công thức (1.2.29) ta có

$$x(t) = \frac{P_0}{m\omega_D} \int_{t_0}^t e^{-\zeta\omega_0(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] d\tau = \frac{P_0}{k} \left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_0(t-t_0)}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos[\omega_D(t-t_0) - \phi] \right] \quad (1.2.38)$$

với $\phi = \arctg \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$.

Khi bỏ qua lực cản trong hệ ($\zeta=0$)

$$x(t) = \frac{P_0}{k} [1 - \cos \omega_0 t]$$

và chuyển vị lớn nhất là

$$x_{\max} = 2 \frac{P_0}{k} = 2\delta_T; \quad \delta_T = \frac{P_0}{k} \tag{1.2.39}$$

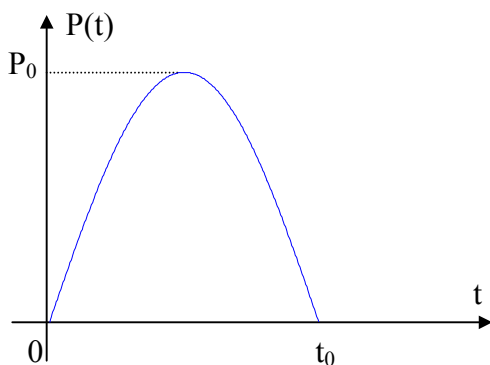
với δ_T là chuyển vị tĩnh của hệ. Từ đó, ta thu được hệ số động lực của hệ không cản là $k_d=2$.

c) *Tải trọng xung hình nửa sin (Hình 1.2.12)*

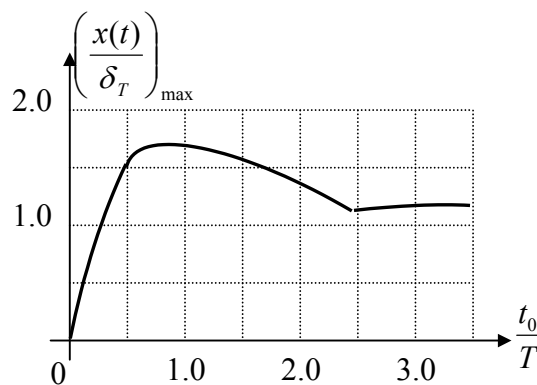
Giả thiết hệ không có cản ($\zeta=0$) và đứng yên tại thời điểm ban đầu $x(0) = 0; \dot{x}(0) = 0$, khi đó nghiệm phương trình (1.2.14) có dạng (1.2.17)

$$x(t) = \begin{cases} \frac{\delta_T}{1 - \left(\frac{T}{2t_0}\right)^2} \left[\sin \frac{\pi t}{t_0} - \frac{T}{2t_0} \sin \frac{2\pi t}{T} \right] & 0 \leq t \leq t_0 \\ \frac{\delta_T T / t_0}{2 \left[1 - \left(\frac{T}{2t_0}\right)^2 \right]} \left[\sin 2\pi \left(\frac{t_0 - t}{T}\right) - \sin \frac{2\pi t}{T} \right] & t \geq t_0 \end{cases} \tag{1.2.40}$$

với $T=2\pi/\omega_0$ là chu kỳ dao động và $\delta_T = P_0/k$ là chuyển vị tĩnh của hệ. Từ đó ta thu được đồ thị phổ phản ứng của hệ như trên hình 1.2.13.



Hình 1.2.12.



Hình 1.2.13.

d) Việc xác định hệ số động lực đối với một số bài toán động lực phức tạp hơn như bài toán dao động của dầm cầu dưới tác dụng của tải trọng di động, bài toán dao động công trình có xét đến tải trọng động đất sẽ được trình bày chi tiết hơn ở chương 3 của tài liệu này.

1.3. Hệ nhiều bậc tự do

1.3.1. Các đặc trưng động lực học

Xét hệ cơ học có hữu hạn bậc tự do xác định bởi vectơ tọa độ suy rộng $U = \{U_1, \dots, U_N\}^T$. Khi đó, động năng và thế năng của hệ có dạng

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \dot{U}^T M \dot{U} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij} \dot{U}_i \dot{U}_j \\ V &= \frac{1}{2} U^T K U = \frac{1}{2} \sum_{i,j} k_{ij} U_i U_j \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

trong đó M, K là các ma trận đối xứng xác định dương, được gọi lần lượt là *ma trận khối lượng* và *ma trận độ cứng* của hệ. Với động năng và thế năng này, hệ được xét trong khuôn khổ các quy luật tuyến tính của cơ học.

Các lực tác dụng lên hệ gồm có hai loại:

- Lực cản có dạng $Q_c = C\dot{U}$ mà trong tính toán động lực học công trình nói chung chỉ xét trường hợp cản Rolây với

$$C = \alpha M + \beta K \quad (1.3.2)$$

với các hằng số α, β được xác định từ thực nghiệm. Khi đó ma trận hệ số cản C là đối xứng và xác định dương.

- Lực ngoài tác dụng $Q_n = P(t) = \{P_1(t), \dots, P_N(t)\}^T$.

Khi đó phương trình Lagrăng của hệ có dạng

$$M\ddot{U}(t) + C\dot{U}(t) + KU(t) = P(t) \quad (1.3.3)$$

Bài toán dao động riêng được mô tả bằng phương trình

$$M\ddot{U} + KU = 0.$$

Nghiệm có dạng

$$U = \Phi e^{i\omega t}$$

với ω, Φ được gọi là tần số riêng và dạng dao động riêng của hệ. Các tần số riêng được xác định từ hệ phương trình đại số

$$\det[K - \omega^2 M] = 0. \quad (1.3.4)$$

và các dạng dao động riêng xác định từ phương trình

$$\begin{cases} [K - \omega^2 M]\{\Phi\} = 0 \\ \|\{\Phi\}\| = 1 \end{cases} \quad (1.3.5)$$

Có rất nhiều thuật toán và chương trình để giải bài toán trị riêng nêu trên, chúng ta không dừng lại ở việc giải bài toán này (các độc giả quan tâm có thể xem phần phụ lục ở cuối giáo trình này) mà đi vào trình bày một số tính chất của các tần số và dạng dao động riêng.

Trước hết trong đại số tuyến tính, người ta đã chứng minh được rằng bài toán trị riêng với các ma trận độ cứng và khối lượng là các ma trận đối xứng, xác định dương có N tần số riêng $\{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ là các nghiệm dương và các véc tơ dạng riêng Φ_j tương ứng với tần số riêng ω_j thoả mãn điều kiện trực giao có dạng

$$\begin{aligned} \Phi_i^T M \Phi_j &= \begin{cases} m_j, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \\ \Phi_i^T K \Phi_j &= \begin{cases} k_j, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

Thật vậy, từ phương trình (1.3.5), ta có

$$\begin{aligned} (K - \omega_j^2 M)\Phi_j &= 0 \\ (K - \omega_k^2 M)\Phi_k &= 0. \end{aligned}$$

Nhân từ vế trái hai phương trình cuối với véc tơ Φ_k^T, Φ_j^T lần lượt, ta sẽ được

$$\begin{aligned} \Phi_k^T K \Phi_j - \omega_j^2 \Phi_k^T M \Phi_j &= 0 \\ \Phi_j^T K \Phi_k - \omega_k^2 \Phi_j^T M \Phi_k &= 0 \end{aligned}$$

Vì tính đối xứng của các ma trận K, M nên

$$\begin{aligned} \Phi_k^T K \Phi_j &= \Phi_j^T K \Phi_k \\ \Phi_k^T M \Phi_j &= \Phi_j^T M \Phi_k \end{aligned}$$

và do đó

$$(\omega_j^2 - \omega_k^2)\Phi_k^T M \Phi_j = 0$$

Nếu $j \neq k, \omega_j \neq \omega_k$, ta sẽ nhận được (1.3.6).

Các tham số $m_j, k_j, j = 1, 2, \dots, N$ được gọi là khối lượng và độ cứng quy đổi.

Ngoài ra, các dạng dao động riêng luôn chứa một hằng số bất kỳ, để xác định hằng số này người ta đưa vào các tiêu chuẩn gọi là phép chuẩn hoá

dạng riêng, ví dụ các hằng số được lấy bằng $1/\sqrt{m_j}$, khi đó dạng riêng chuẩn hoá thoả mãn

$$\overline{\Phi}_j^T M \overline{\Phi}_j = 1, \forall j.$$

Với các tham số khối lượng và độ cứng quy đổi này, tần số riêng được tính một cách dễ dàng

$$\omega_j = \sqrt{k_j / m_j}, j = 1, 2, \dots, N.$$

Trong trường hợp cản Rolây, ta có thêm các hệ số cản quy đổi tương ứng

$$c_j = \Phi_j^T C \Phi_j = \Phi_j^T [\alpha M + \beta K] \Phi_j = \alpha m_j + \beta k_j$$

Do đó hệ số cản kết cấu tương ứng với dạng dao động riêng thứ j bằng

$$\zeta_j = 0.5c_j / m_j = 0.5(\alpha + \beta\omega_j^2).$$

Như vậy, đối với hệ hữu hạn bậc tự do nêu trên, ta có được tập hợp các tần số riêng, các dạng dao động riêng và các hệ số cản kết cấu tương ứng, tạo thành tổ hợp các *đặc trưng động lực học* của hệ đã cho, viết dưới dạng ba ma trận như sau

$$\begin{aligned} \Omega &= \text{diag}\{\omega_1^2, \dots, \omega_N^2\} \\ \overline{\Phi} &= \{\overline{\Phi}_i(j)\}_{i,j=1}^N \\ D &= \text{diag}\{\zeta_1, \dots, \zeta_N\} \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

Đến đây ta có thể chứng minh được một mệnh đề:

Mệnh đề 1.2.1. Hệ cơ học hữu hạn bậc tự do tuyến tính hoàn toàn được xác định nếu biết tất cả các đặc trưng động lực học của nó.

Thật vậy, như ban đầu đã nêu, hệ hữu hạn bậc tự do tuyến tính được xác định bởi ba ma trận M, K, C . Vì vậy, nếu biết các đặc trưng động lực học của hệ (1.3.6), ta có thể tính được các ma trận khối lượng, độ cứng hay hệ số cản như sau:

$$\begin{aligned} M &= (\overline{\Phi}^T)^{-1} (\overline{\Phi})^{-1} \\ K &= (\overline{\Phi}^T)^{-1} \Omega (\overline{\Phi})^{-1} \\ C &= 2(\overline{\Phi}^T)^{-1} D (\overline{\Phi})^{-1} \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Vì lý do này nên các đặc trưng động lực học của hệ còn được gọi là *mô hình dao động* của hệ. Và mô hình ban đầu gồm các ma trận khối lượng, độ cứng và hệ số cản được gọi là *mô hình không gian* của hệ hữu hạn bậc tự do.

1.3.2. Các đặc trưng phổ

Bây giờ ta xét hệ đã cho (1.3.3) với lực ngoài tác dụng có dạng

$$P = \hat{P}e^{i\omega t}$$

tức một lực điều hoà với tần số ω và biên độ phức \hat{P} . Khi đó đáp ứng của hệ cũng có thể tìm dưới dạng

$$U = \hat{U}e^{i\omega t}$$

và biên độ phức của đáp ứng sẽ được tìm từ phương trình

$$(-\omega^2 M + i\omega C + K)\hat{U} = \hat{P}.$$

Ma trận phức

$$\hat{K}(\omega) = (-\omega^2 M + i\omega C + K) \quad (1.3.9)$$

được gọi là *ma trận độ cứng động* của hệ đã cho. Ma trận độ cứng động phụ thuộc vào tần số lực kích động ω và cũng mô tả quan hệ giữa lực kích động và chuyển vị tương tự như trong trường hợp tĩnh. Hiển nhiên, tại tần số bằng không thì

$$\hat{K}(0) = K$$

tức là trở thành ma trận độ cứng tĩnh ban đầu.

Ma trận

$$\hat{H}(\omega) = \hat{K}^{-1}(\omega)$$

được gọi là *ma trận độ mềm động*, hay còn gọi là *ma trận hàm truyền* vì

$$\hat{U} = \hat{H}\hat{P} \quad (1.3.10)$$

mô tả sự truyền tác dụng của lực ngoài đến các bậc tự do tạo thành chuyển vị của hệ. Thực chất của hàm truyền giữa hai điểm của công trình là chuyển vị tại một điểm khi có lực tác dụng ở điểm kia. Rõ ràng là ma trận độ cứng động hay ma trận hàm truyền cũng đều mô tả một cách đầy đủ hệ đã cho. Do đó người ta gọi ma trận hàm truyền là *mô hình tần số* hay *mô hình động lực học* của hệ. Trong một số tài liệu, các ma trận nêu trên còn được gọi là đặc trưng biên độ tần số (phổ) của hệ đã cho.

Để minh chứng cho việc các ma trận độ cứng động hay độ mềm động có thể mô tả đầy đủ hệ đã cho. Ta xét hệ (1.3.3) trên quan điểm phương pháp khai triển theo dạng riêng sau đây.

1.3.3. Khai triển theo dạng riêng

Giả sử $\{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ và $\Phi = \{\Phi_i(j); i, j = 1, 2, \dots, N\}$ là các tần số riêng và dạng dao động riêng tương ứng của hệ đã cho (1.3.3).

Biểu diễn nghiệm của phương trình (1.3.3) ở dạng

$$U(t) = \Phi q(t)$$

hay

$$U_j(t) = \sum_{r=1}^N \Phi_r(j) q_r(t); \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (1.3.11)$$

và thay vào phương trình (1.3.3). Tiến hành nhân vô hướng hai vế phương trình từ phía phải với véc tơ Φ^T và sử dụng tính trực giao của các dạng dao động riêng (1.3.6), ta được n phương trình vi phân tách biệt

$$m_j \ddot{q}_j(t) + c_j \dot{q}_j(t) + k_j q_j(t) = f_j(t); \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (1.3.12)$$

trong đó

$$f_j(t) = \sum_{s=1}^N \Phi_j(s) P_s(t); \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Đến đây ta thấy rõ ý nghĩa vật lý của các tham số khối lượng, độ cứng và hệ số cản quy đổi. Chúng đóng vai trò khối lượng, độ cứng và hệ số cản của các hệ một bậc tự do quy đổi. Điều này đồng thời cũng nêu bật bản chất của phương pháp khai triển theo các dạng dao động riêng là đưa hệ nhiều bậc tự do về hệ một bậc tự do mà chúng ta đã nghiên cứu kỹ ở phần trên.

Rõ ràng, nếu lực ngoài tác dụng là điều hoà có dạng

$$P_s(t) = \hat{P}_s e^{i\omega t}$$

thì lực ngoài quy đổi cho hệ một bậc tự do sẽ bằng

$$f_j(t) = \sum_{s=1}^N \Phi_j(s) \hat{P}_s e^{i\omega t} = \hat{f}_j e^{i\omega t}$$

trong đó

$$\hat{f}_j = \sum_{s=1}^N \Phi_j(s) \hat{P}_s; \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (1.3.13)$$

Khi đó tọa độ suy rộng q_j có dạng điều hoà

$$q_j(t) = \hat{q}_j e^{i\omega t}$$

với biên độ phức là

$$\hat{q}_j = \frac{\hat{f}_j}{k_j - m_j \omega^2 + ic_j \omega} = \sum_{s=1}^N H_j(\omega) \Phi_j(s) \hat{P}_s$$

trong đó

$$H_j(\omega) = \frac{1}{k_j - m_j \omega^2 + ic_j \omega} \quad (1.3.14)$$

Lúc này ta có thể nhận được biểu thức của đáp ứng chung của hệ ở dạng

$$\hat{U}_j = \sum_{r=1}^N \Phi_r(j) \hat{q}_r = \sum_{r=1}^N \Phi_r(j) \sum_{s=1}^N H_r(\omega) \Phi_r(s) \hat{P}_s = \sum_{s=1}^N \left[\sum_{r=1}^N H_r(\omega) \Phi_r(j) \Phi_r(s) \right] \hat{P}_s \quad (1.3.15)$$

Trong trường hợp $\hat{P}_s = 0, \forall s \neq r$, ta có

$$\hat{U}_j = \hat{P}_s \sum_{r=1}^N H_r(\omega) \Phi_r(j) \Phi_r(s), \forall r, j = 1, 2, \dots, N. \quad (1.3.16)$$

Chú ý đến biểu thức của ma trận độ mềm động lực học nêu trên, ta thấy

$$\hat{h}_{js}(\omega) = \frac{\hat{U}_j}{\hat{P}_s} = \sum_{r=1}^N H_r(\omega) \Phi_r(j) \Phi_r(s).$$

Biểu thức cuối cho ta quan hệ giữa ma trận truyền hay ma trận độ mềm động lực học với các đặc trưng động lực học như sau

$$\hat{H}(\omega) = \hat{K}^{-1}(\omega) = [\hat{h}_{js}(\omega)] = \sum_{r=1}^N H_r(\omega) \Phi_r(j) \Phi_r(s)$$

hay là

$$\hat{H}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\Phi_r(j) \Phi_r(s)}{k_r - m_r \omega^2 + ic_r \omega} \quad (1.3.17)$$

Mối quan hệ mật thiết này cho phép ta phát biểu một mệnh đề:

Mệnh đề 1.2.2. Một hệ hữu hạn bậc tự do tuyến tính có thể hoàn toàn được xác định một cách tương đương bằng một trong ba mô hình: mô hình không gian, mô hình dao động và mô hình động lực học.

Từ biểu diễn (1.3.11), ta có

$$q_j(t) = \frac{\Phi_j^T M U(t)}{\Phi_j^T M \Phi_j}; \quad \dot{q}_j(t) = \frac{\Phi_j^T M \dot{U}(t)}{\Phi_j^T M \Phi_j} \quad (1.3.18)$$

Nghiệm của các phương trình tách rời (1.3.12) có dạng (1.2.31)

$$q_j(t) = e^{-\zeta_j \omega_j t} \left\{ q_j(0) \cos \omega_{D_j} t + \frac{\dot{q}_j(0) + q_j(0) \zeta_j \omega_j}{\omega_{D_j}} \sin \omega_{D_j} t \right\} + \frac{1}{m_j \omega_{D_j}} \int_0^t P_j(\tau) e^{-\zeta_j \omega_j (t-\tau)} \sin[\omega_{D_j} (t-\tau)] d\tau; \quad t > 0 \quad (1.3.19)$$

trong đó các điều kiện đầu $q_j(0); \dot{q}_j(0)$ có dạng (1.3.18) tại thời điểm $t=0$.

Xét hệ chịu tải trọng $P(t)$ có thành phần thứ j là hàm xung Delta – Dirac $P_j(t)=\delta(t)$, còn các thành phần khác đều bằng 0. Ký hiệu $h_{kj}(t)$ là chuyển vị của bậc tự do thứ k do tải trọng xung đơn vị $\delta(t)$ đặt tại bậc tự do thứ j gây ra. Hàm $h_{kj}(t)$ được gọi là hàm phản ứng xung của hệ nhiều bậc tự do. Giả thiết điều kiện đầu $U(0) = 0; \dot{U}(0) = 0$ và tải trọng thành phần $P_j(t)$ có dạng bất kỳ, khi đó chuyển vị tại bậc tự do k có dạng tích phân Duhamel (1.2.30)

$$U_{kj}(t) = \int_0^t P_j(\tau) h_{kj}(t-\tau) d\tau = \int_0^t P_j(t-\tau) h_{kj}(\tau) d\tau; \quad t > 0 \quad (1.3.20)$$

Vì $h_{ij}(t-\tau)=0$ với $t<\tau$ nên thực hiện biến đổi Fourier hai vế của (1.3.20), ta có

$$U_{kj}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} P_j(\tau) h_{kj}(t-\tau) d\tau \right] e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} P_j(\tau) h_{kj}(\theta) d\tau \right] e^{-i\omega(\tau+\theta)} d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} P_j(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} h_{kj}(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta = H_{kj}(\omega) P_j(\omega) \quad (1.3.21)$$

Như vậy, đối với hệ nhiều bậc tự do, ma trận hàm phản ứng xung $[h_{kj}(t)]$ và ma trận hàm truyền $[H_{kj}(\omega)]$ là các biến đổi Fourier của nhau

$$H_{kj}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_{kj}(t) e^{-i\omega t} dt; \quad h_{kj}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{kj}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1.3.22)$$

tương tự như hệ một bậc tự do (các công thức (1.2.32) và (1.2.33)).

Chuyển vị tại bậc tự do thứ k đối với véc tơ tải trọng $P(t)$ có dạng bất kỳ là

$$U_k(t) = \sum_{j=1}^N \int_0^t P_j(\tau) h_{kj}(t-\tau) d\tau; \quad k = 1, 2, \dots, N; \quad t > 0 \quad (1.3.23)$$

Kết hợp (1.3.21) với (1.3.23), ta có

$$U_k(\omega) = \sum_{j=1}^N H_{kj}(\omega) P_j(\omega) \quad (1.3.24)$$

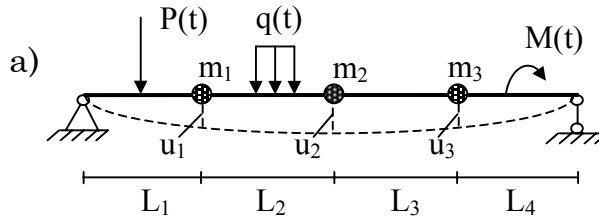
từ đó ta thu lại được biểu thức (1.3.10) và

$$U_k(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} H_{kj}(\omega) P_j(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1.3.25)$$

1.3.4. Ví dụ

Xét dao động của dầm không trọng lượng, trên dầm có 3 khối lượng tập trung m_1, m_2, m_3 (Hình 1.3.1). Các lực tác động lên hệ gồm

- Lực quán tính $-m_k \ddot{u}_k(t)$ và các lực cản $R_k(t)$ đặt tại khối lượng.
- Các lực ngoài $P(t), q(t)$ và $M(t)$.



Hình 1.3.1.

Theo nguyên lý Đalămbe, ta viết được phương trình chuyển động

$$u_k(t) = \delta_{k1} [-m_1 \ddot{u}_1(t) - R_1(t)] + \delta_{k2} [-m_2 \ddot{u}_2(t) - R_2(t)] + \delta_{k3} [-m_3 \ddot{u}_3(t) - R_3(t)] + \Delta_{kP}(t) \quad (1.3.26)$$

trong đó

- δ_{ki} là chuyển vị của khối lượng m_k do lực đơn vị đặt theo phương của chuyển vị u_i (chuyển vị tại khối lượng m_i) gây ra trong hệ.
- $\Delta_{kP}(t)$ là chuyển vị của khối lượng m_k do các tải trọng $P(t), q(t), M(t)$ gây ra với giả thiết $m_k=0$ (coi như bài toán tĩnh).

Giá trị các hệ số δ_{jk} và Δ_{kP} được xác định theo công thức tính chuyển vị của Marxell - Morh. Từ đó ta có

$$u_k(t) + \delta_{k1} [m_1 \ddot{u}_1(t) + R_1(t)] + \delta_{k2} [m_2 \ddot{u}_2(t) + R_2(t)] + \delta_{k3} [m_3 \ddot{u}_3(t) + R_3(t)] = \Delta_{kP}(t) \quad (1.3.27)$$

Xét trường hợp hệ dao động tự do không cản, khi đó dao động của các khối lượng có dạng $u_k(t) = \Phi_k e^{i\omega t}$, từ đó ta thu được phương trình

$$\begin{bmatrix} m_1 \delta_{11} - \frac{1}{\omega^2} & m_2 \delta_{12} & m_3 \delta_{13} \\ m_1 \delta_{21} & m_2 \delta_{22} - \frac{1}{\omega^2} & m_3 \delta_{23} \\ m_1 \delta_{31} & m_2 \delta_{32} & m_3 \delta_{33} - \frac{1}{\omega^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad (1.3.28)$$

Ký hiệu các ma trận

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}; \quad [H] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}; \quad [K] = [H]^{-1} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (1.3.29)$$

khi đó việc xác định các tần số và dạng riêng của hệ (1.3.28) đưa về dạng (1.3.4) và (1.3.5).

Giả thiết dầm gối tựa tự do hai đầu với $m_1=m_2=m_3=\rho A/4$ trong đó ρ là mật độ khối lượng, A là diện tích tiết diện ngang và các khối lượng được đặt cách đều nhau $L_1=L_2=L_3=L_4=L/4$, khi đó ta xác định được

$$[H] = \frac{L^3}{768EI} \begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix}; \quad M = \frac{\rho AL}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận độ cứng $[K]$ có dạng

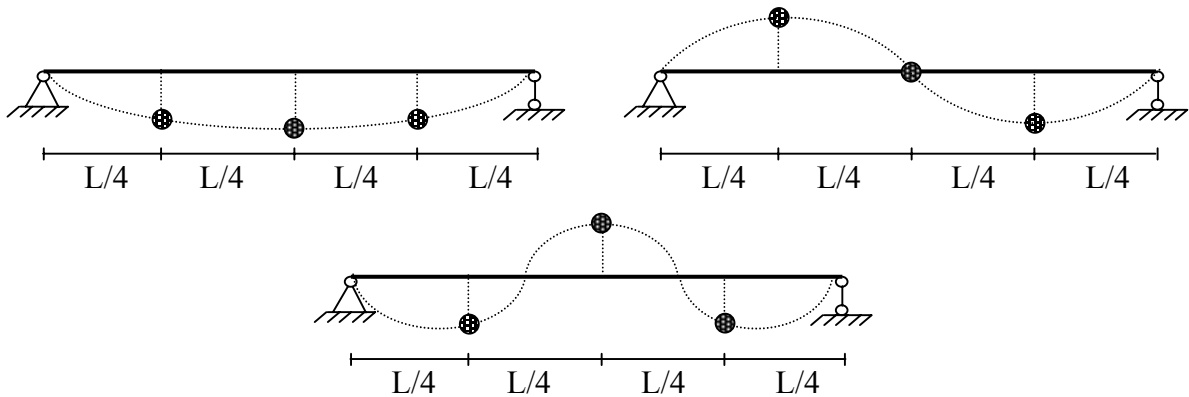
$$[K] = [H]^{-1} = \frac{192EI}{7L^3} \begin{bmatrix} 23 & -22 & 9 \\ -22 & 32 & -22 \\ 9 & -22 & 23 \end{bmatrix}$$

Từ đó ta thu được các tần số riêng

$$\omega_1 = \frac{9.8666}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}; \quad \omega_2 = \frac{39.1918}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}; \quad \omega_3 = \frac{83.2128}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}};$$

và các dạng riêng tương ứng

$$[\Phi] = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$



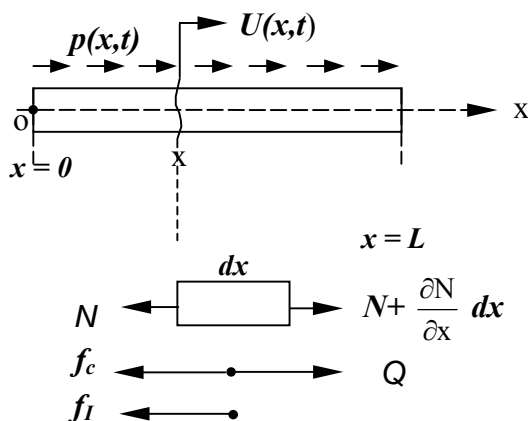
Hình 1.3.2. Các dạng dao động riêng của hệ 3 bậc tự do

1.4. Truyền sóng đàn hồi trong thanh

Bắt đầu từ đây chúng ta sẽ nghiên cứu các hệ vô số bậc tự do hay còn gọi là hệ liên tục. Hệ liên tục đơn giản nhất là kết cấu dạng thanh – một vật thể đàn hồi có một kích thước lớn hơn nhiều hai kích thước còn lại. Đặc điểm cơ bản nhất của thanh là chỉ làm việc trong trạng thái kéo nén dọc theo chiều dài của thanh và do đó chuyển vị và biến dạng cũng chỉ xét theo một trục dọc theo chiều dài thanh. Hơn thế nữa, trong quá trình biến dạng mặt cắt ngang luôn phẳng và chỉ bị chuyển dịch dọc theo trục. Vì lý do này người ta gọi đây là bài toán dao động dọc trục của thanh. Chúng ta gọi đề mục này là truyền sóng đàn hồi trong thanh bởi vì bản chất của dao động dọc trục của thanh chính là sự truyền sóng đàn hồi dọc theo thanh.

1.4.1. Phương trình chuyển động

Để đơn giản chúng ta xét một thanh thẳng có tiết diện đều với các đặc trưng hình học và vật liệu sau đây: E môđun đàn hồi; F diện tích tiết diện ngang; ρ - mật độ khối; L – chiều dài. Ký hiệu $u(x,t)$ là chuyển vị của mặt cắt tại x . Chọn hệ tọa độ là một trục trùng với trục của thanh bắt đầu từ đầu trái như trên Hình 1.4.1.



Hình 1.4.1.

Tác dụng lên phân tố phân tố thanh dx tại mặt cắt x gồm các lực

- Lực quán tính $f_I = \rho F dx \ddot{u}(x,t)$
- Các lực kéo ở hai đầu phân tố $N, N + \frac{\partial N}{\partial x} dx$
- Lực cản ngoài $f_c = c \dot{u}(x,t) dx$

- Tải trọng phân bố dọc theo thanh $Q = p(x,t)dx$

Hướng tác dụng của các lực này được xác định trong Hình 1.4.1.

Sử dụng nguyên lý D'alambert ta có thể thiết lập được phương trình

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial N}{\partial x} = p(x,t)$$

Theo định luật Hook $N = F\sigma = FE\varepsilon = EF \frac{\partial u}{\partial x}$, nên phương trình cuối có dạng

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) = p(x,t) \quad (1.4.1)$$

Đây là phương trình chuyển động dọc trục tổng quát của thanh, khi giải cần đến các điều kiện biên và điều kiện đầu.

1.4.2. Nghiệm sóng đàn hồi

Xét bài toán dao động tự do, khi lực ngoài và lực cản bằng không

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0$$

hay, trong trường hợp các tham số hình học, vật liệu là các hằng số ta được

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (1.4.2)$$

Đây là phương trình sóng một chiều với vận tốc truyền sóng bằng a phụ thuộc vào môi trường vật liệu, không phụ thuộc vào hình học của kết cấu. Dễ dàng nhận thấy phương trình cuối cho nghiệm tổng quát sau đây

$$u(x,t) = f(x-at) + g(x+at), \quad (1.4.3)$$

trong đó f, g là các hàm số bất kỳ, khả vi hai lần trên trục số, xác định từ điều kiện đầu và điều kiện biên. Xét thành phần thứ nhất, hiển nhiên là hình dáng của hàm $f(x)$ trong một đoạn (x_1, x_2) nào đó được xác định. Giả sử cả đoạn thẳng này được di chuyển dọc theo trục x với vận tốc đều là a . Khi đó vị trí x^* lúc đầu $t=0$, sau khoảng thời gian t sẽ chiếm vị trí $x^{**} = x^* + at$ và tính thành phần thứ nhất trong nghiệm (1.4.3) ta được

$$f(x^{**} - at) = f(x^* + at - at) = f(x^*)$$

Điều này chứng tỏ dáng điệu của hàm $f(x)$ không thay đổi mà được di chuyển tịnh tiến theo chiều dương của trục x với vận tốc bằng vận tốc

truyền sóng trong thanh a . Đây thực sự là sự lan truyền dạng sóng dọc theo trục thanh. Với lý luận tương tự, ta thấy thành phần thứ hai mô tả sự truyền sóng theo chiều ngược lại. Như vậy, nói chung, tại một vị trí bất kỳ trong thanh đã bị kích động luôn tồn tại hai sóng được lan truyền theo hai hướng ngược nhau.

Ta xét sự truyền sóng trong thanh chiều dài L với một đầu ngàm cứng ($u(0,t)=0$) và một đầu tự do ($\frac{\partial u}{\partial x}(x=L)=0$).

Bằng phương pháp tách biến, biểu diễn

$$u = T(t)\Phi(x)$$

phương trình (1.4.2) được đưa về hai phương trình

$$\begin{aligned} \ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) &= 0 \\ \Phi''(x) + (\omega/a)^2 \Phi &= 0 \end{aligned}$$

Với các điều kiện biên trên, chúng ta tìm được

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_n = \frac{\pi a}{L}(n - 1/2) \\ \Phi(x) &= \Phi_n(x) = C_n \sin \frac{\omega_n x}{a}, n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

và cuối cùng ta được

$$u(x,t) = \sum_n A_n \left\{ \cos \left[\frac{\omega_n}{a}(x-at) - \theta_n \right] - \cos \left[\frac{\omega_n}{a}(x+at) + \theta_n \right] \right\} \quad (1.4.5)$$

Các hằng số A_n, θ_n xác định từ điều kiện đầu. Biểu thức cuối thể hiện sự truyền sóng chuyển vị hình *cosin* trong thanh theo hai hướng ngược nhau.

Tương tự ta có thể tìm được biểu thức của sóng ứng suất

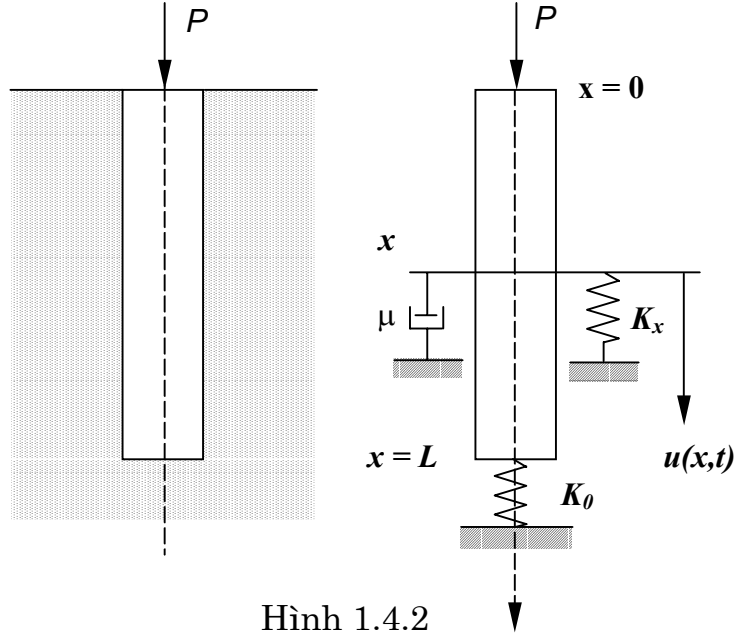
$$\sigma(x,t) = E \frac{\partial u}{\partial x} = -\sum_n \frac{EA_n \omega_n}{a} \left\{ \sin \left[\frac{\omega_n}{a}(x-at) - \theta_n \right] - \sin \left[\frac{\omega_n}{a}(x+at) + \theta_n \right] \right\} \quad (1.4.6)$$

1.4.3. Truyền sóng cưỡng bức trong thanh.

Trong phần này chúng ta nghiên cứu một bài toán cụ thể về sự truyền sóng trong một cột cho trong Hình 1.4.2.

Xét một thanh chiều dài L , có môđun đàn hồi E , tiết diện F , mật độ khối ρ . Giả thiết các tham số nêu trên không đổi và tại đầu $x=0$ có một lực xung tác dụng dọc trục thanh. Đất được mô tả bằng hệ số nền xung quanh

thân cọc là K_x , tại mũi cọc là K_0 . Giả thiết lực cản nhớt xung quanh thân cọc là chủ yếu và có hệ số bằng μ (bỏ qua lực cản nhớt ở mũi cọc).



Hình 1.4.2

Khi đó phương trình truyền sóng đàn hồi trong thanh có dạng

$$\rho F \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + K_x u(x,t) - EF \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = P(t)\delta(x) \quad (1.4.7)$$

cùng với điều kiện biên là

$$\begin{aligned} EF \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} &= 0 \\ EF \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} &= K_0 u(L,t) \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

Trước hết ta xét bài toán dao động riêng, tức là khi $P = 0$. Khi đó tìm nghiệm phương trình thuần nhất (không có vế phải) ở dạng

$$u(x,t) = \phi(x) \exp[(-h + i\omega)t]; \quad h = \frac{\mu}{2\rho F}$$

ta sẽ nhận được phương trình

$$\begin{aligned} \phi''(x) + \lambda^2 \phi(x) &= 0 \\ \lambda &= \sqrt{\frac{\omega^2 + h^2}{c^2} - k_x}, \quad k_x = \frac{K_x}{EF}, \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

và điều kiện biên

$$\begin{aligned}\phi'(0) &= 0 \\ \phi'(L) - k_0\phi(L) &= 0 \\ k_0 &= \frac{K_0}{EF}.\end{aligned}\tag{1.4.10}$$

Giải phương trình (1.4.7),(1.4.8) ta được nghiệm

$$\begin{aligned}\phi_n(x) &= A_n \cos \lambda_n x \\ A_n &= 2 \sqrt{\frac{\lambda_n}{2\lambda_n L + \sin 2\lambda_n L}},\end{aligned}\tag{1.4.11}$$

trong đó $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ là nghiệm của phương trình đại số

$$\lambda \tan \lambda L = k_0$$

hay phương trình rút gọn

$$\beta \tan \beta = z\tag{1.4.12}$$

với $\beta = \lambda L, z = k_0 L$.

Phương trình (1.4.12) có thể giải bằng số với mỗi z cho trước, khi đó kết quả cho phép ta xác định được các tần số riêng

$$\omega_n(z) = \sqrt{c^2 [k_x + \lambda_n^2(z)] - h^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots\tag{1.4.13}$$

Xét nghiệm phương trình (1.4.12) phụ thuộc vào biến z (độ cứng đất ở mũi cọc), ta thấy, khi $z=0$,

$$\beta_n(0) = n\pi \text{ hay } \lambda_n^0 = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

và tương tự ta có

$$\beta_n(\infty) = (n - 0.5)\pi \text{ hay } \lambda_n^\infty = \frac{(n - 0.5)\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

tức là tần số của hệ cọc nền thực tế bị giới hạn bởi tần số riêng trong hai trường hợp tới hạn này.

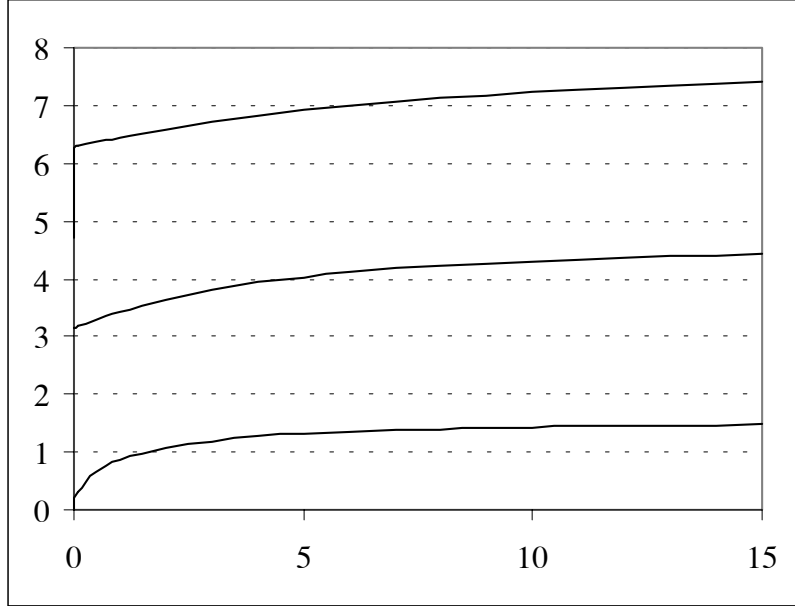
Đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của β vào z (Hình 1.4.3.) cho thấy tần số chỉ nhạy cảm với độ cứng mũi cọc khi giá trị của độ cứng mũi nhỏ. Nếu độ cứng đất ở mũi cọc đạt đến giá trị $10EF/L$ thì hầu như nó không thay đổi nhiều.

Để nghiên cứu phản ứng của hệ cọc nền dưới tác dụng của lực P_0 , ta viết lại phương trình (1.4.7) dưới dạng

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + 2h \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + k_x c^2 u(x,t) - c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \bar{P}(t) \delta(x)$$

trong đó ký hiệu

$$\bar{P}(t) = \frac{P(t)}{\rho F}$$



Hình 1.4.3. Ba nghiệm đầu tiên của phương trình (1.4.12) phụ thuộc vào z

Ta tìm nghiệm phương trình ở dạng

$$u(x,t) = \sum_{n=1} q_n(t) \phi_n(x) \tag{1.4.14}$$

với $\phi_n(x)$ xác định bằng công thức (1.4.11). Vì các hàm $\phi_n(x)$ thoả mãn điều kiện biên (1.4.10) nên nghiệm (1.4.14) thoả mãn điều kiện biên (1.4.8). Hơn nữa, vì $\phi_n(x)$ thoả mãn phương trình (1.4.9) nên ta sẽ có

$$\sum_{n=1} [\ddot{q}_n(t) + 2h\dot{q}_n(t) + c^2(k_x + \lambda_n^2)q_n(t)] \phi_n(x) = \bar{P}(t) \delta(x)$$

Nhân hai vế phương trình cuối với $\phi_m(x)$ và tích phân hai vế theo x từ 0 đến L , do tính trực giao của hàm cosin nên ta được

$$\ddot{q}_n(t) + 2h\dot{q}_n(t) + \bar{\omega}_n^2 q_n(t) = p_n(t)$$

với

$$p_n(t) = \bar{P}(t) A_n$$

$$\bar{\omega}_n^2 = \omega_n^2 + h = c^2(k_x + \lambda_n^2)$$

Ký hiệu

$$Q_n(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} q_n(t) dt$$

$$\hat{P}_n(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} p_n(t) dt$$

$$U(x, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} u(x, t) dt$$

$$\hat{P}(\omega) = \frac{1}{\rho F} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) e^{-i\omega t} dt$$

với hàm $P(t)$ là lực kích động cho trước ở đầu cọc. Khi đó ta có

$$Q_n(\omega) = \frac{\hat{P}_n(\omega)}{\bar{\omega}_n^2 - \omega^2 + 2ih\omega}$$

và do đó

$$U(x, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{P}_n(\omega) A_n \cos \lambda_n x}{\bar{\omega}_n^2 - \omega^2 + 2ih\omega} = \hat{P}(\omega) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2 \cos \lambda_n x}{\bar{\omega}_n^2 - \omega^2 + 2ih\omega} \quad (1.4.15)$$

Từ (1.4.15) ta có thể tính được hàm phổ chuyển vị

$$S_u(x, \omega) = S_p(\omega) \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{A_n^2 A_m^2 \cos \lambda_n x \cos \lambda_m x}{(\bar{\omega}_n^2 - \omega^2 + 2ih\omega)(\bar{\omega}_m^2 - \omega^2 + 2ih\omega)} \quad (1.4.16)$$

Tương tự ta có trường biến dạng bằng

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -\sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) A_n \lambda_n \sin \lambda_n x \quad (1.4.17)$$

và tương ứng

$$\hat{\varepsilon}(x, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(x, t) e^{-i\omega t} dt = \frac{\partial U(x, \omega)}{\partial x} = -\hat{P}(\omega) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2 \lambda_n \sin \lambda_n x}{\bar{\omega}_n^2 - \omega^2 + 2ih\omega} \quad (1.4.18)$$

Lúc này nội lực trong cọc bằng

$$N(x, t) = -EF \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = EF \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) A_n \lambda_n \sin \lambda_n x$$

và tương ứng phổ tần số của nội lực là

$$\hat{N}(x, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} N(x, t) e^{-i\omega t} dt = -EF \frac{\partial U(x, \omega)}{\partial x} = EF \hat{P}(\omega) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2 \lambda_n \sin \lambda_n x}{\bar{\omega}_n^2 - \omega^2 + 2ih\omega}$$

1.5. Dao động uốn của dầm đàn hồi

Về kết cấu dầm

Dầm là một dạng kết cấu đơn giản cùng với thanh. Nếu trong thanh người ta chỉ quan tâm đến sự kéo nén và biến dạng dọc trục, thì với dầm, cũng có kết cấu dạng thanh như vậy, ta xem xét biến dạng ngang vuông góc với trục thanh gọi là uốn. Cũng như thanh, hình học của dầm được xác định bằng hai kích thước: chiều dài và tiết diện ngang. Trong đó tiết diện ngang có thể có hình dạng khác nhau như hình chữ nhật, hình tròn,..., nhưng nói chung cũng lại được xác định bằng hai kích thước khác nhau, hay đặc biệt cũng có trường hợp người ta chỉ xét một kích thước đặc trưng cho tiết diện. Theo một số kết quả nghiên cứu thì khái niệm về dầm chỉ được sử dụng khi chiều dài lớn hơn nhiều các kích thước còn lại. Nếu chiều dài và kích thước của tiết diện có cùng cỡ (tỷ lệ nhỏ hơn 10) thì mô hình dầm không còn tác dụng nữa.

Trong nghiên cứu mô hình dầm, người ta phân loại dầm như sau

1. Dầm Euler-Bernoulli là loại dầm thoả mãn các giả thiết sau:

- Tiết diện ngang luôn luôn là phẳng trong mọi trạng thái biến dạng.
- Mặt đối xứng của dầm luôn trùng với mặt phẳng dao động (hay tiết diện ngang luôn luôn vuông góc với trục trung hoà).
- Quán tính quay và biến dạng trượt có thể bỏ qua.

2. Dầm Timôshencô là loại dầm trong đó điều kiện thứ hai và ba không còn thoả mãn nữa. Điều này xảy ra khi chiều dài dầm không đủ lớn so với kích thước tiết diện ngang (tỷ lệ nhỏ hơn 10).

Hiện tượng tiết diện ngang không còn phẳng khi biến dạng là rất phức tạp, còn ít được nghiên cứu và là một loại dầm thứ ba. Trong giáo trình này chủ yếu là xem xét dầm đơn giản Euler-Bernoulli.

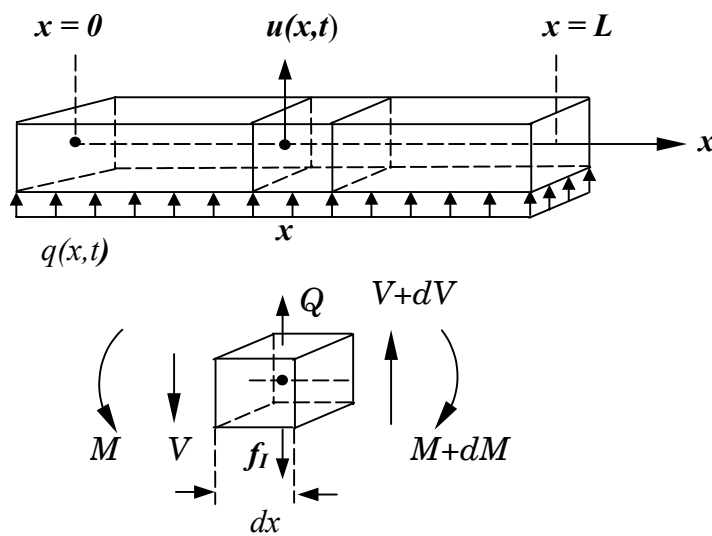
1.4.1. Phương trình dao động uốn của dầm

a) Dầm Euler-Bernoulli

Xét dầm cho trong Hình 1.5.1. và tách một phần tử dầm có chiều dài dx . Các tham số của dầm là môđun đàn hồi E , mật độ khối ρ , diện tích tiết diện F , chiều dài L và mô men quán tính của tiết diện là I . Ký hiệu chuyển vị ngang của tiết diện tại x là $u(x,t)$.

Các lực và mô men tác dụng lên phần tử dầm này gồm

- Các lực cắt tại hai đầu x và $x+dx$ gồm lực cắt $V(x,t)$, $V(x,t) + \frac{\partial V}{\partial x} dx$
- Tải trọng ngoài phân bố theo dầm $Q = q(x,t)dx$
- Lực quán tính $f_I = \rho F \ddot{u}(x,t)dx$
- Mômen uốn tại hai đầu $M(x,t)$, $M(x,t) + \frac{\partial M}{\partial x} dx$
- Mômen của lực ngoài là $q(x,t) \frac{dx^2}{2}$



Hình 1.5.1

Cân bằng các lực và mômen, bỏ qua thành phần bậc cao của dx và lực cản ta được hai phương trình

$$\rho F \ddot{u}(x,t) - \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = q(x,t) \tag{1.5.1}$$

$$V(x,t) = \frac{\partial M(x,t)}{\partial x}$$

Sử dụng quan hệ quen thuộc trong sức bền vật liệu

$$M(x,t) = -EI \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

từ hệ phương trình trên ta được một phương trình

$$\rho F \ddot{u}(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] = q(x,t) \tag{1.5.2}$$

Đây là phương trình đạo hàm riêng cấp 4, khi giải cần đến 4 điều kiện biên liên quan đến chuyển vị, góc xoay, lực cắt và mô men uốn ở hai đầu dầm.

Nếu xét đến lực cản nội được mô hình hoá có dạng

$$M(x,t) = -EI \left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right]$$

và cản môi trường có dạng

$$F_c(x,t) = C \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx$$

ta sẽ nhận được phương trình

$$\rho F \ddot{u}(x,t) + C \dot{u}(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right) \right] = q(x,t) \quad (1.5.3)$$

Xét trường hợp kể đến lực dọc trục N , trong trường hợp này sẽ gây ra một mô men thêm vào bằng

$$\pm N \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dx$$

dấu cộng khi lực kéo và dấu trừ khi lực nén, và do đó

$$V(x,t) = -EI \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} \mp N \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

ta sẽ nhận được phương trình

$$\rho F \ddot{u}(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] \mp \frac{\partial}{\partial x} \left[N \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] = q(x,t) \quad (1.5.4)$$

Xét dầm tựa trên nền đàn hồi với hệ số nền là k_n , ta có phương trình

$$\rho F \ddot{u}(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] + k_n u(x,t) = q(x,t) \quad (1.5.5)$$

b) Dầm Timôshencô

Timôshencô đã phát triển dầm Euler-Bernoulli để nghiên cứu trường hợp dầm không phải là đủ dài để có thể bỏ qua biến dạng trượt và tính đến cả quán tính quay của phần tử dầm. Kể đến biến dạng trượt của dầm có nghĩa là thêm vào góc xoay do uốn bằng $\partial u / \partial x$ một góc trượt θ nào đó để có được góc xoay tổng thể của mặt cắt so với trục cân bằng ban đầu có dạng

$$\varphi(x,t) = \theta + \partial u / \partial x$$

Khi đó ta sẽ có

$$M(x, t) = -EI \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x}$$

$$V(x, t) = -\alpha GF \theta = \alpha GF \left[\varphi(x, t) - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right]$$

Lúc này các phương trình cân bằng lực và mômen cho ta hệ

$$\rho F \ddot{u}(x, t) + \alpha FG \frac{\partial}{\partial x} \left[\varphi(x, t) - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] = q(x, t)$$

$$\rho I \ddot{\varphi}(x, t) + \alpha FG \left[\varphi(x, t) - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[EI \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} \right] = 0 \quad (1.5.6)$$

Trong các công thức trên G là môđun trượt, α là hệ số trượt để điều chỉnh theo hình dạng của tiết diện ngang, $\rho I \ddot{\varphi}$ là quán tính quay của phần tử.

Nếu tất cả các tham số là hằng số thì hệ phương trình cuối có thể đưa về một phương trình

$$\rho F \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{\alpha G} \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial t^4} + EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} - \rho I \left(1 + \frac{E}{\alpha G} \right) \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2}$$

$$= q(x, t) + \frac{\rho I}{\alpha FG} \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial t^2} - \frac{EI}{\alpha FG} \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial x^2} \quad (1.5.7)$$

Đối với phương trình (1.5.7) các điều kiện biên phải tuân thủ đúng công thức của góc xoay, lực cắt và mômen uốn theo Timôshencô. Từ phương trình (1.5.7) ta thấy nếu nếu thanh đủ mảnh để có thể bỏ qua biến dạng trượt ($\alpha G \rightarrow \infty$) và không tính đến quán tính quay ($\rho I \rightarrow 0$), mô hình dầm Timôshencô trở thành mô hình dầm Bernoulli (1.5.2).

1.5.2. Dao động riêng và các đặc trưng dao động của dầm

Xét dao động riêng không cản của dầm được mô tả bởi phương trình

$$\rho F \ddot{u}(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] = 0$$

Ta tìm nghiệm của phương trình ở dạng

$$u(x, t) = e^{i\omega t} \Phi(x)$$

trong đó ω là tần số riêng và $\Phi(x)$ là dạng dao động riêng.

Khi đó, phương trình đối với $\Phi(x)$ có dạng

$$-\rho F \omega^2 \Phi(x) + \frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} \right] = 0$$

Giải phương trình này cùng với các điều kiện biên sẽ cho ta các tần số riêng $\omega_j, j = 1, 2, \dots, \infty$ và các dạng riêng tương ứng $\Phi_j(x), j = 1, 2, \dots, \infty$.

a) Tính trực giao của các dạng riêng

Theo định lý Betti "công của lực quán tính của dạng dao động riêng thứ j trên chuyển vị theo dạng dao động riêng thứ k bằng công của lực quán tính ứng với dạng dao động riêng thứ k trên chuyển vị theo dạng riêng thứ j ". Điều này có thể biểu diễn bằng công thức

$$\begin{aligned} \int_0^L f_{I_j}(x, t) u_k(x, t) dx &= \int_0^L f_{I_k}(x, t) u_j(x, t) dx; f_{I_n}(x, t) = \\ &= -\rho F \ddot{u}_n(x, t) = \rho F \omega_n^2 e^{i\omega t} \Phi_n(x) \end{aligned}$$

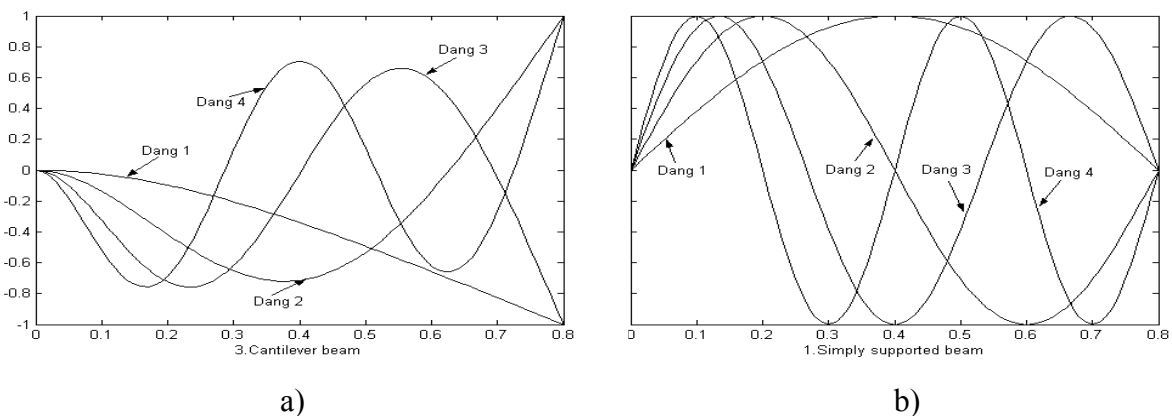
Từ đây ta có

$$(\omega_j^2 - \omega_k^2) \int_0^L \rho F \Phi_j(x) \Phi_k(x) dx = 0$$

với $\omega_j^2 \neq \omega_k^2$, hay là

$$\int_0^L \rho F \Phi_j(x) \Phi_k(x) dx = 0 \tag{1.5.8}$$

Biểu thức (1.5.8) thể hiện tính chất trực giao đầu tiên của các dạng riêng.



Hình 1.5.2. Bốn dạng dao động đầu tiên a) dầm công xôn; b) dầm đơn giản

Mặt khác, từ (1.5.8), kể đến phương trình

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 \Phi_j(x)}{dx^2} \right] = \rho F \omega_j^2 \Phi_j(x)$$

ta có

$$(\omega_j^2 - \omega_k^2) \int_0^L \Phi_j(x) \frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 \Phi_k(x)}{dx^2} \right] dx = 0$$

với $\omega_j^2 \neq \omega_k^2$, suy ra

$$\int_0^L \Phi_j(x) \frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 \Phi_k(x)}{dx^2} \right] dx = 0$$

Tích phân từng phần hai lần biểu thức cuối ta được

$$\Phi_j(x)V_k(x) \Big|_0^L - \Phi_j'(x)M_k(x) \Big|_0^L + \int_0^L \Phi_j''(x)\Phi_k''(x)EI(x)dx = 0 \quad (1.5.9)$$

Biểu thức (1.5.9) thể hiện tính chất trực giao thứ hai của các dạng riêng với hai thành phần đầu biểu diễn công của các lực cắt và mômen ở biên và các dấu phẩy trên các hàm chỉ đạo hàm của chúng theo x .

b) Phương trình tần số trong các trường hợp điều kiện biên thuần nhất

Ta xét trường hợp các hệ số E, F, I, ρ là hằng số. Khi đó phương trình xác định các dạng riêng là

$$\begin{aligned} \Phi^{(IV)}(x) - \lambda^4 \Phi(x) &= 0 \\ \lambda^4 = \omega^2 \frac{\rho F}{EI} \text{ hay } \omega &= a_0 \lambda^2, a_0 = \sqrt{\frac{EI}{\rho F}} \end{aligned} \quad (1.5.10)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình có dạng

$$\Phi(x) = A \cosh(\lambda x) + B \sinh(\lambda x) + C \cos(\lambda x) + D \sin(\lambda x)$$

trong đó A, B, C, D là các hằng số phải tìm từ điều kiện biên. Ta sẽ nghiên cứu các trường hợp điều kiện biên cổ điển sau đây.

Trường hợp gối tựa hai đầu: Khi đó điều kiện biên có dạng

$$\Phi(0) = \Phi''(0) = \Phi(L) = \Phi''(L) = 0 \quad (1.5.10)$$

Thay (1.5.10) vào biểu thức của $\Phi(x)$, ta được hệ 4 phương trình

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ A - C = 0 \\ B \sinh \lambda L + D \sin \lambda L = 0 \\ B \sinh \lambda L - D \sin \lambda L = 0 \end{cases}$$

suy ra $A=0, C=0$ và để $B \neq 0$ hay $D \neq 0$, thì định thức của hệ phải bằng 0

$$\sinh \lambda L \sin \lambda L = 0$$

thu được

$$\sin \lambda L = 0 \quad (1.5.11)$$

là phương trình tần số cho dầm gối tựa đơn giản mà có nghiệm là

$$\lambda_j = j\pi / L, j = 1, 2, \dots$$

hay

$$\omega_j = a_0 (j\pi / L)^2, j = 1, 2, 3, \dots$$

Với mỗi tần số riêng ω_j tìm được, dạng riêng $\Phi_j(x)$ tương ứng sẽ chứa một hằng số tùy ý C_j và có dạng

$$\Phi_j(x) = C_j \sin j\pi x / L.$$

Hằng số này có thể được xác định nhờ các điều kiện chuẩn hoá, ví dụ

$$\int_0^L \Phi_j^2(x) dx = 1$$

khi đó

$$C_j = \sqrt{2/L}$$

Trường hợp dầm công xôn: Tại đầu ngàm ta có điều kiện biên

$$\Phi(0) = \Phi'(0) = 0$$

và tại đầu tự do

$$\Phi''(L) = \Phi'''(L) = 0$$

Khi đó, phương trình tần số có dạng

$$\cos \lambda L \cosh \lambda L + 1 = 0 \quad (1.5.12)$$

và các nghiệm là

$$\begin{aligned} \lambda_1 L &= 1.8751; \lambda_2 L = 4.6941; \lambda_3 L = 7.8547; \\ \lambda_4 L &= 10.9955; \lambda_5 L = 14.1372; \lambda_n L \approx (n - 0.5)\pi, n \geq 6; \end{aligned}$$

Trường hợp ngàm hai đầu: Phương trình tần số có dạng

$$\cos \lambda L \cosh \lambda L - 1 = 0 \quad (1.5.13)$$

và các nghiệm là

$$\lambda_1 L = 4.7300; \lambda_2 L = 7.8532; \lambda_3 L = 10.9956;$$

$$\lambda_4 L = 14.1371; \lambda_5 L = 17.2787; \lambda_n L \approx (n + 0.5)\pi, n \geq 6;$$

Trường hợp hai đầu tự do: cho ta kết quả trùng với trường hợp ngàm hai đầu (1.5.13) nhưng lưu ý rằng tần số đầu tiên có thể bằng không.

c) *Ảnh hưởng của lực dọc và nền đàn hồi đến tần số riêng của dầm*

Giả thiết các tham số dầm và giá trị lực dọc không đổi, khi đó phương trình dao động uốn của dầm có dạng

$$\rho F \ddot{u}(x,t) + EI \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} \pm N \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0 \tag{1.5.14}$$

với quy ước dấu +N nếu lực N là nén và dấu -N nếu lực N là kéo. Dễ dàng nhận thấy phương trình để xác định dạng dao động riêng sẽ là

$$\Phi^{(IV)}(x) \pm 2s\Phi''(x) - \lambda^4 \Phi(x) = 0$$

$$\lambda^4 = \omega^2 \frac{\rho F}{EI}, s = \frac{N}{2EI}$$

Phương trình đặc trưng

$$p^4 \pm 2sp^2 - \lambda^4 = 0$$

có 4 nghiệm $\pm \lambda_1; \pm \lambda_2$ khi kéo và $\pm \lambda_2; \pm \lambda_1$ khi nén, trong đó

$$\lambda_1 = \sqrt{s + \sqrt{s^2 + \lambda^4}}; \lambda_2 = \sqrt{-s + \sqrt{s^2 + \lambda^4}}, i = \sqrt{-1}$$

Xét trường hợp khớp hai đầu, ta có

$$\sqrt{s + \sqrt{s^2 + \lambda^4}} = n\pi / L$$

cho lực nén và

$$\sqrt{-s + \sqrt{s^2 + \lambda^4}} = n\pi / L$$

cho lực kéo. Từ hai phương trình này ta có thể nhận được

$$\omega_n^2 = \frac{EI}{\rho F} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 \left[1 \mp \frac{NL^2}{EI n^2 \pi^2} \right] \tag{1.5.15}$$

với dấu trừ khi nén và dấu cộng khi kéo.

Trong trường hợp $N=0$, ta có

$$\bar{\omega}_n^2 = \frac{EI}{\rho F} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4$$

vì vậy

$$\frac{\omega_n^2}{\omega_0^2} = \left[1 \mp \frac{N}{n^2 P_c} \right] \quad (1.5.16)$$

trong đó $P_c = \frac{EI\pi^2}{L^2}$ gọi là tải tới hạn. Dễ dàng nhận thấy dao động chỉ tồn tại khi lực nén $N < P_c$ (ổn định). Khi đó tần số của dầm bị nén giảm đi và của dầm bị kéo tăng lên. Điều này tương ứng với âm thanh của dây đàn càng cao khi càng bị kéo căng hơn. Đặc biệt, khi lực nén N dần tới giá trị tới hạn P_c thì tần số đầu tiên của dầm dần tới 0. Điều đó thể hiện sự chuyển đổi trạng thái dao động có ý nghĩa rất quan trọng trong việc nghiên cứu ổn định của dầm.

d) Dầm trên nền đàn hồi

Từ phương trình (1.5.5) ta có phương trình dao động riêng của dầm trên nền đàn hồi có dạng

$$\rho F \ddot{u}(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] + k_n u(x,t) = 0 \quad (1.5.17)$$

Các dạng dao động riêng được xác định từ phương trình

$$\Phi^{(IV)}(x) - \lambda^4 \Phi(x) = 0$$

với

$$\lambda^4 = \omega^2 \frac{\rho F}{EI} - \frac{k_n}{EI}$$

Do đó, tham số λ sẽ được tìm từ phương trình tần số thông thường như trong các trường hợp không có nền đàn hồi. Giả sử ta có được $\lambda_n, n = 1, 2, 3, \dots$, khi đó các tần số riêng tương ứng sẽ là

$$\omega_n = \frac{1}{a_0} \left(\lambda_n^4 + \frac{k_n}{EI} \right)^{1/2}, \quad a_0 = \sqrt{\frac{EI}{\rho F}} \quad (1.5.18)$$

Công thức (1.5.18) cho ta thấy nền đàn hồi làm tăng tần số riêng của dầm.

1.5.3. Dao động cưỡng bức của dầm đàn hồi.

Xét phương trình (1.5.3) với tải trọng khác không. Giả sử tần số riêng và dạng dao động riêng đã chuẩn hoá tương ứng là $\omega_j, \phi_j(x), j = 1, 2, 3, \dots$. Khi đó tìm nghiệm phương trình đã cho ở dạng

$$u(x,t) = \sum_j \xi_j(t) \phi_j(x)$$

trong đó $\xi_j(t), j = 1, 2, 3, \dots$ gọi là các toạ độ suy rộng. Thay biểu thức này vào phương trình (1.5.3), sử dụng tính trực giao của các dạng riêng ta được

$$\ddot{\xi}_j(t) + 2h_j \dot{\xi}_j(t) + \omega_j^2 \xi_j(t) = q_j(t)$$

với ký hiệu

$$q_j(t) \equiv \frac{1}{\rho F} \int_0^L q(x,t) \phi_j(x) dx$$

$$2h_j = \frac{c}{\rho F} + \omega_j^2 \mu$$

Nếu chỉ xét dao động dừng của hệ, thì từ phương trình cuối ta có thể tìm biên độ (phức) dao động dừng của toạ độ suy rộng bằng

$$\Psi(\omega) = \frac{Q_j(\omega)}{\omega_j^2 - \omega^2 + 2ih_j\omega} = H_j(\omega) Q_j(\omega)$$

trong đó

$$H_j(\omega) = \frac{1}{\omega_j^2 - \omega^2 + 2ih_j\omega}$$

và $Q_j(\omega)$ là biên độ phức của lực suy rộng $q_j(t)$. Cuối cùng ta xác định được biên độ phức của trường chuyển vị ngang của dầm là

$$w(x,\omega) = \sum_j Q_j(\omega) H_j(\omega) \phi_j(x) \tag{1.5.19}$$

Lúc đó hàm số

$$S_w(x,\omega) = \sum_{j,k} Q_j(\omega) Q_k^*(\omega) H_j(\omega) H_k^*(\omega) \phi_j(x) \phi_k(x) \tag{1.5.20}$$

với dấu sao (*) chỉ liên hợp phức, được gọi là phổ chuyển vị ngang của dầm. Dễ dàng nhận thấy phổ chuyển vị là hàm thực. Như vậy thực chất phổ chuyển vị cho ta bình phương biên độ dao động là hàm số của tần số lực kích động và toạ độ dọc theo dầm.

Chương 2

NHỮNG PHƯƠNG PHÁP TÍNH TOÁN CƠ BẢN CỦA ĐỘNG LỰC HỌC CÔNG TRÌNH

2.1. Phương pháp ma trận hệ số ảnh hưởng

Công trình, như đã nói ở phần đầu là một hệ liên tục rất phức tạp, có vô số bậc tự do. Những phương pháp giải tích đã được trình bày trong mục 1.5. chỉ áp dụng cho các hệ đơn giản như thanh, dầm, bản, mà không thể sử dụng cho các kết cấu phức tạp hơn như hệ khung, dàn hay hệ dàn hồi ba chiều. Để nghiên cứu các hệ phức tạp này, đòi hỏi phải có những phương pháp chuyên dụng đơn giản và hiệu quả. Đường lối chung vẫn là tìm cách thay thế hệ liên tục bằng một hệ rời rạc có hữu hạn bậc tự do. Phương pháp cổ điển, đơn giản nhất trong số đó là phương pháp ma trận hệ số ảnh hưởng, được trình bày sau đây. Trước tiên ta đưa ra khái niệm chung về các ma trận độ cứng và khối lượng của hệ hữu hạn bậc tự do theo quan điểm của cơ học vật rắn biến dạng.

2.1.1. Một số khái niệm.

Giả sử ta có một vật thể đàn hồi tuyến tính (hệ liên tục) chiếm một miền D trong không gian. Trong miền D của vật thể chọn một tập hữu hạn các điểm nút Ω và tương ứng sẽ có một trường chuyển vị của vật thể tại các điểm nút, tạo thành một véc tơ $U = \{U_1, \dots, U_N\}^T$ có N thành phần. Mỗi thành phần của véc tơ này là chuyển vị của vật thể tại điểm nút nào đó có cả hướng xác định. Để ngắn gọn, ta quy ước gọi chỉ số của mỗi thành phần chuyển vị này là một chất điểm hay một điểm của vật thể (bao hàm cả vị trí và hướng). Lúc này véc tơ U còn được gọi là véc tơ *toa độ suy rộng* của hệ cơ học hữu hạn bậc tự do mô tả một cách gần đúng (rời rạc) hệ liên tục đã cho.

- *Ma trận khối lượng* của hệ, ký hiệu là M với các phần tử $[m_{ij}, i, j = 1, \dots, N]$ được xác định bằng

$$m_{ij} = \frac{f_i^I}{A_j}$$

trong đó f_i^I là lực tác dụng vào chất điểm i gây nên gia tốc A_j của chất điểm j . Nói cách khác, *khối lượng của một chất điểm là độ lớn của lực tác dụng gây nên một đơn vị gia tốc của chất điểm đó.*

- **Ma trận độ cứng K** với các phần tử $[k_{ij}, i, j = 1, \dots, N]$ được xác định bởi

$$k_{ij} = \frac{P_i}{U_j}$$

trong đó P_i là lực tác dụng vào chất điểm i gây ra chuyển vị U_j tại điểm j . Nói cách khác, **độ cứng k_{ij} chính là độ lớn của lực tác dụng vào vật ở điểm i gây ra chuyển vị bằng một đơn vị tại điểm j .**

- **Ma trận độ mềm hay ma trận hệ số ảnh hưởng H** với các thành phần

$$h_{ij} = \frac{U_i}{P_j}$$

là chuyển vị tại điểm i được gây ra bởi lực một đơn vị tại điểm j . Đại lượng này còn được gọi là **hệ số ảnh hưởng**.

- **Ma trận hệ số cản** là $C = [c_{ij}; i, j = 1, \dots, N]$ với các thành phần

$$c_{ij} = \frac{f_i^c}{V_j}$$

trong đó f_i^c là lực cản tác dụng vào chất điểm i và V_j là vận tốc của chất điểm j .

Bổ đề 2.1.1. Các ma trận khối lượng M , độ cứng K và ma trận độ mềm (hệ số ảnh hưởng) H đều là các ma trận đối xứng, xác định dương.

Tính đối xứng được chứng minh nhờ định lý Betti, khẳng định rằng công của tập hợp các lực gây nên một trường chuyển vị thứ nhất trên trường chuyển vị được gây nên bởi tập hợp lực thứ hai bằng công của tập hợp lực thứ hai trên trường chuyển vị thứ nhất.

Tính xác định dương của các ma trận này được suy ra từ thực tế: động năng và thế năng của một vật thể đàn hồi luôn luôn là các đại lượng xác định dương.

Bổ đề 2.1.2. Hai ma trận độ cứng K và ma trận độ mềm (hệ số ảnh hưởng) H tạo thành một cặp nghịch đảo, tức $K.H = I$, hay $K = H^{-1}$.

Thật vậy, theo các định nghĩa trên, nếu ký hiệu tập hợp lực tác dụng là $P = \{P_1, \dots, P_N\}$, tương ứng với véc tơ chuyển vị $U = \{U_1, \dots, U_N\}^T$, ta có

$$P = KU$$

và

$$U = HP$$

Từ đó ta có

$$P = K.H.P$$

suy ra

$$K.H = I$$

Chính mối liên hệ này là cốt lõi của phương pháp ma trận hệ số ảnh hưởng với nội dung được trình bày sau đây.

2.1.2. Nội dung của phương pháp ma trận hệ số ảnh hưởng.

Mục đích của phương pháp ma trận ảnh hưởng cuối cùng là xây dựng phương trình chuyển động của hệ liên tục được rời rạc hoá ở dạng

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = P, \quad (2.1.0)$$

trong đó P là véc tơ lực ngoài tác dụng lên hệ. Như vậy vấn đề cốt lõi của phương pháp ma trận ảnh hưởng là xây dựng các ma trận M, C, K .

Thông thường vì ma trận hệ số cản rất phức tạp, nên người ta giả thiết nó có dạng cản Rolây, tức là

$$C = \alpha M + \beta K$$

với các hệ số α, β xác định bằng thực nghiệm, các ma trận M, K đã biết.

- Ma trận khối lượng M được xây dựng bằng nhiều cách.
 - Cách thông dụng nhất là *tập trung khối lượng* của cả vật thể vào các điểm nút tạo thành hệ chất điểm $m_j, j = 1, \dots, N$, tương ứng với các toạ độ suy rộng sao cho tổng các khối lượng tập trung $\sum_j m_j$ không vượt quá khối lượng tổng cộng của hệ. Khi đó ma trận khối lượng sẽ có dạng đường chéo $M = \text{diag}\{m_1, \dots, m_N\}$. Việc chọn m_j phụ thuộc vào sự phân bố khối lượng và sơ đồ chọn các điểm nút.
 - Việc tập trung khối lượng phụ thuộc vào kinh nghiệm và hiểu biết của chuyên gia thiết lập bài toán. Ta sẽ xem xét kỹ hơn vấn đề này trong các ví dụ.
- Ma trận độ mềm (hệ số ảnh hưởng) H được xây dựng như sau
 - Cho một lực đơn vị tác dụng vào điểm i và giải bài toán tĩnh xác định chuyển vị tại các điểm nút khác, ta thu được véc tơ $\{h_{i1}, \dots, h_{iN}\}$.

- Thay đổi điểm đặt lực đơn vị lần lượt cho tất cả các điểm từ 1 đến N và giải bài toán trên, ta nhận được ma trận độ mềm (hệ số ảnh hưởng) $H = [h_{ij}; i, j = 1, \dots, N]$. Như vậy, ma trận độ cứng K có thể tính được từ ma trận độ mềm H bằng phép nghịch đảo ma trận $K = H^{-1}$.

Với các kết cấu dạng thanh, đây chính là nội dung của *phương pháp lực* quen thuộc mà sẽ minh họa trong ví dụ dưới đây.

- Ma trận độ cứng K có thể được xây dựng gián tiếp dựa trên bỏ đề 2.1.2, tức là từ ma trận độ mềm (hệ số ảnh hưởng) H .

Ta cũng có thể xác định trực tiếp ma trận độ cứng K bằng cách đưa vào các liên kết vừa đủ để ngăn cản các chuyển vị vốn có của các nút. Các liên kết này bao gồm các *liên kết mômen* có tác dụng ngăn cản nút xoay nhưng vẫn cho nút có chuyển vị thẳng và các *liên kết lực* ngăn cản các chuyển vị tịnh tiến của nút. Khi đó, hệ gồm các phần tử cơ bản, đơn giản đã biết và được liên kết với nhau tạo thành *hệ cơ bản*. Các góc xoay và chuyển vị thẳng chính là các ẩn số cần tìm. Để hệ cơ bản tương đương với hệ ban đầu về mặt lực thì ta phải có *điều kiện phản lực tại các liên kết thêm trên hệ cơ bản do tất cả các ẩn chuyển vị và tải trọng gây nên bằng 0*, từ đó thiết lập được hệ phương trình để giải đối với các ẩn số cần tìm. Với các kết cấu dạng thanh, đây chính là nội dung của *phương pháp chuyển vị* quen thuộc mà sẽ được minh họa trong ví dụ dưới đây.

- Trong nhiều trường hợp, việc xác định trực tiếp ma trận độ cứng K là đơn giản hơn so với việc xác định gián tiếp thông qua ma trận độ mềm H . Khi đó ma trận độ mềm H có thể tính được từ ma trận độ cứng K bằng phép nghịch đảo ma trận $H = K^{-1}$.

Bây giờ, chúng ta có thể tiến hành thiết lập phương trình chuyển động của hệ. Giả sử ta đã có được các ma trận M , H , C và véc tơ lực ngoài P , ta gộp tất cả các lực tác dụng lên các nút vào một véc tơ lực tổng

$$\hat{F} = P - M\ddot{U} - C\dot{U}$$

trong đó hiển nhiên P là véc tơ lực ngoài, tiếp đến là lực quán tính và lực cản. Mặt khác, theo định nghĩa và cách xác định hệ số ảnh hưởng h_{ij} nêu trên, chuyển vị của điểm i gây ra do lực \hat{F}_j bằng

$$U_{ij} = h_{ij}\hat{F}_j$$

và do đó chuyển vị tổng cộng của điểm i gây ra do tất cả các lực \hat{F}_j là

$$U_i = \sum_j U_{ij} = \sum_j h_{ij} \hat{F}_j.$$

Phương trình cuối biểu diễn mối liên hệ ma trận

$$U = H\hat{F}$$

do đó ta có

$$U = H\hat{F} = H(P - M\ddot{U} - C\dot{U}).$$

Chú ý đến mối quan hệ $K = H^{-1}$ ta được

$$U = K^{-1}(P - M\ddot{U} - C\dot{U})$$

hay là

$$KU = P - M\ddot{U} - C\dot{U}$$

suy ra

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = P$$

chính là phương trình (2.1.0) cần phải xây dựng.

Việc giải bài toán tĩnh để tìm ma trận ảnh hưởng, không phải lúc nào cũng giải được một cách dễ dàng, vì thế phương pháp này không thể áp dụng được cho mọi kết cấu công trình, mà theo chúng tôi chỉ thuận tiện cho khung giàn. Để minh họa, chúng ta xét một trường hợp xác định hệ số ảnh hưởng tổng quát cho dầm đàn hồi sau đây.

2.1.3. Hệ số ảnh hưởng của dầm đàn hồi.

Xét một dầm có chiều dài L , môđul đàn hồi E , mômen quán tính tiết diện I , trên dầm có một lực ngang tập trung P_0 tác dụng tại điểm x_0 và chuyển vị uốn của dầm do lực này gây ra tại điểm x là $u(x)$.

Tỷ số

$$h(x, x_0) = \frac{u(x)}{P_0}$$

gọi là hệ số ảnh hưởng của điểm x_0 đến điểm x , còn chính hàm số $h(x, x_0)$ được gọi là *hàm ảnh hưởng của dầm chịu tải trọng tập trung đặt tại x_0 đối với điểm x bất kỳ*. Đối với kết cấu dạng thanh, ta có thể tìm hàm ảnh hưởng này dựa trên lý thuyết uốn thuần tuý của dầm.

Phương trình độ võng của dầm chịu tác dụng của lực tập trung P_0 đặt tại điểm x_0 có dạng

$$EI \frac{d^4 u(x)}{dx^4} = P_0 \delta(x - x_0).$$

Nghiệm tổng quát của phương trình này là

$$u(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \begin{cases} 0 & x \leq x_0 \\ \frac{P_0}{6EI} (x - x_0)^3, & x \geq x_0 \end{cases} \quad (2.1.1)$$

với các hệ số C_j được xác định theo các điều kiện biên.

Đối với dầm gối tựa hai đầu, ta có các điều kiện biên như sau

$$u(0) = u''(0) = u(L) = u''(L) = 0.$$

Khi đó ta có ngay $C_0 = C_2 = 0$ và C_3, C_1 thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{aligned} C_1 L + C_3 L^3 + \frac{P_0}{6EI} (L - x_0) &= 0 \\ 6C_3 L + \frac{P_0}{EI} (L - x_0) &= 0 \end{aligned}$$

rút ra

$$C_3 = -\frac{P_0(L - x_0)}{6EIL}; \quad C_1 = \frac{P_0 x_0}{6EIL} (L - x_0)(2L - x_0)$$

Cuối cùng ta được

$$u(x) = -\frac{P_0(L - x_0)}{6EIL} x^3 + \frac{P_0 x_0}{6EIL} (L - x_0)(2L - x_0)x + \begin{cases} 0 & x \leq x_0 \\ \frac{P_0}{6EI} (x - x_0)^3, & x \geq x_0 \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Hàm ảnh hưởng do lực tập trung tại x_0 cho dầm gối tựa hai đầu

$$h(x, x_0) = u(x)/P_0 = -\frac{(L - x_0)}{6EIL} x^3 + \frac{x_0}{6EIL} (L - x_0)(2L - x_0)x + \begin{cases} 0 & x \leq x_0 \\ \frac{(x - x_0)^3}{6EI}, & x \geq x_0 \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Đối với dầm công xôn, ta có điều kiện biên là

$$u(0) = u'(0) = u'''(L) = u''(L) = 0.$$

Khi đó ta có thể xác định được các hệ số

$$C_0 = 0, C_1 = 0, C_2 = \frac{P_0}{2EI}, C_3 = -\frac{P_0}{6EI},$$

và

$$u(x) = -\frac{P_0}{6EI}x^3 + \frac{P_0x_0}{2EI}x + \begin{cases} 0 & x \leq x_0 \\ \frac{P_0}{6EI}(x-x_0)^3, & x \geq x_0 \end{cases}$$

Hàm ảnh hưởng do lực tập trung tại x_0 cho dầm công xôn là

$$h(x, x_0) = u(x)/P_0 = -\frac{1}{6EI}x^3 + \frac{x_0}{2EI}x^2 + \begin{cases} 0 & x \leq x_0 \\ \frac{1}{6EI}(x-x_0)^3, & x \geq x_0 \end{cases} \tag{2.1.4}$$

2.1.4. Các ví dụ

a) Trường hợp một bậc tự do

Xét dầm gối tựa đơn giản, Hình 2.1.1. Trước hết, ta phải chọn số bậc tự do N , giả sử $N = 1$. Đối với dầm có khối lượng riêng là ρ , tiết diện ngang là F và các tham số khác như trong mục 2.1.3. Khi đó ma trận khối lượng có một thành phần duy nhất, và được chọn là $m = \rho FL/2$. Khối lượng này được tập trung tại vị trí giữa dầm $x_0=L/2$. Ma trận độ cứng cũng chỉ có một phần tử chính là $k(x_0, x_0)$. Nếu hai đầu gối tựa đơn giản thì theo công thức (2.1.3) ta có

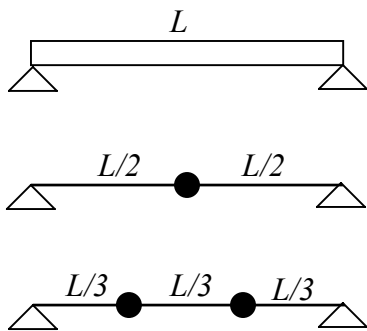
$$k = k(L/2, L/2) = \frac{48EI}{L^3} \tag{2.1.5}$$

Khi đó phương trình chuyển động của hệ rút gọn sẽ có dạng

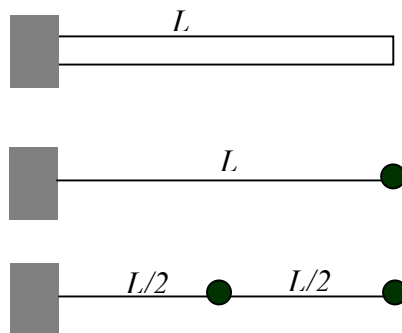
$$m\ddot{U} + c\dot{U} + kU = 0 \tag{2.1.6}$$

với

$$m = \frac{\rho FL}{2}; k = \frac{48EI}{L^3}; c = \alpha m + \beta k$$



Hình 2.1.1



Hình 2.1.2

Tần số riêng duy nhất của hệ rút gọn là

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{a_0}{L^2} \sqrt{96} = \frac{9,7979a_0}{L^2}, a_0 = \sqrt{\frac{EI}{\rho F}}.$$

So sánh với nghiệm giải tích, trong đó tần số riêng đầu tiên của dầm gối tựa đơn giản bằng

$$\omega_1 = a_0 \frac{\pi^2}{L^2} \approx \frac{9,8696a_0}{L^2}$$

ta thấy rằng sai số về mặt tần số của phương pháp ma trận hệ số ảnh hưởng nêu trên, ngay cả trong trường hợp chọn một bậc tự do cũng không đáng kể. Hiển nhiên là nếu chỉ chọn một khối lượng tập trung thì không thể nghiên cứu được các dạng dao động bậc cao hơn. Lúc đó ta phải chọn số lượng bậc tự do như mong muốn, tất nhiên là chỉ hữu hạn.

b) *Trường hợp hai bậc tự do*

Vẫn với dầm tựa đơn giản như trên, ta chọn hai khối lượng bằng $m = \rho FL/3$ tập trung tại hai điểm $x_1=L/3$ và $x_2=2L/3$.

Theo công thức (2.1.3), ta tính được ma trận hệ số ảnh hưởng như sau

$$H = \frac{L^3}{486EI} \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

và do đó ma trận độ cứng bằng

$$K = H^{-1} = \frac{162EI}{5L^3} \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$$

Trong khi đó ma trận khối lượng là

$$M = \frac{\rho FL}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

nên phương trình tần số có dạng

$$\det \begin{bmatrix} 8 - \lambda^2 & -7 \\ -7 & 8 - \lambda^2 \end{bmatrix} = \lambda^4 - 16\lambda^2 + 15 = 0$$

với $\lambda^2 = \frac{5\rho FL^4}{486EI} \omega^2$.

Từ đó có thể tính được hai tần số riêng bằng

$$\omega_1 = \frac{9,859a_0}{L^2}; \omega_2 = \frac{38,184a_0}{L^2}.$$

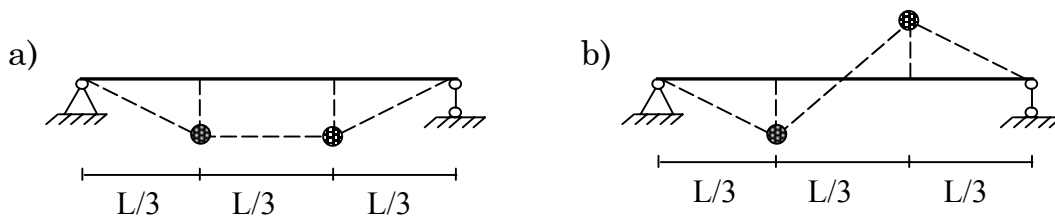
So với hai tần số riêng tính được bằng phương pháp giải tích

$$\omega_1 = a_0 \frac{\pi^2}{L^2} = \frac{9,8696a_0}{L^2}; \omega_2 = a_0 \frac{4\pi^2}{L^2} = \frac{39,4784a_0}{L^2},$$

ta thấy ngay tần số thứ nhất đã gần với nghiệm chính xác hơn trường hợp một khối lượng và sai số của tần số thứ hai cũng rất nhỏ, khoảng 2%. Như vậy, trong trường hợp này càng tăng số bậc tự do ta sẽ được nghiệm càng chính xác hơn

Từ các tần số riêng thu được, ta tìm được các dạng riêng có dạng

$$\Phi = [\Phi_1 \quad \Phi_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$



Hình 2.1.3. Các dạng dao động riêng của hệ 2 bậc tự do

Tuy nhiên, đối với dầm côngxôn thì tình hình không tốt được như dầm tựa đơn, ta sẽ thấy ở mục tiếp theo.

c) Ta xét dầm công xôn với các tham số như ở mục trên (Hình 2.1.2).

Nếu chọn một khối lượng tại đầu tự do bằng $m = \rho FL$, khi đó $h = \frac{L^3}{3EI}$

suy ra $k = \frac{3EI}{L^3}$ và tần số $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1,73a_0}{L^2}$. So với nghiệm giải tích thì sai số này quá lớn, vào khoảng 50%.

Nếu chọn $m = \rho FL/2$, thì sai số giảm xuống còn 30%.

Nếu tập trung khối lượng tại điểm $x_1=2L/3$, khi đó $h = \frac{8L^3}{81EI}$ suy ra

$k = \frac{81EI}{8L^3}$ và nếu chọn $m = \rho FL$ hoặc $m = 2\rho FL/3$, thì ta được tần số tương ứng

là $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{3,182a_0}{L^2}$ hoặc $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{3,897a_0}{L^2}$, sai số lúc này chỉ còn $\pm 10\%$.

Bây giờ ta xét trường hợp hai bậc tự do cho dầm công xôn. Chọn hai khối lượng đặt tại các vị trí giữa dầm và đầu tự do, tức tại $x_1=L/2$ và $x_2=L$ với các bậc tự do là độ võng của dầm tại các vị trí trên U_1, U_2 . Khi đó các thành phần của ma trận độ cứng được tính như sau:

Áp dụng công thức (2.1.4) cho từng trường hợp các thành phần ma trận ảnh hưởng, ta được

$$h_{11} = \frac{L^3}{24EI}; h_{12} = \frac{5L^3}{48EI} = h_{21}; h_{22} = \frac{L^3}{3EI}.$$

Khi đó ma trận độ cứng của hệ sẽ có dạng

$$K = H^{-1} = \frac{48EI}{7L^3} \begin{bmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ta xét ma trận khối lượng trong hai trường hợp.

- Trường hợp thứ nhất, ta chia khối lượng của cả dầm làm đôi và cho vào hai điểm nút như đã chọn ở trên, tức là

$$m_1 = \frac{\rho FL}{2}; m_2 = \frac{\rho FL}{2}.$$

- Trường hợp thứ hai là chọn

$$m_1 = \frac{\rho FL}{2}; m_2 = \frac{\rho FL}{4},$$

theo nguyên tắc chia đôi từng phần tử.

Chúng ta thử kiểm tra xem với hai cách tập trung khối lượng nêu trên, cách nào chính xác hơn dựa trên kết quả bài toán trị riêng với phương trình tần số

$$\det[K - \omega^2 M] = 0.$$

- Trong trường hợp thứ nhất, phương trình tần số có dạng

$$\det \left[\frac{48EI}{7L^3} \begin{pmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \rho FL \omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = 0$$

Nếu đưa vào tham số $\lambda = \frac{7\rho FL^4}{96EI} \omega^2$ hay $\omega = \sqrt{\frac{96\lambda}{7}} \frac{a_0}{L^2}$ thì phương trình

tần số được đưa về dạng $\lambda^2 - 18\lambda + 7 = 0$. Phương trình này cho ta hai nghiệm $\lambda_1 = 0,3976; \lambda_2 = 17,6023$ và hai tần số riêng tương ứng là

$$\omega_1 = \frac{2,3354a_0}{L^2}; \omega_2 = \frac{24,6381a_0}{L^2}.$$

So với hai tần số riêng đầu tính bằng phương pháp giải tích là

$$\bar{\omega}_1 = \frac{3,516a_0}{L^2}; \bar{\omega}_2 = \frac{22,0346a_0}{L^2},$$

thì sai số ở tần số thứ nhất lớn, xấp xỉ -30% , đối với tần số thứ hai, thì sai số nhỏ hơn, dưới $+10\%$.

- Trong trường hợp thứ hai, phương trình tần số là

$$\det \left[\frac{48EI}{7L^3} \begin{pmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \rho FL \omega^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = 0,$$

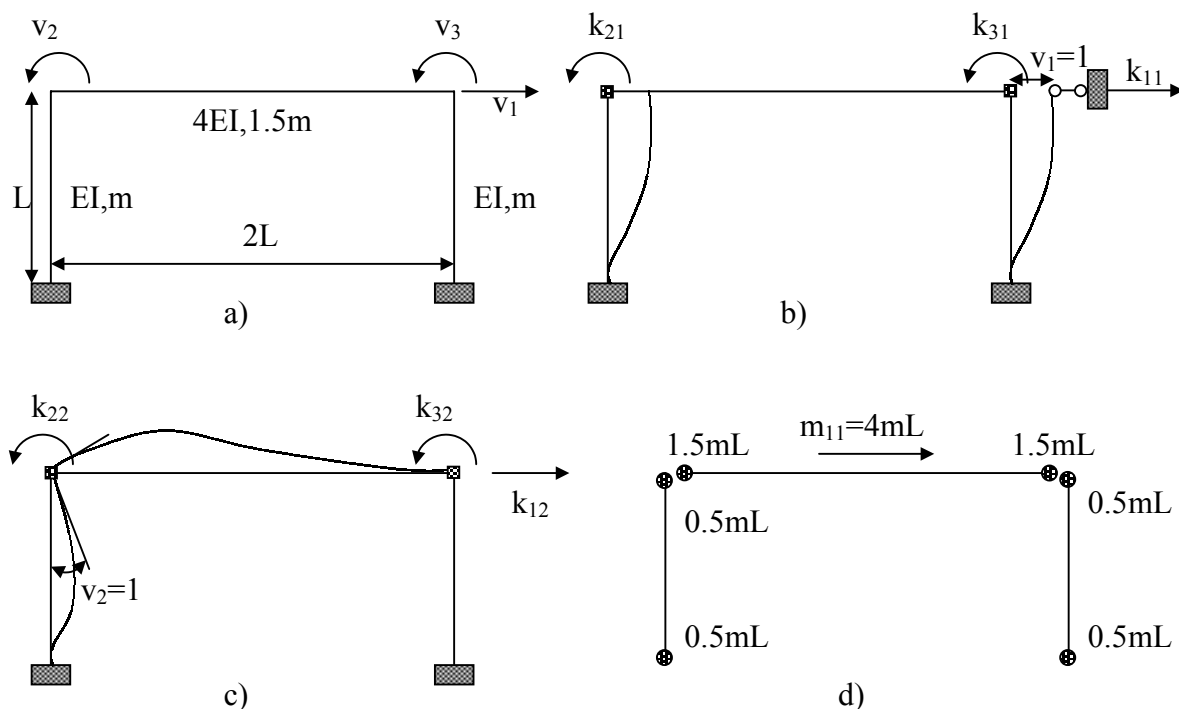
với tham số $\lambda = \frac{7\rho FL^4}{192EI} \omega^2$ hay $\omega = \sqrt{\frac{192\lambda}{7}} \frac{a_0}{L^2}$ cho ta hai tần số

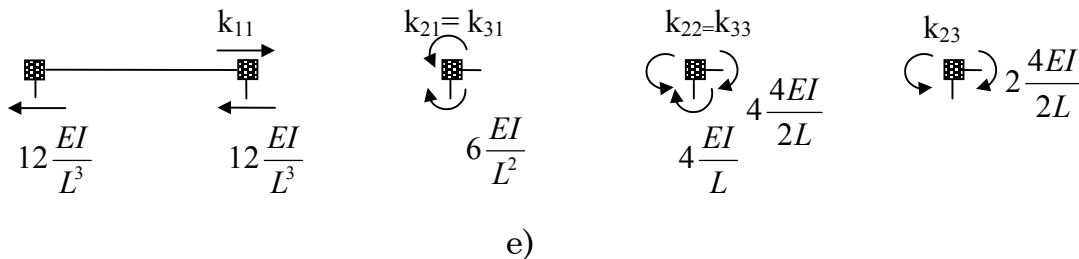
$$\omega_1 = \frac{3,1563a_0}{L^2}; \omega_2 = \frac{16,2580a_0}{L^2}$$

Độ chính xác của tần số thứ nhất đã tăng lên, sai số -9% , còn tần số thứ hai có sai số lên đến hơn 30% .

Như vậy, đối với dầm công xôn, phương pháp ma trận hệ số ảnh hưởng với hai bậc tự do không cho kết quả mong muốn.

d) Hệ khung phẳng





Hình 2.1.4 Phân tích hệ khung phẳng

Bỏ qua chuyển vị dọc của các cột và dầm, nên hệ có 3 bậc tự do gồm 1 chuyển vị ngang v_1 và 2 chuyển vị quay v_2, v_3 tại các nút cứng. Ký hiệu k_{ij} là phản lực tại liên kết thứ i do chuyển vị đơn vị $v_k=1$ gây ra trên hệ cơ bản, khi đó $k_{ij}=k_{ji}$. Sử dụng phương pháp chuyển vị trong cơ học kết cấu, ta xác định được các hệ số k_{ij} như trên hình (2.1.4.e) và ma trận độ cứng K của cả hệ có dạng sau

$$[K] = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 3L & 3L \\ 3L & 6L^2 & 2L^2 \\ 3L & 2L^2 & 6L^2 \end{bmatrix}$$

Từ đó ta xác định được ma trận độ mềm (hệ số ảnh hưởng) H có dạng

$$[H] = [K]^{-1} = \frac{L}{624EI} \begin{bmatrix} 32L^2 & -12L & -12L \\ -12L & 63 & -15 \\ -12L & -15 & 63 \end{bmatrix}$$

Để xác định ma trận khối lượng M , ta thực hiện việc thu gọn khối lượng như trên hình (2.1.4.d). Khi đó

$$[M] = \frac{mL}{210} \begin{bmatrix} 840 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2. Phương pháp ma trận truyền

Phương pháp hệ số ảnh hưởng nêu trên là một phương pháp gần đúng đơn giản, thường dùng cho các kỹ sư trong việc phân tích động các kết cấu đơn giản như thanh dầm. Độ chính xác của phương pháp hệ số ảnh hưởng bị hạn chế nhiều, như đã thấy trong ví dụ thứ hai cho dầm công xôn. Trong lý thuyết dao động nói chung, người ta đã phát triển một

phương pháp hữu hiệu hơn, chính xác hơn và có thể dùng rộng rãi hơn. Đó là phương pháp ma trận truyền. Phương pháp này đã tận dụng những kết quả giải tích dựa trên ý tưởng về mối liên hệ giữa các trạng thái lực và chuyển vị ở những điểm khác nhau để xây dựng mô hình ma trận của kết cấu. Phương pháp này có thể áp dụng cho cả hệ hữu hạn bậc tự do lẫn hệ liên tục. Tuy nhiên đối với các hệ liên tục, phương pháp này chủ yếu vẫn chỉ sử dụng cho thanh, dầm đàn hồi, đặc biệt là hệ dầm nhiều gối và có tiết diện không đổi từng khúc. Thời gian gần đây, trong một số bài báo đã có sự phát triển phương pháp này cho khung với hình dáng đơn điệu. Với những giả thiết lý tưởng như đã trình bày trong phần 1.4, phương pháp ma trận truyền cho độ chính xác như phương pháp giải tích. Nhưng nó lại bị hạn chế bởi tính phức tạp, công kênh khó áp dụng đối với kỹ sư. Ở đây chúng tôi cũng chỉ trình bày phương pháp này cho dầm đàn hồi với mục đích nêu lên ý tưởng chính của phương pháp.

2.2.1. Ma trận truyền cho phần tử dầm.

Xét một dầm đàn hồi chiều dài L , tiết diện không đổi F , có môđun đàn hồi E , mật độ khối ρ và mômen quán tính mặt cắt ngang là I , ký hiệu $w(x,t)$ là độ võng của dầm tại x .

Nếu bỏ qua lực cản, từ phương trình (1.4.2) với vế phải bằng 0, độ võng của dầm dao động tự do có thể biểu diễn ở dạng

$$w(x,t) = e^{i\omega t} \Phi(x,\omega)$$

trong đó

$$\Phi(x,\omega) = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x) + C_3 \cosh(\lambda x) + C_4 \sinh(\lambda x)$$

$$\lambda = \left[\frac{\rho F \omega^2}{EI} \right]^{1/4}$$

gọi là biên độ phức của độ võng. Do tính chông chất nghiệm của phương trình tuyến tính, biên độ của độ võng có thể viết ở dạng tương đương

$$\Phi(x,\omega) = C_1 K_1(\lambda x) + C_2 K_2(\lambda x) + C_3 K_3(\lambda x) + C_4 K_4(\lambda x) \tag{2.2.1}$$

Trong đó các hàm Krulôv $K_j(x)$ có dạng

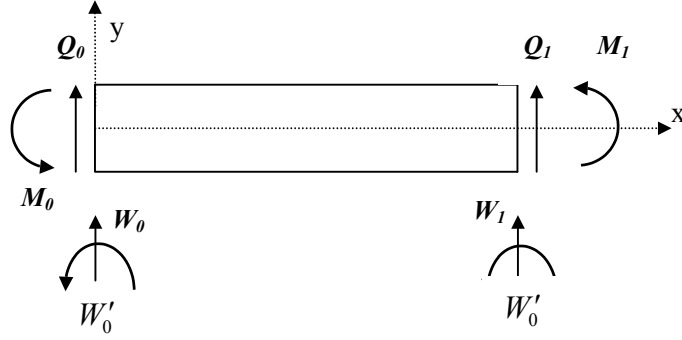
$$K_1(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \cosh x); K_2(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \sinh x);$$

$$K_3(x) = \frac{1}{2}(\cosh x - \cos x); K_4(x) = \frac{1}{2}(\sinh x - \sin x). \tag{2.2.2}$$

Để dàng nhận thấy các hàm Krulôv có các tính chất

$$\begin{aligned} K_1(0) = 1, K_2(0) = K_3(0) = K_4(0) = 0; \\ K'_4(x) = K_3(x), K'_3(x) = K_2(x), K'_2(x) = K_1(x), K'_1(x) = K_4(x). \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Ký hiệu các véc tơ $U^0 = \{W_0, W'_0, M_0, Q_0\}^T$ và $U^1 = \{W_1, W'_1, M_1, Q_1\}^T$ là các véc tơ trạng thái ở hai đầu dầm (Hình 2.2.1).



Hình 2.2.1

Mặt khác, theo lý thuyết dầm, ta có biên độ phức của chuyển vị, góc xoay, lực cắt và mômen uốn tại đầu trái $x = 0$ bằng

$$\begin{aligned} W_0 &= \Phi(0, \omega) = C_1 \\ W'_0 &= \frac{\partial \Phi(0, \omega)}{\partial x} = \lambda C_2 \\ M_0 &= -EI \frac{\partial^2 \Phi(0, \omega)}{\partial x^2} = \lambda^2 EIC_3 \\ Q_0 &= EI \frac{\partial^3 \Phi(0, \omega)}{\partial x^3} = \lambda^3 EIC_4 \end{aligned}$$

Thay các hệ số C_j xác định từ các biểu thức vào (2.2.1) ta được

$$\Phi(x, \omega) = W_0 K_1(\lambda x) + \frac{LW'_0}{\lambda} K_2(\lambda x) - \frac{M_0 L^2}{\lambda^2 EI} K_3(\lambda x) + \frac{Q_0 L^3}{\lambda^3 EI} K_4(\lambda x). \quad (2.2.4)$$

Sử dụng lại các công thức tính góc xoay, mômen uốn và lực cắt của dầm ở đầu phải $x = L$, ta sẽ có

$$\begin{aligned} W_1 &= \Phi(L, \omega) = W_0 K_1(\lambda L) + \frac{W'_0}{\lambda} K_2(\lambda L) - \frac{M_0}{\lambda^2 EI} K_3(\lambda L) + \frac{Q_0}{\lambda^3 EI} K_4(\lambda L), \\ W'_1 &= \Phi'(L, \omega) = \lambda W_0 K_4(\lambda L) + W'_0 K_1(\lambda L) - \frac{M_0}{\lambda EI} K_2(\lambda L) + \frac{Q_0}{\lambda^2 EI} K_3(\lambda L), \\ M_1 &= EI\Phi''(L, \omega) = \lambda^2 EIW_0 K_3(\lambda L) + \lambda EIW'_0 K_4(\lambda L) - M_0 K_1(\lambda L) + \frac{Q_0}{\lambda} K_2(\lambda L), \\ Q_1 &= -EI\Phi'''(L, \omega) = -\lambda^3 EIW_0 K_2(\lambda L) - \lambda^2 EIW'_0 K_3(\lambda L) + \lambda M_0 K_4(\lambda L) - Q_0 K_1(\lambda L). \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Khi đó các đẳng thức trong (2.2.5) có thể viết gọn lại ở dạng ma trận là

$$U^1 = [T]U^0 \tag{2.2.6}$$

với ma trận T có dạng

$$[T] = \begin{bmatrix} K_1(\lambda L) & (1/\lambda)K_2(\lambda L) & -(1/\lambda^2 EI)K_3(\lambda L) & (1/\lambda^3 EI)K_4(\lambda L) \\ \lambda K_4(\lambda L) & K_1(\lambda L) & -(1/\lambda EI)K_2(\lambda L) & (1/\lambda^2 EI)K_3(\lambda L) \\ \lambda^2 EIK_3(\lambda L) & \lambda EIK_4(\lambda L) & -K_1(\lambda L) & (1/\lambda)K_2(\lambda L) \\ -\lambda^3 EIK_2(\lambda L) & -\lambda^2 EIK_3(\lambda L) & \lambda K_4(\lambda L) & -K_1(\lambda L) \end{bmatrix} \tag{2.2.7}$$

được gọi là *ma trận chuyển tiếp* (hay ma trận truyền) của phần tử dầm đơn đang xét. Thực chất ma trận truyền $[T]$ là hàm của các tham số mô hình L, F, I, E, ρ và tần số ω

$$[T] = [T(L, F, I, E, \rho, \omega)]$$

Sử dụng biểu thức của các hàm Krulôn ta có thể chứng minh được định thức của ma trận truyền bằng 1 ($\det[T]=1$).

Ứng dụng đầu tiên của ma trận (2.2.7) là để tìm tần số riêng của dầm đơn giản. Thật vậy, nếu biết điều kiện biên của dầm đơn giản này ta có thể thiết lập phương trình tần số của nó một cách nhanh chóng. Ví dụ, đối với dầm gối tựa hai đầu, ta có

$$W_0 = W_1 = M_0 = M_1 = 0$$

Khi đó đẳng thức (2.2.6) cho ta hai hệ phương trình

- Hệ phương trình thứ nhất

$$\begin{cases} T_{12}W'_0 + T_{14}Q_0 = 0 \\ T_{32}W'_0 + T_{34}Q_0 = 0 \end{cases}$$

trong đó T_{jk} là các phần tử của ma trận truyền, để xác định góc xoay và lực cắt ở đầu trái

- Hệ phương trình thứ hai

$$\begin{cases} T_{22}W'_0 + T_{24}Q_0 = W'_1 \\ T_{42}W'_0 + T_{44}Q_0 = Q_1 \end{cases}$$

để tìm góc xoay và lực cắt đầu phải sau khi đã có góc xoay và lực cắt đầu trái.

Hệ thứ nhất cho ta phương trình tần số

$$T_{12}T_{34} - T_{32}T_{14} = 0$$

Với các biểu thức cụ thể của các thành phần ma trận truyền, phương trình cuối cho ta phương trình tần số quen thuộc của dầm tựa đơn giản hai đầu (xem 1.4.2,b) là $\sin \lambda L = 0$ suy ra $\lambda_j = j\pi / L, j = 1,2,3,\dots$

Tương tự có thể tìm tần số riêng cho các trường hợp điều kiện biên khác. Dễ dàng nhận thấy phương pháp ma trận truyền trong trường hợp dầm đơn giản cho ta tần số riêng chính xác như phương pháp giải tích. Tuy nhiên nếu chỉ áp dụng cho các dầm đơn giản này thì phương pháp ma trận truyền không có ý nghĩa. Thế mạnh của phương pháp này là áp dụng cho dầm có nhiều gối (cứng hoặc đàn hồi) trung gian mà phương pháp giải tích không thể áp dụng được. Đó là nội dung của mục tiếp theo.

2.2.2. Ma trận truyền cho các mối nối.

a) *Mối nối đàn hồi.*

Xét một mối nối giữa hai phần tử dầm liên tiếp nhau j và $j+1$. Phía bên trái mối nối là đầu phải của phần tử dầm thứ j và phía bên phải của mối nối là đầu trái của phần tử dầm $j+1$. Giả sử mối nối là liên kết đàn hồi được mô tả bằng một lò xo quay có độ cứng K_j (Hình 2.2.2). Tuân thủ cách ký hiệu đã tiến hành ở mục trên, véc tơ trạng thái ở đầu phải của phần tử dầm j , tức bên trái mối nối được ký hiệu là

$$U_+^j = \{W_j^+, W_j^{+'}, M_j^+, Q_j^+\}^T$$

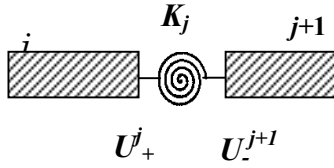
và véc tơ trạng thái ở đầu phải mối nối được ký hiệu là

$$U_-^{j+1} = \{W_{j+1}^-, W_{j+1}^{-+}, M_{j+1}^-, Q_{j+1}^-\}^T.$$

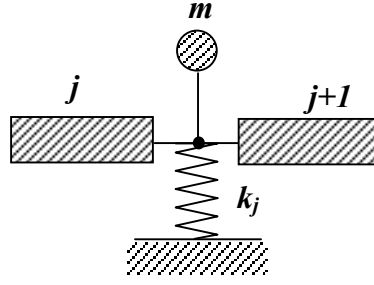
Khi đó xét các điều kiện liên tục và cân bằng lực tại mối nối ta được các quan hệ

$$\begin{cases} W_j^+ = W_{j+1}^- \\ W_{j+1}^{-+} = W_j^{+'} + \alpha_j M_j^+ \\ M_{j+1}^- = M_j^+ \\ Q_{j+1}^- = Q_j^+ \end{cases}$$

với $\alpha_j = 1/K_j$, tức là chỉ có góc xoay là có bước nhảy qua mối nối và nó tỷ lệ với độ cứng của lò xo quay.



Hình 2.2.2



Hình 2.2.3

Từ điều kiện trên ta rút ra được ma trận truyền của mỗi nối mềm ở dạng

$$U_-^{j+1} = [R(j)]U_+^j, \tag{2.2.8}$$

trong đó

$$[R(j)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.2.9}$$

Nếu mỗi nối là cứng tuyệt đối, thì $K_j = \infty$ và do đó $\alpha_j = 0$, ma trận truyền cho mỗi nối (2.2.9) trở thành ma trận đơn vị.

b) Gối mềm và khối lượng tập trung

Giả sử tại điểm j của dầm có một khối lượng tập trung m_j và tại đây ta có gối đàn hồi (Hình 2.2.3) có độ cứng lò xo là k_j . Khi đó, lực tổng hợp của lực quán tính và lực đàn hồi của lò xo tại điểm j có hướng theo chiều đi xuống và có biên độ bằng

$$(k_j - \omega^2 m_j)W_{j,j+1}^{+,-}$$

Xét điều kiện cân bằng lực tại điểm này ta được

$$Q_{j+1}^- = Q_j^+ + (m_j \omega^2 - k_j)W_j^+$$

Cùng với điều kiện liên tục của chuyển vị, góc xoay và mômen uốn ta có

$$U_-^{j+1} = [S(j)]U_+^j, \tag{2.2.10}$$

trong đó

$$[S(j)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_j \omega^2 - k_j & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.2.11}$$

Đây là ma trận truyền cho gối mềm có khối lượng tập trung.

c) Khớp và gối trung gian.

Nếu tại điểm j ta có khớp trung gian, tức là tại mối nối này của dầm mômen uốn ở cả hai phía đều bằng 0. Điều này tương đương với việc không truyền mômen qua mối nối. Có nghĩa là ma trận truyền cho khớp trung gian có dạng

$$[S_0^m(j)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.12)$$

Trong trường hợp tại điểm j ta có gối trung gian, tức là tại đây chuyển vị bằng 0. Tương tự như trên ma trận truyền cho gối trung gian có dạng

$$[S_0^w(j)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2.13)$$

Đưa vào ký hiệu ma trận

$$[S_b^c(j)] = \begin{bmatrix} c_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.14)$$

phụ thuộc vào hai tham số c_j, b_j chỉ nhận các giá trị 0 hoặc 1. Nếu tham số thứ nhất bằng 0, tham số thứ hai bằng 1 thì ma trận cuối cho ta ma trận truyền của gối trung gian. Khi $c_j = 1, b_j = 0$ ta được ma trận truyền của khớp trung gian. Trường hợp cả hai tham số bằng 1 ta có mối nối cứng tuyệt đối (ma trận truyền bằng đơn vị). Cuối cùng nếu cả hai tham số đều bằng 0 ta được gối khớp trung gian. Như vậy trường hợp này ta có ma trận truyền dạng tổng quát (2.2.14).

2.2.3. Ma trận truyền cho dầm - trường hợp tổng quát.

Xét một dầm đàn hồi bao gồm nhiều đoạn có chung một trục dọc theo dầm. Mỗi đoạn là một phần tử dầm đơn giản như đã xét trong mục 2.2.1. nhưng các tính chất hình học, vật liệu của các phần tử có thể khác nhau. Giả sử ta có N phần tử được nối với nhau bằng một trong các kiểu

mối nối đã xét trong mục 2.2.2. Các đặc trưng của phần tử thứ j được ký hiệu là $L_j, F_j, I_j, E_j, \rho_j, j = 1, 2, 3, \dots, N$. Tổng cộng ta sẽ có $N + 1$ điểm nút là các mối nối giữa các phần tử dầm. Tương tự phần trên, với mỗi phần tử dầm j ta đưa vào hai véc tơ trạng thái tại hai đầu trái và phải, ký hiệu là U_-^{j-1}, U_+^j . Dấu trừ ở chỉ số dưới ký hiệu đầu trái, còn dấu cộng chỉ đầu phải. Vì phần tử này có các tham số không đổi, nên theo (2.2.6) ta có

$$U_+^j = [T(j)]U_-^{j-1}, \quad (2.2.15)$$

trong đó ma trận

$$[T(j)] = [T(L_j, F_j, I_j, E_j, \rho_j, \omega)].$$

Tần số tham gia vào ma trận truyền thông qua tham số tần số

$$\lambda_j = \left[\frac{\rho_j F_j \omega^2}{E_j I_j} \right]^{1/4}.$$

Tại điểm nút j ta có hai véc tơ trạng thái ở hai đầu của mối nối, ở đầu trái là véc tơ trạng thái U_+^j và ở đầu phải ta có U_-^{j+1} .

Ký hiệu

$$[B(j)], j = 1, 2, \dots, N - 1$$

là ma trận truyền tại các mối nối. Hiển nhiên, ma trận $B(j)$ có thể là một trong các ma trận (2.2.9), (2.2.11) hay (2.2.14). Sử dụng ký hiệu chung này, sự “chuyển tiếp” của véc tơ trạng thái qua mối nối được biểu diễn bằng mối liên hệ

$$U_-^{j+1} = [B(j)]U_+^j, j = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (2.2.16)$$

Áp dụng (2.2.15), (2.2.16) lần lượt theo j từ 1 đến $N+1$, hay từ trái qua phải ta sẽ nhận được

$$U_+^N = [T(N)B(N-1)T(N-1)B(N-2)T(N-2)\dots B(2)T(2)B(1)T(1)]U_-^0. \quad (2.2.17)$$

ở đây, véc tơ trạng thái tại biên bên trái của dầm được ký hiệu là U_-^0 , véc tơ trạng thái tại biên phải là U_+^N . Ma trận nhận được là

$$[H] = [T(N)B(N-1)T(N-1)\dots B(2)T(2)B(1)T(1)] \quad (2.2.18)$$

được gọi là ma trận truyền của dầm thay đổi từng khúc với mối nối mềm. Hiển nhiên ma trận này phụ thuộc vào các tham số của dầm trong từng đoạn và các tham số mối nối, hay

$$[H] = [H(\bar{L}, \bar{F}, \bar{I}, \bar{E}, \bar{\rho}, \bar{\alpha}, \omega)],$$

trong đó các ký hiệu có gạch ngang trên đầu chỉ một véc tơ gồm nhiều thành phần, với các chỉ số đã viết ở trên. Điều kiện biên tuyến tính tại hai biên của dầm có thể viết ở dạng

$$\begin{aligned} [B(0)]U_-^0 &= 0 \\ [B(N)]U_+^N &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

trong đó $B(0)$ và $B(N)$ là các ma trận cấp 2×4

$$\begin{aligned} [B(0)] &= \begin{bmatrix} B_{11}^0 & B_{12}^0 & B_{13}^0 & B_{14}^0 \\ B_{21}^0 & B_{22}^0 & B_{23}^0 & B_{24}^0 \end{bmatrix} \\ [B(N)] &= \begin{bmatrix} B_{11}^N & B_{12}^N & B_{13}^N & B_{14}^N \\ B_{21}^N & B_{22}^N & B_{23}^N & B_{24}^N \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

Kết hợp (2.2.17) với điều kiện biên (2.2.19), ta nhận được phương trình để xác định véc tơ trạng thái tại đầu trái của dầm như sau

$$\begin{aligned} [B(N).H]U_-^0 &= 0 \\ [B(0)]U_-^0 &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

Đây là hệ 4 phương trình để tìm 4 ẩn $U_+^0 = \{W_0^+, W_0^{+'}, M_0^+, Q_0^+\}^T$. Dễ dàng nhận thấy, hệ phương trình thuần nhất chỉ có nghiệm khác không nếu định thức bằng 0, do vậy

$$\det \begin{bmatrix} B(N).H \\ B(0) \end{bmatrix} \equiv F(\omega, a_1, \dots, a_p) = 0. \quad (2.2.22)$$

Đây là phương trình tần số của dầm. Các tham số a_j biểu thị các tham số mối nối, tham số biên và cả các tham số hình học, vật liệu của dầm. Giải phương trình cuối ta được các tần số riêng. Thay các tần số riêng vào (2.2.21) ta sẽ tìm được véc tơ trạng thái của dầm ở đầu trái chứa một hằng số tùy ý. Sau đó sử dụng (2.2.15), (2.2.16), ta có thể tìm lần lượt véc tơ trạng thái tại các nút (mối nối) và ở biên bên phải. Đây là nội dung phương pháp ma trận truyền để nghiên cứu dao động riêng của dầm phức tạp. Có thể phát triển phương pháp này cho trường hợp dao động cưỡng bức của dầm và kết cấu dạng khung có hình dáng đơn điệu (lặp lại có tính chu kỳ). Tuy nhiên cho đến nay người ta vẫn dùng chủ yếu phương pháp này để tìm tần số riêng của các hệ dầm phức tạp.

2.3. Phương pháp phần tử hữu hạn

2.3.1. Tư tưởng và Nội dung của phương pháp phần tử hữu hạn.

Phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) là một công cụ hiện đại dùng để mô hình hoá và phân tích các hệ liên tục, tức là những vật thể chiếm một miền liên tục D trong không gian R^3 . Đồng thời cũng là phương pháp cơ bản và thông dụng nhất cho đến nay trong Động lực học công trình. Tư tưởng của phương pháp PTHH như sau: Chia vật thể thành một số hữu hạn các phần tử sao cho trạng thái ứng suất biến dạng của chúng có thể xác định được một cách đơn giản bằng các công cụ giải tích như đã trình bày ở phần 1. Các phần tử này được liên kết với nhau bởi các nút có toạ độ xác định trong không gian. Chuyển động của các nút được mô tả bằng các tham số gọi là bậc tự do của nút. Tổ hợp các bậc tự do của các nút tạo thành một véc tơ các bậc tự do độc lập, gọi là véc tơ chuyển vị nút của hệ đã cho, ký hiệu là $U = \{U_1, \dots, U_N\}^T$. Trạng thái ứng suất biến dạng của vật thể tại các điểm bất kỳ được biểu diễn qua véc tơ chuyển vị nút và sau đó nhờ các định luật, nguyên lý cơ bản của cơ học thiết lập được hệ phương trình vi phân đối với các chuyển vị nút ở dạng

$$M\ddot{U}(t) + C\dot{U}(t) + KU(t) = P(t), \quad (2.3.1)$$

trong đó M , C , K lần lượt là các ma trận khối lượng, hệ số cản và độ cứng và tạo thành một mô hình không gian (như đã nói ở phần 1.2) của một hệ hữu hạn bậc tự do, mà ở đây ta gọi là mô hình PTHH của hệ liên tục đã cho, P là véc tơ tải trọng đã đưa về nút (gọi tắt là véc tơ tải trọng nút). Như vậy, rõ ràng là phương pháp PTHH đã thực hiện một phép rời rạc hoá và hữu hạn hoá các hệ vô số bậc tự do. Đây chính là tư tưởng chủ đạo của phương pháp PTHH. Nội dung của phương pháp PTHH được bộc lộ trong quy trình chung của nó, bao gồm các bước sau đây:

1. Chọn hệ toạ độ tổng thể trong không gian cố định trong đó vật thể chiếm một miền D .
2. Chia lưới PTHH bao gồm các nút và do đó sẽ tạo ra các phần tử được xác định bởi các điểm nút.
3. Xác định các bậc tự do tại các nút và do đó sẽ được véc tơ chuyển vị nút của cả hệ. Ở đây chú ý đến các điều kiện biên và các ràng buộc để tạo ra véc tơ chuyển vị nút là tổ hợp các bậc tự do độc lập.

4. Xét từng phần tử như một vật thể đàn hồi với mục đích thiết lập mối liên hệ giữa trạng thái ứng suất biến dạng bên trong phần tử với các chuyển vị nút (tìm các hàm dạng).
5. Sử dụng các định luật của cơ học cùng với mối liên hệ được xây dựng ở bước 4 thiết lập các ma trận khối lượng, hệ số cản và độ cứng của từng phần tử. Đồng thời xác định véc tơ tải trọng ngoài đưa về nút.
6. Ghép nối các ma trận của phần tử trên cơ sở các liên kết giữa các phần tử sao cho tính liên tục của chuyển vị nút được đảm bảo.
7. Sử dụng các điều kiện biên hay các ràng buộc để khử các ẩn có giá trị bằng 0 hay đã biết. Cuối cùng ta được các ma trận M , C , K và véc tơ P tổng thể tạo thành mô hình PTHH của hệ đã cho ở dạng (2.3.1).

2.3.2. Mô tả toán học phương pháp PTHH.

Việc chọn các hàm dạng của mỗi phần tử hữu hạn phải đảm bảo rằng các hàm này xấp xỉ tốt trường chuyển vị, biến dạng và ứng suất trong mỗi phần tử và đảm bảo điều kiện liên tục của các trường này tại các biên giữa các phần tử hữu hạn liên kề nhau.

Giả thiết trường chuyển vị tại các điểm bên trong phần tử hữu hạn có dạng

$$\{u(x, y, z)\} = [\phi(x, y, z)]\{\alpha\} \quad (2.3.2)$$

trong đó $[\phi(x, y, z)]$ là véc tơ các hàm chuyển vị và $\{\alpha\}$ là véc tơ các hằng số được xác định từ các điều kiện chuyển vị tại các điểm nút của phần tử. Tại nút i ($i=1,2,\dots,n$) bất kỳ, véc tơ các thành phần chuyển vị có dạng

$$\{U_i\} = \{u(x_i, y_i, z_i)\} = [\phi(x_i, y_i, z_i)]\{\alpha\}$$

trong đó $\{x_i, y_i, z_i\}$ là tọa độ các điểm nút. Ký hiệu $\{U\}$ là véc tơ bao gồm các thành phần chuyển vị $\{U_i\}$ của tất cả các nút phần tử, ta có

$$\{U\} = [\Phi]\{\alpha\} \quad (2.3.3)$$

trong đó $[\Phi]$ là ma trận các hằng số có dạng

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \phi(x_1, y_1, z_1) \\ \phi(x_2, y_2, z_2) \\ \vdots \\ \phi(x_n, y_n, z_n) \end{bmatrix}$$

Số hằng số $\{\alpha\}$ trong biểu thức của các hàm chuyển vị (2.3.2) phải bằng với số bậc tự do của phần tử để đảm bảo ma trận $[\Phi]$ là khả nghịch.

Từ đó có thể biểu diễn trường chuyển vị qua các chuyển vị nút ở dạng

$$\{u(x, y, z)\} = [\phi(x, y, z)][\Phi]^{-1}\{U\} = [N(x, y, z)]\{U\} \quad (2.3.4)$$

với

$$[N(x, y, z)] = [\phi(x, y, z)][\Phi]^{-1} \quad (2.3.5)$$

gọi là các *hàm dạng* của phần tử hữu hạn.

Khi có hàm dạng, theo các quy luật động học, ta xác định được trường biến dạng trong phần tử hữu hạn có dạng

$$\{\varepsilon(x, y, z)\} = [B(x, y, z)]\{U\} \quad (2.3.6)$$

với $[B]$ là ma trận gồm các phần tử là biến dạng theo các trục và các mặt phẳng tọa độ trong hệ tọa độ địa phương, là kết quả của việc đạo hàm các hàm dạng theo các tọa độ không gian.

Trường ứng suất trong phần tử hữu hạn được xác định thông qua trường biến dạng theo định luật Hook có dạng

$$\{\sigma(x, y, z)\} = [D]\{\varepsilon(x, y, z)\} = [D][B]\{U\} \quad (2.3.7)$$

trong đó $[D]$ là ma trận các hằng số vật lý của phần tử. Phần tử hữu hạn có thể làm bằng vật liệu đẳng hướng, dị hướng và $[\rho]$, $[D]$ có thể thay đổi theo từng phần tử.

Động năng T và thế năng V của toàn hệ được xác định như sau

$$T = \frac{1}{2} \int_V \{\dot{u}\}^T [\rho] \{\dot{u}\} dV$$

$$V = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV \quad (2.3.8)$$

với $[\rho]$ là ma trận khối lượng.

Sử dụng nguyên lý tác dụng tối thiểu của Haminton

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta [T(t) - V(t)] dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W(t) dt = 0$$

ta thu được điều kiện dừng có dạng

$$\delta \left(\frac{1}{2} \{\dot{U}\}^T [M] \{\dot{U}\} + \frac{1}{2} \{U\}^T [K] \{U\} - \{U\}^T \{P\} \right) = 0 \quad (2.3.9)$$

Từ đó ta có phương trình chuyển động của toàn hệ ở dạng ma trận

$$[M] \{\ddot{U}\} + [K] \{U\} = \{P\} \quad (2.3.10)$$

với các ma trận khối lượng $[M]$ và ma trận độ cứng $[K]$ của cả hệ có dạng

$$\begin{aligned} [M] &= \int [N]^T [\rho] [N] dV \\ [K] &= \int [B]^T [D] [B] dV \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

và véc tơ tải trọng của cả hệ $\{P\}$ có dạng

$$\{P\} = \{P_i\} = \frac{\delta W}{\delta U_i} \quad (2.3.12)$$

Mặt khác, vì động năng và thế năng của cả hệ bằng tổng động năng và thế năng của từng phần tử hữu hạn riêng biệt nên

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_e \int_{V_e} \{\dot{u}_e\}^T [\rho_e] \{\dot{u}_e\} dV_e \\ V &= \frac{1}{2} \sum_e \int_{V_e} \{\varepsilon_e\}^T \{\sigma_e\} dV_e = \frac{1}{2} \sum_e \int_{V_e} \{\varepsilon_e\}^T [D_e] \{\varepsilon_e\} dV_e \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

với e là chỉ số của phần tử hữu hạn e .

Sử dụng điều kiện dừng của nguyên lý Hamilton ta có

$$\delta \left(\sum_e \frac{1}{2} \{\dot{U}_e\}^T [M_e] \{\dot{U}_e\} + \sum_e \frac{1}{2} \{U_e\}^T [K_e] \{U_e\} - \sum_e \{U_e\}^T \{P_e\} \right) = 0$$

Ký hiệu $[T_e]$ là ma trận chuyển đổi chỉ có các phần tử liên quan đến phần tử e khác không và bằng cosin chỉ phương của các trục tọa độ địa phương gắn liền với phần tử e trong hệ tọa độ tổng thể ($[T_e][T_e]^T = [T_e]^T [T_e] = I$)

$$\{U_e\} = [T_e] \{U\} \Leftrightarrow \{U\} = [T_e]^T \{U_e\} \quad (2.3.14)$$

Khi đó ta có

$$\delta \left(\frac{1}{2} \{U\}^T \left(\sum_e [T_e]^T [M_e] [T_e] \right) \{\dot{U}\} + \frac{1}{2} \{U\}^T \left(\sum_e [T_e]^T [K_e] [T_e] \right) \{U\} - \{U\}^T \left(\sum_e [T_e]^T \{P_e\} \right) \right) = 0 \quad (2.3.15)$$

So sánh các phương trình (2.3.9) và (2.3.15), ta có

$$\begin{aligned} [M] &= \sum_e [T_e]^T [M_e] [T_e] \\ [K] &= \sum_e [T_e]^T [K_e] [T_e] \\ \{P\} &= \sum_e [T_e]^T \{P_e\} \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

trong đó các ma trận $[M_e]$, $[K_e]$ có dạng (2.3.11) và véc tơ $\{P_e\}$ có dạng (2.3.12) được xác định tương ứng với phần tử e .

Nếu kể đến lực cản dao động, ứng suất và biến dạng ban đầu thì phương trình (2.3.10) có dạng đầy đủ như sau

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{P\} = \{P_V\} + \{P_S\} + \{P_{\varepsilon_0}\} - \{P_{\sigma_0}\} + \{P_C\} \quad (2.3.17)$$

trong đó

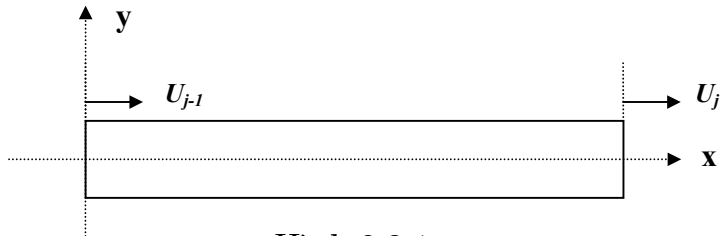
- a) Ma trận $[C] = \sum_e [T_e]^T [C_e] [T_e]$ với $[C_e] = \int_{V_e} [N_e]^T [v_e] [N_e] dV_e$ là ma trận cản của toàn hệ, $[v_e]$ là ma trận các tham số cản của phần tử e .
- b) Véc tơ $\{P_V\} = \sum_e [T_e]^T \{P_{V_e}\}$ với $\{P_{V_e}\} = \int_{V_e} [N_e]^T \{f_{V_e}\} dV_e$ là véc tơ tải trọng khối quy đổi về nút.
- c) Véc tơ $\{P_S\} = \sum_e [T_e]^T \{P_{S_e}\}$ với $\{P_{S_e}\} = \int_{S_e} [N_e]^T \{f_{S_e}\} dS_e$ là véc tơ tải trọng bề mặt quy đổi về nút.
- d) Véc tơ $\{P_{\varepsilon_0}\} = \sum_e [T_e]^T \{P_{\varepsilon_0}^e\}$ với $\{P_{\varepsilon_0}^e\} = \int_{V_e} [B_e]^T [D_e] \{\varepsilon_{\varepsilon_0}^e\} dV_e$ thể hiện ảnh hưởng của biến dạng ban đầu trong vật thể được quy đổi về nút.
- e) Véc tơ $\{P_{\sigma_0}\} = \sum_e [T_e]^T \{P_{\sigma_0}^e\}$ với $\{P_{\sigma_0}^e\} = \int_{V_e} [B_e]^T \{\sigma_{\sigma_0}^e\} dV_e$ thể hiện ảnh hưởng của ứng suất ban đầu trong vật thể được quy đổi về nút.
- f) Véc tơ P_C là véc tơ tải trọng tập trung tại nút trong hệ tọa độ tổng thể.

2.3.3. Một số phần tử hữu hạn thông dụng.

Ta xét một vài ví dụ trong việc xây dựng các ma trận độ cứng, khối lượng của các phần tử đơn giản thông dụng trong thực tế như phần tử thanh, phần tử dầm và phần tử bản.

a) Phần tử thanh

Xét một thanh có chiều dài L , tiết diện A chỉ làm việc trong trạng thái kéo nén. Giả sử môđul đàn hồi của vật liệu là E và lực ngoài tác dụng là một lực phân bố dọc theo chiều dài thanh với mật độ $q(x,t)$. Chọn hai chuyển vị dọc trục làm hai bậc tự do (Hình 2.3.1).



Hình 2.3.1

Như đã thấy ở phần trên, vấn đề then chốt là chọn hàm dạng. Theo định nghĩa hàm dạng mô tả mối quan hệ giữa trường chuyển vị bên trong phần tử với các chuyển vị nút. Trong trường hợp này ta sẽ chọn hàm dạng dựa trên một biểu diễn mang ý nghĩa cơ học rõ ràng như sau: hàm dạng cần tìm là nghiệm phương trình mô tả biến dạng dọc trục

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

với các điều kiện biên

$$\begin{cases} u(0,t) = U_1(t) \\ u(L,t) = U_2(t) \end{cases}$$

Hiển nhiên là ta sẽ có ngay nghiệm

$$u(x,t) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)U_1 + \frac{x}{L}U_2$$

và xác định được các hàm dạng

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{x}{L}, \phi_2(x) = \frac{x}{L} \tag{2.3.18}$$

Ma trận hình học B có dạng $B = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{L} [1 \quad -1]$.

Ma trận hằng số vật lý của phần tử có dạng $[D] = E$.

Khi đó, ma trận khối lượng và độ cứng của phần tử thanh có dạng

$$\begin{aligned}
 M_e &= \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\
 K_e &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{2.3.19}$$

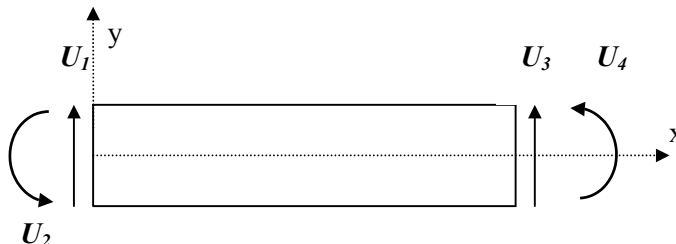
Lực quy về nút của phần tử có dạng

$$\begin{aligned}
 P_1^e(t) &= \int_0^L q(x,t) \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx \\
 P_2^e(t) &= \int_0^L q(x,t) \frac{x}{L} dx
 \end{aligned}
 \tag{2.3.20}$$

Ta có thể xây dựng các ma trận phần tử cho trường hợp thanh 3 nút hoặc nhiều hơn. Nhưng về thuật toán không có gì thay đổi nhiều.

b) Phần tử dầm hai chiều

Xét phần tử thanh chỉ chịu uốn trong mặt phẳng, trường hợp này gọi là phần tử dầm hai chiều. Chọn các chuyển vị ngang và góc xoay ở hai đầu làm các bậc tự do (hình vẽ 2.3.2).



Hình 2.3.2

Các hàm dạng được tìm từ việc giải phương trình

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = 0,$$

với các điều kiện biên

$$\begin{cases}
 w(0,t) = U_1(t) \\
 w'(0,t) = U_2(t) \\
 w(L,t) = U_3(t) \\
 w'(L,t) = U_4(t)
 \end{cases}$$

Nghiệm của bài toán biên nêu trên có dạng

$$w(x,t) = \phi_1(x)U_1(t) + \phi_2(x)U_2(t) + \phi_3(x)U_3(t) + \phi_4(x)U_4(t)$$

trong đó các hàm dạng là các hàm Hermit

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3, & \phi_2(x) &= x - 2\frac{x^2}{L} + 3\frac{x^3}{L^2}, \\ \phi_3(x) &= 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3; & \phi_4(x) &= -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}. \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Ma trận hình học có dạng $B = \begin{bmatrix} -\frac{d^2\phi_1}{dx^2} & -\frac{d^2\phi_2}{dx^2} & -\frac{d^2\phi_3}{dx^2} & -\frac{d^2\phi_4}{dx^2} \end{bmatrix}$.

Ma trận hằng số vật lý của phần tử có dạng $[D] = EI$.

Khi đó, ma trận khối lượng và độ cứng phần tử có dạng

$$\begin{aligned} M_e &= \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \\ K_e &= \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

c) *Phần tử dầm ba chiều*

Phần tử dầm hai chiều chỉ áp dụng cho thanh phẳng. Trong không gian cần phải có dạng phần tử dầm đầy đủ hơn. Phần tử dầm ba chiều là tổ hợp của phần tử thanh, hai phần tử dầm hai chiều và phần tử xoắn. Các phần tử thanh và dầm đã được xây dựng ở trên. Ở đây trước khi xây dựng phần tử dầm ba chiều, chúng ta nói đôi lời về phần tử xoắn. Trong thực tế người ta không dùng khái niệm phần tử xoắn này, nhưng vì khi xét dầm trong không gian thì nhiều khi không thể bỏ qua biến dạng xoắn được. Vì vậy trong phần tử dầm không gian cần phải xét cả chuyển động xoắn của dầm. Về hình thức phương trình biến dạng xoắn giống như phương trình biến dạng dọc trục, vì phương trình mô tả chuyển động cũng có dạng

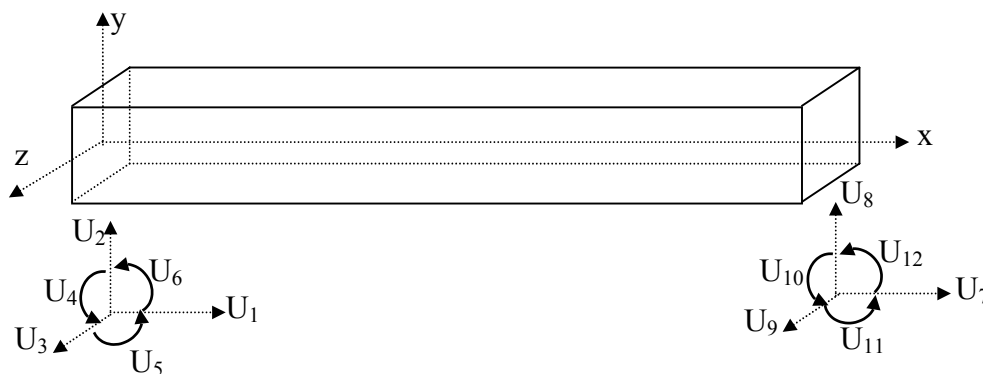
$$GJ_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0.$$

Do đó, nếu đưa vào hai bậc tự do là góc xoắn của thanh ở hai đầu là θ_1, θ_2 , thì các hàm dạng tương ứng với biến dạng xoắn sẽ có dạng (2.18). Khi đó, tương tự như trường hợp dọc trục ở trên ta có thể xây dựng được ma trận khối lượng và độ cứng của phần tử xoắn có dạng

$$M_e = \frac{\rho J_x L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$K_e = \frac{GJ_x}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$
(2.3.23)

Bây giờ ta chuyển sang việc xây dựng các ma trận khối lượng và độ cứng của phần tử dầm 3 chiều. Ta đưa vào các bậc tự do (Hình 2.3.3) sau đây:



Hình 2.3.3. Mô hình phần tử dầm 3 chiều

U_1, U_7 chuyển vị dọc trục của thanh ở hai đầu;

U_2, U_8 chuyển vị uốn ngang theo trục y ;

U_3, U_9 độ võng theo trục z tại hai đầu thanh;

U_4, U_{10} là góc xoắn ở hai đầu;

U_5, U_{11} là các góc xoay ở hai đầu thanh theo quanh trục y ;

U_6, U_{12} là các góc xoay quanh trục z .

Như vậy, vectơ chuyển vị nút gồm 12 thành phần $U = \{U_1, \dots, U_{12}\}^T$.

Ta đưa vào ký hiệu các hàm dạng sau đây

$$\rho_1(x) = \rho_4(x) = 1 - \frac{x}{L}, \quad \rho_7(x) = \rho_{10}(x) = \frac{x}{L}$$

$$\rho_2(x) = \rho_3(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3, \quad \rho_5(x) = -\rho_6(x) = L\left[\frac{x}{L} - 2\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3\right],$$

$$\rho_8(x) = \rho_9(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3; \quad \rho_{11}(x) = -\rho_{12}(x) = L\left[-\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3\right]$$
(2.3.24)

và các đạo hàm của hàm dạng

và ma trận độ cứng K_e của phần tử có dạng

$$\left[\begin{array}{cccccc} \frac{EF}{L} & & & & & \\ 0 & \frac{12EJ_z}{L^3} & & & & \\ 0 & 0 & \frac{12EJ_y}{L^3} & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_x}{L} & & \\ 0 & 0 & -\frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{L} & \\ 0 & \frac{6EJ_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EJ_z}{L} \\ -\frac{EF}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EF}{L} \\ 0 & -\frac{12EJ_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EJ_z}{L^2} & 0 & \frac{12EJ_z}{L^3} \\ 0 & 0 & \frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EJ_y}{L^3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_x}{L} \\ 0 & 0 & -\frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{L} \\ 0 & \frac{6EJ_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EJ_z}{L} & 0 & -\frac{6EJ_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EJ_z}{L} \end{array} \right] \quad (2.3.27)$$

Hai ma trận trên đều đối xứng qua đường chéo nên ta không cần viết các thành phần đối xứng.

Đối với khung không gian thì việc ghép nối các ma trận khối lượng và độ cứng phần tử thành các ma trận tương ứng của cả hệ được tiến hành như đã trình bày ở phần chung nêu trên.

d) Phần tử tám chịu tải trọng ngang

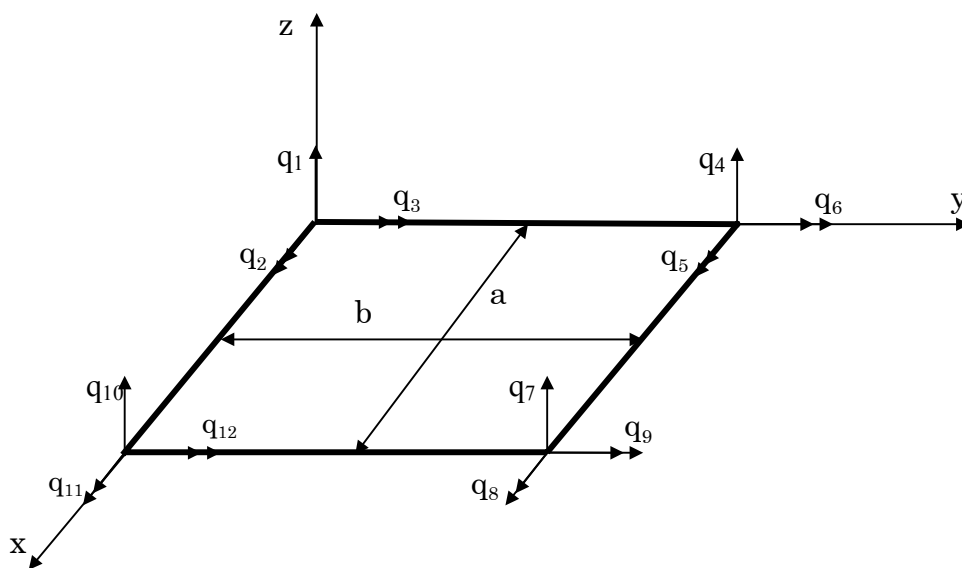
Giả thiết độ võng $w(x,y)$ của tấm là nhỏ. Nếu giả thiết rằng độ võng này độc lập với chuyển vị của các điểm thuộc mặt trung bình của bản $u_0(x,y)$ và $v_0(x,y)$, tức là độc lập với trạng thái ứng suất trong mặt trung bình, thì việc xác định độ võng này trở nên đơn giản hơn. Tuy nhiên khi áp dụng phương pháp PTHH cho bài toán tấm có một số khó khăn

- Nếu trong các bài toán thanh và bài toán tấm phẳng chịu tải trọng nằm trong mặt phẳng trung bình, nghiệm chuyển vị dưới dạng đa thức là duy nhất thì ngược lại trong bài toán tấm chịu tải trọng ngang, nghiệm chuyển vị dưới dạng đa thức lại không phải là duy nhất dẫn đến ma trận độ cứng thu được khác nhau. Khi đó nảy sinh vấn đề ma trận độ cứng nào là xấp xỉ tốt nhất với nghiệm chính xác.

- Yêu cầu về tính liên tục của các đạo hàm của độ võng tại các đường biên của phần tử để đảm bảo khi ghép các phần tử không xuất hiện các vết gãy đã dẫn đến những khó khăn về mặt toán học.

Tuy nhiên, thực tế tính toán cho thấy, nếu chấp nhận điều kiện liên tục của độ võng và bỏ qua điều kiện liên tục của các đạo hàm hàm độ võng tại các đường biên của phần tử (được gọi là các hàm độ võng “*không tương thích*”) thì kết quả thu được hội tụ về nghiệm chính xác khi tăng số phần tử hữu hạn. Tất nhiên, nếu ta chọn hàm độ võng thỏa mãn điều kiện liên tục của độ võng và điều kiện liên tục của các đạo hàm hàm độ võng tại các đường biên của phần tử (được gọi là các hàm độ võng “*tương thích*”) thì số phần tử hữu hạn phải chia sẽ nhỏ hơn so với việc chọn hàm độ võng không tương thích để có được cùng một độ chính xác.

Khi tính toán tấm bằng phương pháp PTHH, người ta thường chia tấm thành các phần tử chữ nhật và phần tử hình tam giác. Tại mỗi nút của phần tử có 3 chuyển vị suy rộng: 1 chuyển vị theo trục z và 2 góc xoay quanh các trục x và y (hình 2.3.4). Dưới đây, ta dẫn ra 2 trường hợp lựa chọn hàm dạng độ võng cho phần tử tám hình chữ nhật.



Hình 2.3.4 Phần tử tám hình chữ nhật chịu uốn ngang

Hàm dạng độ võng “*không tương thích*” $\psi_i, i=1,2,\dots,12$ với $\xi = \frac{x}{a}; \eta = \frac{y}{b}$

$$\psi_1 := 1 - 3\xi^2 - \xi\eta - 3\eta^2 + 2\xi^3 + 3\xi^2\eta + 3\xi\eta^2 + 2\eta^3 - 2\xi^3\eta - 2\xi\eta^3$$

$$\psi_2 := b(\eta - \xi\eta - 2\eta^2 + 2\xi\eta^2 + \eta^3 - \xi\eta^3)$$

$$\psi_3 := a(-\xi + \xi\eta + 2\xi^2 - 2\xi^2\eta - \xi^3 + \xi^3\eta)$$

$$\begin{aligned}
 \psi_4 &:= 3 \eta^2 + \xi \eta - 2 \eta^3 - 3 \xi \eta^2 - 3 \xi^2 \eta + 2 \xi \eta^3 + 2 \xi^3 \eta \\
 \psi_5 &:= b (-\eta^2 + \eta^3 + \xi \eta^2 - \xi \eta^3) \\
 \psi_6 &:= a (-\xi \eta + 2 \xi^2 \eta - \xi^3 \eta) \\
 \psi_7 &:= -\xi \eta + 3 \xi^2 \eta + 3 \xi \eta^2 - 2 \xi^3 \eta - 2 \xi \eta^3 \\
 \psi_8 &:= b (-\xi \eta^2 + \xi \eta^3) \\
 \psi_9 &:= a (\xi^2 \eta - \xi^3 \eta) \\
 \psi_{10} &:= 3 \xi^2 + \xi \eta - 2 \xi^3 - 3 \xi \eta^2 + 2 \xi^3 \eta + 2 \xi \eta^3 - 3 \xi^2 \eta \\
 \psi_{11} &:= b (\xi \eta - 2 \xi \eta^2 + \xi \eta^3) \\
 \psi_{12} &:= a (\xi^2 - \xi^3 - \xi^2 \eta + \xi^3 \eta)
 \end{aligned} \tag{2.3.28}$$

Hàm dạng độ võng “tương thích” χ_i , $i=1,2,\dots,12$ với $\xi = \frac{x}{a}$; $\eta = \frac{y}{b}$

$$\begin{aligned}
 \chi_1 &:= (1 + 2 \xi) (1 - \xi)^2 (1 + 2 \eta) (1 - \eta)^2 \\
 \chi_2 &:= (1 + 2 \xi) (1 - \xi)^2 \eta (1 - \eta)^2 b \\
 \chi_3 &:= -\xi (1 - \xi)^2 (1 + 2 \eta) (1 - \eta)^2 a \\
 \chi_4 &:= (1 + 2 \xi) (1 - \xi)^2 (3 - 2 \eta) \eta^2 \\
 \chi_5 &:= -(1 - 2 \xi) (1 - \xi)^2 (1 - \eta) \eta^2 b \\
 \chi_6 &:= -\xi (1 - \xi)^2 (3 - 2 \eta) \eta^2 a \\
 \chi_7 &:= (3 - 2 \xi) \xi^2 (3 - 2 \eta) \eta^2 \\
 \chi_8 &:= -(3 - 2 \xi) \xi^2 (1 - \eta) \eta^2 b \\
 \chi_9 &:= (1 - \xi) \xi^2 (3 - 2 \eta) \eta^2 a \\
 \chi_{10} &:= (3 - 2 \xi) \xi^2 (1 + 2 \eta) (1 - \eta)^2 \\
 \chi_{11} &:= (3 - 2 \xi) \xi^2 \eta (1 - \eta)^2 b \\
 \chi_{12} &:= (1 - \xi) \xi^2 (1 + 2 \eta) (1 - \eta)^2 a
 \end{aligned} \tag{2.3.29}$$

Ma trận hình học có dạng $B = [B_1 \ B_2 \ \dots \ B_{12}]$ với

$$B_i = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \tag{2.3.30}$$

và N_i là các hàm dạng “không tương thích” (2.3.28) hay “tương thích” (2.3.29).

Ma trận hằng số vật lý của phần tử có dạng

$$[D] = \frac{E}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.3.31)$$

Từ đó, ma trận độ cứng $[K_e]$ và khối lượng $[M_e]$ của phần tử có dạng

$$[K_e] = [k_{ij}] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \int_0^a \int_0^b \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \right) + \\ 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \right] \end{array} \right\} dx dy \quad (2.3.32)$$

$$[M_e] = [m_{ij}] = \rho h \int_0^a \int_0^b N_i N_j dx dy; \quad i, j = 1, 2, \dots, 12 \quad (2.3.33)$$

với h là độ dày phần tử tấm. Các tích phân (2.3.32), (2.3.33) có thể thực hiện dễ dàng nhờ các phần mềm symbolic như Maple hay Matlab.

2.3.4. Một số ví dụ

a) *Dầm công xôn* chịu uốn trong mặt phẳng (Oxy) với đầu trái bị ngàm chặt và đầu phải tự do. Khi đó $U_1=U_2=0$ và hai bậc tự do còn lại là chuyển vị ngang và góc xoay tại đầu phải, ký hiệu $U_3(t), U_4(t)$.

Từ các ma trận khối lượng và độ cứng (2.3.22) của dầm 2 chiều, khử các hàng và cột tương ứng với bậc tự do $U_1=U_2=0$, ta thu được ma trận khối lượng và độ cứng của dầm công xôn

$$M = \frac{\rho FL}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L \\ -22L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Phương trình tần số dao động riêng có dạng

$$\det [K - \omega^2 M] \equiv \det \left\{ \begin{bmatrix} 6 & -3L \\ -3L & 2L^2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 78 & -11L \\ -11L & 2L^2 \end{bmatrix} \right\} = 0,$$

$$\lambda = \omega^2 \frac{\rho FL^4}{420 EI} \text{ hay } \omega = \sqrt{420 \frac{EI\lambda}{\rho FL^4}}$$

hay đơn giản là $35\lambda^2 - 102\lambda + 3 = 0$.

Phương trình cuối cho ta hai nghiệm $\lambda_1 = 0.02947$, $\lambda_2 = 2.885$, từ đó có thể tính được hai tần số bằng

$$\omega_1 = 3.5327 \sqrt{\frac{EI}{\rho FL^4}}, \omega_2 = 34.8069 \sqrt{\frac{EI}{\rho FL^4}}.$$

So với nghiệm giải tích

$$\omega_1 = 3.516 \sqrt{\frac{EI}{\rho FL^4}}, \omega_2 = 22.034 \sqrt{\frac{EI}{\rho FL^4}},$$

ta thấy nghiệm đầu tiên có độ chính xác tương đối tốt, còn nghiệm thứ hai có sai số lớn. Đó là do trong ví dụ trên ta xem dầm công xôn chỉ là một phần tử hữu hạn. Khi chia dầm công xôn thành nhiều phần tử nhỏ hơn thì kết quả tính tần số sẽ đạt được độ chính xác cao hơn. Điều này được minh họa bằng số trong ví dụ 1 của mục (2.4.4.a) dưới đây.

b) Xác định tần số và dạng dao động riêng cho khung phẳng (2.1.4.d)

Sử dụng công thức (2.3.22), việc xác định ma trận độ cứng K và việc xác định ma trận khối lượng M theo phương pháp thu gọn khối lượng hoàn toàn tương tự như đã trình bày trong ví dụ (2.1.4.d). Nếu sử dụng công thức (2.3.22), ta xác định ma trận khối lượng đầy đủ M

$$[M] = \frac{mL}{210} \begin{bmatrix} 786 & 11L & 11L \\ 11L & 26L^2 & -18L^2 \\ 11L & -18L^2 & 26L^2 \end{bmatrix}$$

trong đó

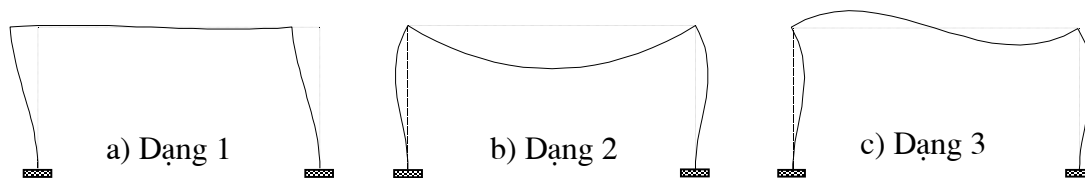
$$\begin{aligned} m_{11} &= \frac{mL}{420} (156)(2) + (1.5m)(2L) = \frac{mL}{210} (786) \\ m_{21} &= m_{31} = \frac{mL}{420} (22L) = \frac{mL}{210} (11) \\ m_{22} &= m_{33} = \frac{mL}{420} (4L^2) + \frac{(1.5m)(2L)}{420} (4)(2L)^2 = \frac{mL}{210} (26L^2) \\ m_{32} &= \frac{(1.5m)(2L)}{420} (-3)(2L)^2 = \frac{mL}{210} (-18L^2) \end{aligned}$$

với chú ý rằng tính m_{11} ta có kể đến khối lượng khi dao động dọc của dầm ngang là số hạng $(1.5m)(2L)$.

Từ đó, ta xác định được các tần số riêng của khung là

$$\omega_1 = \frac{2.3032}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}; \quad \omega_2 = \frac{6.1791}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}; \quad \omega_3 = \frac{20.7124}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

và các dạng dao động riêng thể hiện trên hình 2.3.5



Hình 2.3.5 Các dạng dao động riêng của khung

Nếu sử dụng phương pháp thu gọn khối lượng như trong ví dụ 2.1.4.d thì ta chỉ xác định được tần số đầu tiên của khung là

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{6}}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = \frac{2.4495}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

và dạng dao động riêng đầu tiên tương tự như trên hình 2.3.5.a.

- c) Ví dụ khung không gian sẽ được xem xét trong phần áp dụng máy tính điện tử vào phân tích động lực học công trình (2.4.4.b).
- d) Xác định 4 tần số riêng đầu tiên của tấm hình vuông kích thước $a \times a$ với các cạnh tựa tự do khi sử dụng các hàm dạng độ võng “không tương thích” (2.3.28). Khi đó các tần số riêng có dạng

$$\omega_i = \alpha_i \sqrt{\frac{1}{\rho h a^4} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}}$$

với giá trị α_i theo các phương án chọn lưới phần tử hữu hạn khác nhau được dẫn ra ở bảng 2.3.1. Rõ ràng là khi chia tăng số PTHH thì tần số riêng thu được càng gần với nghiệm chính xác hơn.

Bảng 2.3.1.

Lưới chia	Tần số 1	Tần số 2	Tần số 3	Tần số 4
2×2	20.471	53.071	56.932	127.410
4×4	19.848	51.448	54.020	91.018
8×8	19.754	50.913	52.721	85.314
Nghiệm chính xác	19.739	49.348	49.348	78.957

2.4. Phương pháp ma trận độ cứng động

Phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH), được trình bày tóm tắt ở trên đã làm thay đổi hoàn toàn bộ mặt của cơ học kết cấu, đặc biệt là động lực học công trình. Có người cho rằng khó có thể có một phương pháp phân tích kết cấu hữu hiệu hơn phương pháp PTHH. Có lẽ phải thế hệ tiếp sau mới có thể trả lời được câu hỏi này. Tuy nhiên, cũng có nhiều người băn khoăn với độ chính xác của phương pháp PTHH. Họ cố gắng đi tìm một đánh giá nào đó về sai số của phương pháp. Nhưng làm sao mà đánh giá được sai số của một phương pháp, mà thực chất là một mô hình khi chúng ta không biết được lời giải chính xác. Chỉ có một cách duy nhất để lường tượng sai số của phương pháp PTHH là so sánh với thực nghiệm đối với các kết cấu phức tạp. Trong trường hợp kết cấu đơn giản có thể so sánh với kết quả giải tích, nhưng đây không thể là sai số của phương pháp PTHH bởi vì phương pháp giải tích cũng có sai số của nó.

Thật là thú vị là gần đây, khi nghiên cứu phát triển phương pháp ma trận độ cứng động cho các hệ liên tục, người ta phát hiện ra rằng, phương pháp PTHH chỉ là một sự gần đúng của phương pháp ma trận độ cứng động. Thật vậy, trong cả quy trình ứng dụng phương pháp PTHH, chỉ có một chỗ duy nhất mà chúng ta phải "*xấp xỉ*" trường chuyển vị trong phần tử bằng trường chuyển vị tĩnh. Tức là đã bỏ qua yếu tố động lực học của trường chuyển vị. Nếu các hàm dạng trong phương pháp PTHH chọn là trường chuyển vị động, thì phương pháp PTHH không phải là phương pháp gần đúng mà là một phương pháp chính xác. Khi đó không cần phải đánh giá sai số của phương pháp PTHH nữa. Chính phương pháp ma trận độ cứng động cho kết cấu đã ra đời trên cơ sở ý tưởng này. Như vậy, có thể định nghĩa rất ngắn gọn: Phương pháp ma trận độ cứng động là phương pháp phần tử hữu hạn, trong đó các hàm dạng được chọn là trường chuyển vị động của phần tử. Tuy nhiên, để có thể chọn hàm dạng động một cách đơn giản và khả thi, thì ta phải xét bài toán động của phần tử trong miền tần số, tức là xét chuyển động với biên độ phức phụ thuộc vào tần số. Vì vậy, thực chất quy trình phương pháp ma trận độ cứng động về hình thức không khác gì phương pháp PTHH, nhưng để giới thiệu phương pháp này cũng cần thiết phải nhấn mạnh một số đặc điểm riêng biệt của nó.

2.4.1. Khái niệm ma trận độ cứng động

Trước hết ta xem xét khái niệm ma trận độ cứng động đối với hệ hữu hạn bậc tự do

$$M\ddot{U}(t) + C\dot{U}(t) + KU(t) = P(t).$$

có dạng

$$\hat{K}(\omega) = -\omega^2 M + i\omega C + K$$

Đây là ma trận hàm của tần số và phụ thuộc tuyến tính vào các ma trận khối lượng, độ cứng, hệ số cản. Có thể chỉ ra rằng

$$\hat{K}(0) = K$$

có nghĩa là ma trận độ cứng động tại giá trị gốc của tần số cho ta ma trận độ cứng thông thường mà từ đây ta gọi là *ma trận độ cứng tĩnh* cho thêm chỉ số 0 ở dưới K_0 . Hơn nữa, nếu xét trong miền tần số, tức giả sử $\hat{U}(\omega), \hat{P}(\omega)$ là biên độ phức của chuyển vị và tải trọng, thì ta có quan hệ

$$\hat{K}(\omega)\hat{U}(\omega) = \hat{P}(\omega) \quad (2.4.1)$$

Đây chính là mối liên hệ giữa lực tác dụng và chuyển vị biểu diễn bản chất của ma trận độ cứng động. Từ đây, bài toán động lực học dẫn đến giải phương trình đại số đối với chuyển vị. Chỉ có điều, phương trình đại số này phải giải trong miền tần số, có nghĩa là cho tất cả các tần số trong một dải tần nào đó. Tư tưởng của phương pháp ma trận độ cứng động cho kết cấu công trình chính là thiết lập mối liên hệ (2.4.1), trong đó $\hat{K}(\omega)$ gọi là ma trận độ cứng động cho kết cấu, còn $\hat{U}(\omega), \hat{P}(\omega)$ lần lượt là biên độ phức của chuyển vị nút và tải trọng đưa về nút. Mục tiêu chính là xây dựng ma trận $\hat{K}(\omega)$ và véc tơ $\hat{P}(\omega)$.

2.4.2. Quy trình phương pháp ma trận độ cứng động cho kết cấu

Quy trình chung của phương pháp ma trận độ cứng động được phát biểu như sau:

Bước 1. Chia vật thể đàn hồi (hay kết cấu công trình) thành các phần tử bằng tập hợp các điểm nút (lưới) và chọn véc tơ chuyển vị nút $U(t)$ như trong phương pháp PTHH.

Bước 2. Xét từng phần tử riêng biệt với véc tơ chuyển vị nút phần tử trong hệ toạ độ địa phương U_e . Giải bài toán động cho phần tử trong miền tần số với điều kiện biên là các chuyển vị nút $\hat{U}_e(\omega)$ để thiết lập mối liên hệ

$$\hat{N}_e(\omega) = \hat{K}_e(\omega)\hat{U}_e(\omega) + \hat{P}_e(\omega) \quad (2.4.2)$$

trong đó $\hat{N}_e(\omega)$ là biên độ phức của các lực đầu nút, $\hat{K}_e(\omega)$ là ma trận độ cứng động và $\hat{P}_e(\omega)$ là biên độ phức của tải trọng cho phần tử trong hệ toạ độ địa phương. Thực chất ở đây là xây dựng ma trận độ cứng động và véc tơ tải trọng phần tử $\hat{K}_e(\omega)$ và $\hat{P}_e(\omega)$.

Bước 3. Ghép nối ma trận độ cứng động và véc tơ tải trọng cho tất cả các phần tử bằng cách chuyển phương trình (2.4.2) về hệ toạ độ tổng thể và cân bằng tất cả các lực nút, thoả mãn các điều kiện biên. Cuối cùng ta được phương trình (2.4.1) với

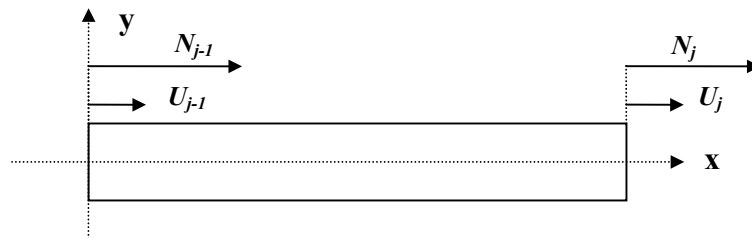
$$\begin{aligned} \hat{K}(\omega) &= \sum_e a_e \hat{K}_e(\omega) a_e^{-1} \\ \hat{P}(\omega) &= -\sum_e a_e \hat{P}_e(\omega) a_e^{-1} \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Khác với phương pháp phần tử hữu hạn, ở đó sử dụng nguyên lý năng lượng để thiết lập phương trình chuyển động, quy trình của phương pháp ma trận độ cứng động tương tự như phương pháp độ cứng trong cơ học kết cấu. Tuy nhiên, kết quả ghép nối các ma trận độ cứng động phần tử thành ma trận độ cứng động tổng thể cho cả kết cấu cũng giống như trong phương pháp PTHH.

2.4.3. Một số phần tử thông dụng

a) Phần tử thanh kéo nén và trục xoắn

Xét một phần tử thanh có tiết diện là F , môđul đàn hồi E , mật độ khối ρ , chiều dài $\ell_j = x_j - x_{j-1}$ (hình vẽ 2.4.1) chịu một tải phân bố $Q(x, t)$.



Hình 2.4.1. Chuyển vị nút và lực đầu nút cho phần tử thanh

Phương trình dao động dọc của thanh có dạng

$$EF \left[\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x^2 \partial t} \right] + Q(x, t) = \rho F \left[\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} + \mu_2 \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right]$$

trong đó μ_1 là hệ số cản nhớt của vật liệu, μ_2 là hệ số cản của môi trường.

Bằng cách đặt:

$$U(x, t) = u(x, \omega) e^{i\omega t}$$

$$Q(x, t) = q(x, \omega) e^{i\omega t}$$

với $u(x, \omega)$ và $q(x, \omega)$ là biên độ của chuyển vị dọc trục và tải trọng dọc trên thanh, ta thu được phương trình

$$\frac{d^2 u(x, \omega)}{dx^2} + \lambda^2 u(x, \omega) = \tilde{q}(x, \omega),$$

trong đó

$$\tilde{q} = -\frac{q(x, \omega)}{\hat{E}F}; \quad \lambda^2 = \omega^2 \frac{\rho}{\hat{E}} \left(1 - \frac{i\mu_2}{\omega} \right); \quad i^2 = -1$$

là tham số động lực học (ω là tần số vòng - rad/giây) và

$$\hat{E} = E(1 + i\mu_1\omega)$$

là modul đàn hồi phức, dưới đây để cho dễ theo dõi ta vẫn dùng ký hiệu E như khi không có cản.

Chuyển vị dọc trục tổng quát có dạng

$$u(x) = A \sin \lambda \bar{x} + B \cos \lambda \bar{x} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\bar{x}} \sin \lambda (\bar{x} - \tau) \tilde{q}(x_{j-1} + \tau, \omega) d\tau$$

trong đó

$$\bar{x} = x - x_{j-1}; \quad x_{j-1} \leq x \leq x_j$$

với A, B là các hằng số phụ thuộc vào các điều kiện ở hai đầu nút.

Giả sử các chuyển vị nút là u_{j-1} và u_j , các lực đầu phần tử là N_{j-1}, N_j . Các điều kiện biên sẽ là

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x_{j-1}) = u_{j-1} \\ u(x_j) = u_j \\ -EF \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_{j-1}} = N_{j-1} \\ EF \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_j} = N_j \end{array} \right.$$

Từ các điều kiện này ta có mối liên hệ

$$\begin{pmatrix} u_j \\ N_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \lambda \ell_j & -(\lambda EF)^{-1} \sin \lambda \ell_j \\ -\lambda EF \sin \lambda \ell_j & -\cos \lambda \ell_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{j-1} \\ N_{j-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_j \\ q'_j \end{pmatrix} \quad (2.4.4)$$

trong đó ký hiệu

$$q_j = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\ell_j} \sin \lambda (\ell_j - \tau) \tilde{q}(x_{j-1} + \tau, \omega) d\tau$$

$$q'_j = EF \int_0^{\ell_j} \cos \lambda (\ell_j - \tau) \tilde{q}(x_{j-1} + \tau, \omega) d\tau$$

Từ phương trình (2.4.4) ta có thể rút ra các quan hệ

$$\begin{pmatrix} N_{j-1} \\ N_j \end{pmatrix} = \lambda EF \begin{pmatrix} \cot g\lambda \ell_j & -\sec \lambda \ell_j \\ -\sec \lambda \ell_j & \cot g\lambda \ell_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{j-1} \\ u_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda EF \sec \lambda \ell_j & 0 \\ -\lambda EF \cot g\lambda \ell_j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_j \\ q'_j \end{pmatrix}$$

với các ký hiệu

$$\cot gz = \frac{\cos z}{\sin z}; \quad \sec z = \frac{1}{\sin z}$$

Như vậy ma trận độ cứng động và véc tơ tải trọng cho phần tử thanh chịu kéo hay nén có dạng

$$K_j(\omega) = EF \begin{bmatrix} \lambda \cot g\lambda \ell_j & -\lambda \sec \lambda \ell_j \\ -\lambda \sec \lambda \ell_j & \lambda \cot g\lambda \ell_j \end{bmatrix} \quad (2.4.5)$$

$$\begin{pmatrix} P_{j-} \\ P_{j+} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda EF \sec \lambda \ell_j & 0 \\ -\lambda EF \cot g\lambda \ell_j & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_j \\ q'_j \end{pmatrix}$$

Để dàng nhận thấy khi cho tần số ω tiến đến 0, ma trận độ cứng động cho ta ma trận độ cứng đã nhận được bằng phương pháp PTHH của phần tử thanh trong công thức (2.3.19), hay

$$K_j^0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} \hat{K}_j(\omega) = \frac{EF}{\ell_j} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

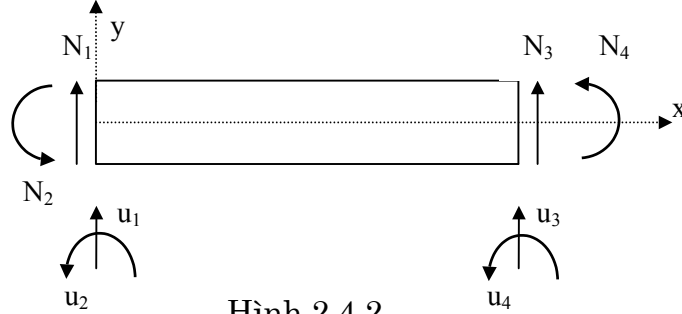
Tương tự, trong trường hợp xoắn ma trận độ cứng động và véc tơ tải ngoài vẫn có dạng như (2.4.5), nhưng thay vào chỗ E là G , và chỗ của F là I .

b) Phần tử dầm hai chiều chịu uốn

Xét một dầm chịu uốn trong mặt phẳng xy (hệ toạ độ địa phương, Hình 2.4.2.) có các tham số: modul đàn hồi E_z , diện tích mặt cắt ngang F , mômen quán tính tiết diện I_z , mật độ khối lượng ρ , chiều dài dầm L trong mặt phẳng Oxy của hệ toạ độ địa phương. Khi đó, phương trình tổng quát mô tả chuyển động uốn của dầm có dạng:

$$EI \left[\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \mu_1 \frac{\partial^5 w(x,t)}{\partial x^4 \partial t} \right] + \rho A \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \mu_2 \frac{\partial w}{\partial t} \right] = Q(x,t)$$

trong đó μ_1 là hệ số cản nhớt của vật liệu, μ_2 là hệ số cản của môi trường.



Hình 2.4.2

Bằng cách đặt:

$$w(x,t) = \Phi(x,\omega)e^{i\omega t}$$

$$Q(x,t) = q(x,\omega)e^{i\omega t}$$

với $\Phi(x,\omega)$ và $q(x,\omega)$ là biên độ của chuyển vị ngang và tải trọng ngang trên thanh, ta thu được phương trình

$$\frac{d^4 \Phi(x,\omega)}{dx^4} - \lambda^4 \Phi(x,\omega) = \tilde{q}(x,\omega) \quad , \quad (2.4.6)$$

trong đó

$$\tilde{q}(x,\omega) = \frac{q(x,\omega)}{\hat{EI}_z}; \quad \lambda^4 = \omega^2 \frac{\rho A}{\hat{EI}} \left(1 - \frac{i\mu_2}{\omega} \right); \quad i^2 = -1$$

là tham số động lực học (ω là tần số vòng - rad/giây), nếu $\lambda=0$ tức $\omega=0$ ta có trường hợp biến dạng tĩnh, với $\omega \neq 0$ thì $\Phi(x, \omega)$ là biên độ chuyển vị động và

$$\hat{E} = E_z(1 + i\mu_1\omega)$$

là modul đàn hồi phức, dưới đây để cho dễ theo dõi ta vẫn dùng ký hiệu E như khi không có cản.

Đưa vào các chuyển vị nút như sau

$$U_1 = \Phi(0); U_2 = \Phi'(0); U_3 = \Phi(l_j); U_4 = \Phi'(l_j)$$

Khi đó ta được véc tơ tọa độ suy rộng $U = \{U_1, U_2, U_3, U_4\}^T$, ngoài ra, ta đưa vào các lực nút sau đây

$$\begin{cases} N_1 = EI_z \Phi'''(0) \\ N_2 = -EI_z \Phi''(0) \\ N_3 = -EI_z \Phi'''(\ell_j) \\ N_4 = EI_z \Phi''(\ell_j) \end{cases}$$

là véc tơ lực đầu nút. Bản chất cơ học của các lực N và U được mô tả trong Hình 2.4.2. Khi đó, ta có nghiệm tổng quát của phương trình

$$\Phi(x) = \Phi_0(x) + \frac{1}{\lambda^3} \int_0^x K_4[\lambda(x-\tau)] \tilde{q}(\tau, \omega) d\tau$$

với $x \in [0, \ell_j]$ và

$$\Phi_0(x) = K_1(\lambda x) U_1 + \frac{K_2(\lambda x)}{\lambda} U_2 + \frac{K_4(\lambda x)}{EI_z \lambda^3} N_1 - \frac{K_3(\lambda x)}{EI_z \lambda^2} N_2$$

$K_1(x); K_2(x); K_3(x); K_4(x)$ là những hàm Krulôv đã đưa vào ở trên.

Ngoài ra đưa vào các hàm số

$$\begin{aligned} \bar{q}_1(\ell_j) &= \frac{1}{\lambda^3} \int_0^{\ell_j} K_4[\lambda(\ell_j - \tau)] \tilde{q}(\tau, \omega) d\tau \\ q_2(\ell_j) &= \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\ell_j} K_3[\lambda(\ell_j - \tau)] \tilde{q}(\tau, \omega) d\tau \\ \bar{q}_3(\ell_j) &= -EI \int_0^{\ell_j} K_1[\lambda(\ell_j - \tau)] \tilde{q}(\tau, \omega) d\tau \\ \bar{q}_4(\ell_j) &= \frac{EI}{\lambda} \int_0^{\ell_j} K_2[\lambda(\ell_j - \tau)] \tilde{q}(\tau, \omega) d\tau \end{aligned}$$

và véc tơ

$$\{\bar{q}\} = \{\bar{q}_1(\ell_j), \bar{q}_2(\ell_j), \bar{q}_3(\ell_j), \bar{q}_4(\ell_j)\}; j = 1, 2, \dots, n+1.$$

Khi đó theo phương pháp ma trận truyền ta có

$$\begin{Bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} + \{\bar{q}\} \tag{2.4.7}$$

trong đó ma trận

$$T(\lambda, \ell_j) = \begin{pmatrix} K_1(\lambda \ell_j) & \lambda^{-1}K_2(\lambda \ell_j) & K_4(\lambda \ell_j)/EI_z\lambda^3 & -K_3(\lambda \ell_j)/EI_z\lambda^2 \\ \lambda K_4(\lambda \ell_j) & K_1(\lambda \ell_j) & K_3(\lambda \ell_j)/EI_z\lambda^2 & -K_2(\lambda \ell_j)/EI_z\lambda \\ -\lambda^3 EI_z K_2(\lambda \ell_j) & -\lambda^2 EI_z K_3(\lambda \ell_j) & -K_1(\lambda \ell_j) & \lambda K_4(\lambda \ell_j) \\ \lambda^2 EI_z K_3(\lambda \ell_j) & \lambda EI_z K_4(\lambda \ell_j) & \lambda^{-1}K_2(\lambda \ell_j) & -K_1(\lambda \ell_j) \end{pmatrix}$$

Sử dụng (2.4.7) để biểu diễn các lực đầu nút qua các chuyển vị nút, tương tự như trong mục trước ta được

$$\{N\} = [\hat{K}_j(\omega)]\{U\} + [G]\{\bar{q}\}$$

trong đó

$$[\hat{K}_j] = k_0 \begin{pmatrix} \lambda^3(K_1K_2 - K_3K_4) & \lambda^2(K_2^2 - K_1K_3) & -\lambda^3K_2 & \lambda^2K_3 \\ \lambda^2(K_2^2 - K_1K_3) & \lambda(K_2K_3 - K_1K_4) & -\lambda^2K_3 & \lambda K_4 \\ -\lambda^3K_2 & -\lambda^2K_3 & \lambda^3(K_1K_2 - K_3K_4) & \lambda^2(K_1K_3 - K_2^2) \\ \lambda^2K_3 & \lambda K_4 & \lambda^2(K_1K_3 - K_2^2) & \lambda(K_2K_3 - K_1K_4) \end{pmatrix} \quad (2.4.8)$$

$$k_0 = \frac{EI}{K_3^2 - K_2K_4}; K_i = K_i(\lambda \ell_j).$$

Đây chính là ma trận độ cứng động của phần tử dầm (chịu uốn) hai chiều. Thật thú vị là có thể sử dụng MATLAB để tìm được được biểu diễn

$$[\hat{K}_j] = [K_0] - \omega^2 [M_0] + o(\omega^4)$$

với

$$[K_0] = \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{pmatrix}$$

$$[M_0] = \frac{\rho AL}{420} \begin{pmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{pmatrix}$$

Để dạng nhận thấy hai ma trận cuối là ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của phương pháp PTHH (công thức (2.3.22)).

c) Phần tử dầm ba chiều

Dầm ba chiều thực chất là tổ hợp tuyến tính của các trường hợp sau đây: một là biến dạng dọc trục, tức là phần tử thanh như đã xây dựng ở trên; hai là biến dạng xoắn; ba là uốn trong mặt phẳng XOY, mà thực chất là phần tử dầm hai chiều ở trên và bốn là uốn trong mặt phẳng

XOZ (như trong Hình 2.3.3). Ma trận độ cứng động và véc tơ tải trọng của phần tử dầm ba chiều sẽ là kết quả phép cộng đại số của các ma trận tương ứng của các phần tử được liệt kê ở trên.

Để có thể thực hiện phép cộng này ta cần quy định trật tự của các bậc tự do của cả phần tử tổng hợp. Điều này được thực hiện bằng việc chọn các bậc tự do của phần tử dầm ba chiều như sau

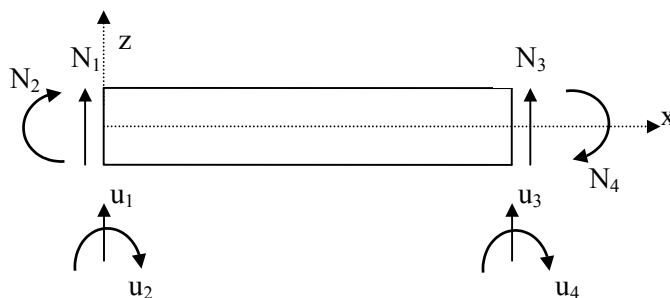
$$\hat{U}(\omega) = \{\hat{U}_1, \hat{U}_2, \dots, \hat{U}_{11}, \hat{U}_{12}\}^T,$$

trong đó ý nghĩa cơ học của các bậc tự do này được chỉ rõ trong Hình 2.3.3. Như vậy, các phần tử thanh, xoắn và phần tử dầm 2 chiều trong mặt phẳng XOY đã được xây dựng. Để thuận tiện và không nhắc lại ta đưa vào các ký hiệu sau: Ma trận độ cứng động của phần tử thanh và phần tử trục xoắn lần lượt được ký hiệu là

$$[D_x] = \begin{bmatrix} D_{11}^x & D_{12}^x \\ D_{21}^x & D_{22}^x \end{bmatrix}; \quad [D_\theta] = \begin{bmatrix} D_{11}^\theta & D_{12}^\theta \\ D_{21}^\theta & D_{22}^\theta \end{bmatrix}$$

Ma trận phần tử dầm hai chiều trong mặt phẳng XOY được ký hiệu là

$$[D_y] = \begin{bmatrix} D_{11}^y & D_{12}^y & D_{13}^y & D_{14}^y \\ D_{21}^y & D_{22}^y & D_{23}^y & D_{24}^y \\ D_{31}^y & D_{32}^y & D_{33}^y & D_{34}^y \\ D_{41}^y & D_{42}^y & D_{43}^y & D_{44}^y \end{bmatrix}$$



Hình 2.4.3. Uốn trong mặt phẳng xz

Bây giờ, ta xác định ma trận độ cứng động cho phần tử dầm hai chiều trong mặt phẳng XOZ. Trước hết, ta có thể tách các bậc tự do của phần tử này từ phần tử dầm ba chiều mô tả trong Hình 2.3.3 và ta được phần tử dầm hai chiều trong mặt phẳng XOZ trong Hình 2.4.3. So với phần tử dầm hai chiều được mô tả trong Hình 2.4.2, ta thấy đối với phần tử cuối hai mômen ở hai đầu và hai góc xoay ở hai đầu có dấu ngược lại.

tên DIALAB. Việc sử dụng chương trình này được minh họa trong các ví dụ tính toán dưới đây.

2.4.4. Một số ví dụ tính toán

a) Dầm đàn hồi

Số liệu của dầm ngàm một đầu (công xôn) có chiều dài $L = 0.25 (m)$, tiết diện ngang $F = 0.02 \times 0.01 (m^2)$, $\rho = 7827.1011 (kg/m^3)$, $E = 1.999 \times 10^{11} (N/m)$, hệ số Poisson $\nu = 0.3$.

Kết quả tính toán 10 tần số riêng đầu tiên của dầm công xôn nêu trên bằng DIALAB, SAP2000 và so sánh với nghiệm giải tích được cho trong Bảng 2.4.1. Nhìn vào bảng ta thấy đối với dầm đàn hồi phương pháp ma trận độ cứng động cho kết quả trùng với nghiệm giải tích (sai số xấp xỉ 0.01%). So với phương pháp PTHH, có sai số càng lớn đối với các tần số càng cao (tần số thứ 10 có thể lên đến trên 6%), thì phương pháp ma trận độ cứng động chính xác hơn nhiều.

Bảng 2.4.1.

TS	ANAL(rad/s)	DIALAB(rad/s)	ERROR	SAP2000(rad/s)	ERROR
1	8.2079	8.207031	0.01059%	8.1694	0.4713%
2	16.415	16.41406	0.00573%	16.338	0.4688%
3	51.435	51.43258	0.00470%	50.625	1.6008%
4	102.87	102.8652	0.00470%	101.23	1.6211%
5	144.02	144.0127	0.00506%	140.32	2.6384%
6	282.23	282.2074	0.00799%	272.06	3.7372%
7	288.03	288.0254	0.00159%	280.50	2.6842%
8	466.59	466.5091	0.01733%	444.65	4.9351%
9	564.43	564.4149	0.00268%	543.26	3.8963%
10	696.95	696.8839	0.00949%	655.07	6.3929%

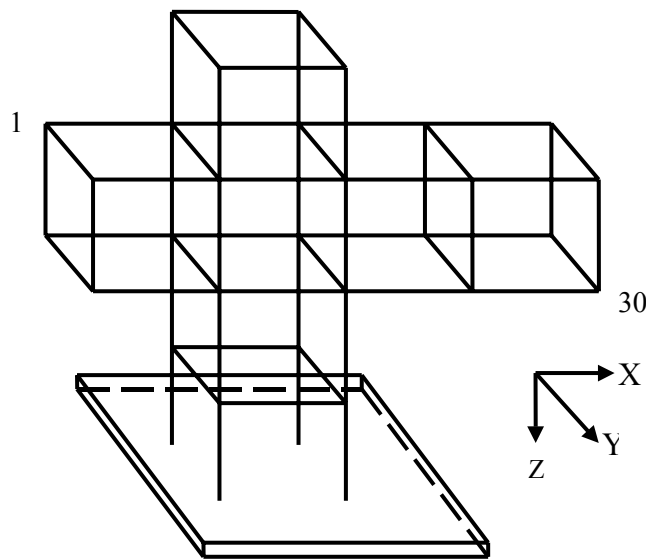
Bảng 2.4.2.

Tần số	DIALAB (Hz)	ERROR (%)	SAP2000 (Hz)	ERROR (%)	Experiment (Hz)
1	10.8117	0.8101%	10.5141	3.540%	10.9
2	15.8112	1.3538%	15.6958	0.614%	15.6
3	17.7506	0.8557%	17.5473	0.299%	17.6
4	32.7207	0.6791%	31.9227	1.776%	32.5
5	51.1946	1.5766%	45.7036	9.318%	50.4
6	64.7437	0.5473%	61.4723	5.573%	65.1
7	68.6828	0.5605%	65.8906	3.528%	68.3

8	79.5393	0.2016%	73.1075	8.272%	79.7
9	93.6771	0.3435%	85.7103	8.819%	94
10	95.6737	0.7534%	88.4760	8.220%	96.4

b) Khung không gian

Xét một khung không gian đã được chế tạo và thử nghiệm. Các tần số đo của khung trong bảng 2.4.2 được cho ở cột cuối cùng. Kết quả tính toán bằng DIALAB (phương pháp ma trận độ cứng động) và SAP2000 (phương pháp PTHH) đối với khung được so sánh với thực nghiệm (Bảng 2.4.2) cho thấy, trong trường hợp này phương pháp ma trận độ cứng động vẫn cho nghiệm chính xác hơn phương pháp PTHH rất nhiều. Sai số của DIALAB nói chung là dưới 1%, trong khi SAP2000 có sai số gần 10%. Những kết quả này cũng đã được so sánh với kết quả tính toán của một tác giả nước ngoài dùng phương pháp ma trận chuyển tiếp và phương pháp PTHH với số lượng phần tử khác nhau. Kết quả cho thấy DIALAB đạt được độ chính xác như của tác giả đã nêu.



Hình 2.4.4

2.5. Công cụ máy tính trong động lực học công trình

2.5.1. Chương trình phân tích kết cấu SAP2000

a) Sơ lược về SAP 2000

SAP2000 (Structural Analysis Program) là phần mềm phân tích kết cấu bằng phương pháp PTHH, được phát triển từ SAP90. Chương trình SAP2000 là phiên bản đầu tiên của SAP hoàn thiện việc tích hợp cùng với phần mềm Windows. Thế mạnh đầu tiên của SAP2000 là giao diện đồ họa cùng với việc tạo ra mô hình, thực hiện quá trình phân tích, kiểm tra và tối ưu hoá trong thiết kế, đều được thực hiện trên cùng một giao diện. Khả năng phân tích của chương trình cũng là một thế mạnh, được bổ sung kết quả nghiên cứu gần đây nhất của kỹ thuật số. So với SAP90, SAP2000 có thêm phần tử phi tuyến và có khả năng kiểm tra, tối ưu hoá trong vấn đề thiết kế.

Hiện nay có 3 dạng chương trình SAP2000 (SAP2000 E, SAP2000 PLUS, SAP2000 Nonlinear) cùng sử dụng một dạng giao diện đồ họa, nhưng tính năng của mỗi chương trình khác nhau. Lần lượt là Phiên bản dùng trong việc giảng dạy; tiếp đến là thể hiện mới của SAP90; cuối cùng, SAP2000 Nonlinear, là phiên bản mở rộng của SAP2000 PLUS có thêm phần tử phi tuyến.

SAP2000 tính toán và phân tích cho 6 loại phần tử chính: Phần tử thanh hai nút FRAME ; Phần tử tấm, vỏ, vỏ mỏng 3 chiều 3,4 hoặc 8 nút SHELL; Phần tử phẳng ba chiều 4 nút PLATE ; Phần tử khối hai chiều 3 đến 9 nút ASOLI; Phần tử khối ba chiều xác định thông qua 8 nút SOLID; NLLINK - phần tử phi tuyến.

b) Những thao tác cơ bản khi sử dụng SAP 2000

Công việc đầu tiên để một người kỹ sư bắt đầu với SAP2000 đó chính là mô hình hóa kết cấu cho bài toán cần phân tích. Việc mô hình hóa kết cấu trên giao diện đồ họa SAP2000 có thể thực hiện theo các bước sau: Định dạng hệ trục toạ độ, lưới phân chia, đơn vị đo lường ; Khai báo đặc trưng vật liệu; Khai báo nút phần tử và thành phần phần tử có trong kết cấu; Khai báo tính chất đặc biệt của nút (Restrains, springs, mass.); Khai báo tải tác động đối với kết cấu và tổ hợp tải trọng. Tuy nhiên SAP2000 có sẵn một số mô hình, ta có thể lựa chọn, sau đó chỉnh sửa cho phù hợp với mô hình của mình. Điều này làm cho việc thiết lập

một kết cấu trở nên đơn giản và nhanh chóng. Việc chỉnh sửa lưới cũng rất đơn giản (**Draw/Edit Grid** 'cho tham số theo các trục X, Y, Z'). Một tính chất của SAP2000 trong vấn đề tạo mô hình mà người sử dụng cần chú ý, đó là khả năng phát sinh. Đối với SAP 90 việc phát sinh phần tử cho phép hoàn thiện mô hình nhanh chóng hơn, nhất là đối với các kết cấu có phần tử giống nhau. SAP2000 ngoài việc phát sinh phần tử, nó còn cho phép phát sinh cả một cấu trúc.

Khi công việc tạo mô hình đã hoàn thiện, việc tiếp theo là phân tích và hiển thị kết quả. Việc phân tích kết quả của bài toán đối với SAP2000 thực hiện trên cùng một giao diện, đây là một điều rất tiện lợi cho với người sử dụng. Đối với SAP90 Việc phân tích bài toán gây rất nhiều khó khăn (mất thời gian) bởi việc phân tích phải thực hiện trên môi trường MS-DOS. Trước khi phân tích ta cần phải chọn kiểu phân tích và đưa ra kết quả. Điều này là rất cần thiết, nhất là đối với kết cấu có nhiều tổ hợp tải. Thực hiện lựa chọn thông qua **Analysis/Set Options**. Sau khi đã lựa chọn kiểu phân tích thích hợp, ta thực hiện phân tích bài toán **Analysis/Run**. Trong khi chương trình thực hiện phân tích, ta có thể nhìn quá trình phân tích trên màn hình và khi chương trình thực hiện phân tích xong ta có thể xem trực tiếp báo lỗi của chương trình do đó ta có thể chỉnh sửa lỗi của bài toán.

Phần hiển thị của SAP2000 rất tiện ích, bao gồm việc kiểm tra mô hình và hiển thị kết quả phân tích. Kiểm tra mô hình đã thiết lập là khâu hết sức quan trọng và cần thiết đối với người sử dụng, tránh những sai sót cho quá trình phân tích. Mô hình có thể được kiểm tra về mặt hình học cũng như số liệu thông qua các lệnh: **Display/Show Underformed Shape, Show Load, Show Input Tables** '. Đối với SAP90 sau khi thực hiện phân tích, muốn hiển thị kết quả phải thực hiện qua một chương trình khác và việc hiển thị không đơn giản. SAP2000 cho phép hiển thị trên giao diện đồ họa và việc hiển thị kết quả này thể hiện sự tiện ích của chương trình. Chương trình cho phép hiển thị tất cả các đặc trưng cơ học của kết cấu cũng như của phần tử: Các dạng dao động riêng, biến dạng của kết cấu; Chuyển vị của nút; Các đặc trưng sức bền của phần tử(nội lực, ứng suất); Đường ảnh hưởng .

c) *Khả năng phân tích động lực học kết cấu công trình của SAP 2000*

Nói chung khả năng phân tích của SAP2000 cũng tương tự SAP90, nó chỉ thêm phần phân tích phi tuyến cho phần tử phi tuyến. Ngoài phần phân tích tĩnh quen thuộc, phần phân tích động lực học của SAP2000 gồm ba loại:

C1. Phân tích dạng dao động (modal analysis for vibration modes) được hiểu là phân tích dao động riêng của kết cấu. Kết quả của bài toán này là dạng dao động và tần số riêng của kết cấu. Các dạng dao động thể hiện ứng xử của kết cấu, chúng cũng được sử dụng là nền tảng cho phân tích phổ phản ứng (response spectrum) và miền thời gian (time history). Trong SAP2000 sử dụng hai thuật toán Ritzvector và Eigenvector để phân tích dạng dao động riêng. Thuật toán *Ritzvector* cho phép tính toán xấp xỉ trị riêng và vector riêng theo phương pháp Lanczos. Thuật toán *Eigenvector* là việc giải bài toán trị riêng $(K - \Omega^2 M)\Phi = 0$, trong đó Ω là các giá trị riêng và Φ là vector riêng bằng phương pháp định thức hoặc không gian con tùy theo kích thước bài toán.

C2. Phân tích phản ứng động trong miền thời gian, là việc tìm phản ứng của kết cấu (chuyển vị và nội lực) dưới tác động của tải trọng bất kỳ. Phương pháp chủ yếu là chồng chất dạng dao động được trình bày trong chương 1 cho phương trình

$$KU(t) + C\dot{U}(t) + M\ddot{U}(t) = P(t).$$

C3. Phân tích phổ phản ứng địa chấn, thực chất là giải phương trình

$$KU(t) + C\dot{U}(t) + M\ddot{U}(t) = m_x U_{g_x}(t) + m_y U_{g_y}(t) + m_z U_{g_z}(t).$$

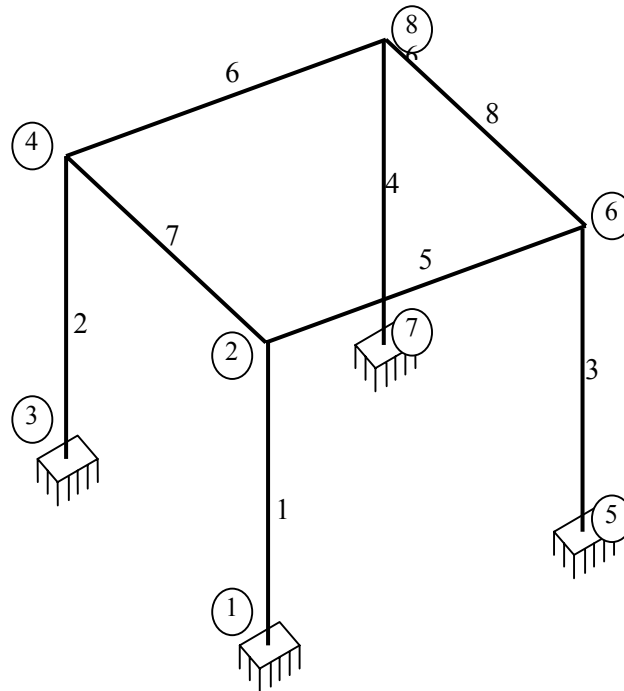
tìm phổ phản ứng theo nghĩa được trình bày trong chương 3. Phổ phản ứng động động đất này không phải là biên độ phức của chuyển vị, nội lực như đã trình bày trong phần phương pháp ma trận độ cứng động. Việc phân tích phổ phản ứng động của kết cấu công trình đúng theo nghĩa của nó được trình bày dưới đây, sau phần minh họa sử dụng SAP 2000.

2.5.2. Phân tích động lực học kết cấu khung bằng SAP2000.

Ta sẽ minh họa cho cả việc sử dụng SAP2000 lẫn phương pháp PTHH trong phân tích động lực học khung không gian với mô hình được mô tả trong Hình 2.5.1. Khung bao gồm 8 phần tử dầm (4 cột và 4 thanh giằng) và 8 nút, trong đó 4 nút 1, 3, 5, 7 được ngàm chặt. Tất cả các phần tử có đặc trưng vật liệu $E=2.482.10^{10}$ N/m², $\rho=2400$ kg/m³, $\nu=0.2$ và tiết diện $A=0.25 \times 0.25$ m². Chiều dài của các cột 1,2,3,4 và thanh giằng 5,6

bằng 2m. Các thanh còn lại 7,8 có chiều dài 2.5m. Ta nghiên cứu bài toán dao động riêng và phản ứng thời gian của kết cấu dưới tác dụng của tải trọng $P=1000 \text{ sint (N)}$ đặt tại nút 2, theo phương của phần tử 5.

Các bước tiến hành phân tích động lực học trên SAP 2000 như sau.



Hình 2.5.1. Mô hình khung không gian

Bước 1: Định dạng hệ trục tọa độ, lưới phân chia, đơn vị đo lường. Trước tiên ta chọn đơn vị đo lường ở phía dưới góc trái 'N - m'. Trên menu chính (Hình 2.5.1) chọn **File>New Model** và chọn các tham số định dạng hệ trục và lưới phân chia dựa theo mô hình kết cấu. Các tham số của mô hình được thể hiện trên cửa sổ, cụ thể là

- Số khoảng chia lưới: theo các trục X, Y, Z ;
- Bước chia lưới: trục X là 2,5m còn lại theo hai trục Y, Z là 2m.

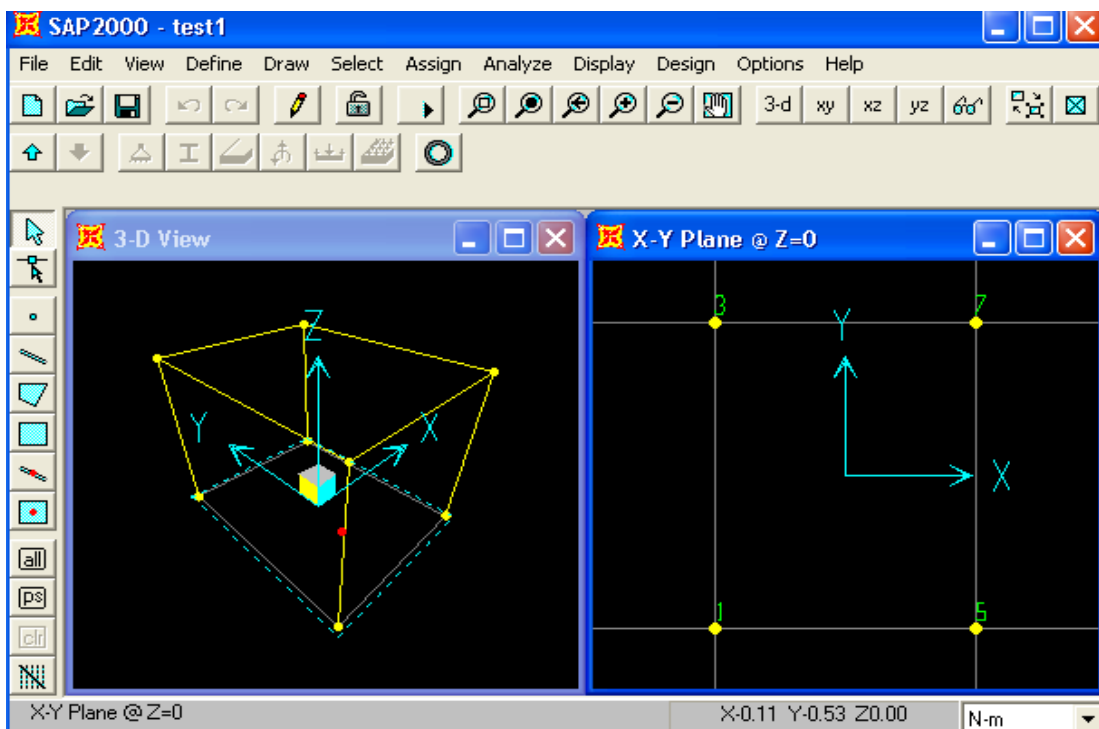
Kết quả là ta được một lưới chia là một khối chữ nhật cạnh 2,5x2x2.

Bước 2: Khai báo đặc trưng vật liệu. Việc khai báo thông qua **Define > Materials**, trong bài toán sử dụng vật liệu Thép do đó ta chọn **Steel** và chọn **Modify/Show Material**, sau đó thay đổi các thông số cho phù hợp

- Vật liệu đẳng hướng '*Isotropic*'.
- Modul đàn hồi $E = 2.428e+10 \text{ N/m}$ '*Modulus of Elasticity*'.

- Hệ số Poisson $\nu = 0.2$ 'Poisson's Ratio'.
- Khối lượng riêng $\rho = 2400\text{kg}/\text{m}^3$ 'Mass per unit Volume'.
- Trọng lượng riêng $\gamma = 9.8 * \rho$ 'Weight per unit Volume'.
- Các tham số khác chọn mặc định như hệ số dẫn nở nhiệt, mô đun trượt.

Bước 3: Thiết lập các phần tử kết cấu. Việc khai báo một phần tử đầy đủ trên giao diện SAP2000 thông qua 3 bước:



Hình 2.5.1

- Khai báo tiết diện phần tử, đặc trưng phần tử **Define> Frame Section/Modify**
- Tạo (vẽ) phần tử trên giao diện **Draw>Frame** hoặc **Draw>Quick draw Frame** (Hình 2.5.1)
- Gán đặc trưng mặt cắt cho phần tử **Assign>Frame>Section**. Nếu kết cấu chỉ có một loại tiết diện thì chương trình mặc định luôn đặc trưng của các phần tử vừa được thiết lập theo bước trên là loại tiết diện đã được khai báo. Do đó trong trường hợp bài toán này ta có thể bỏ qua bước này.

Qua 3 bước trên ta đã thiết lập được hình dáng của mô hình

Bước 4: Khai báo ràng buộc hoặc tải trọng tại nút phân tử. Dùng con trỏ đánh dấu các nút 1,3,5,7 rồi chọn **Assign/Joint/Restraints** sẽ hiện lên cửa sổ cho phép ta lựa chọn ràng buộc theo hai cách: thứ nhất là đánh dấu vào các ô để hạn chế bậc tự do hoặc chọn biểu tượng gồm 4 loại ngàm, gối, tựa và tự do. Kết quả ở các nút 1,3,5,7 là ngàm chặt.

Bước 5: Khai báo tải trọng của kết cấu. Hàm tải trọng $F=1000\sin\omega t$ tác động vào nút 2 theo phương X, được tách thành 2 thành phần: hàm của không gian và hàm của thời gian $F=P(x).G(t)$. Hàm không gian $P(x)$ phụ thuộc vào vị trí của tải trọng, được khai báo là tải trọng tĩnh tập trung (thông thường nó chính là biên độ của tải trọng) thông qua các việc:

- Định nghĩa tải trọng bằng **Define/Static Load Case/** sau đó khai báo các tham số cần thiết (tên tải 'load', kiểu tải 'type', hệ số trọng lượng bản thân). Khi đó cần chú ý rằng *khi phân tích động lực học tải trọng bản thân cần được khai báo **Self Weight Multiplier = 1***.
- Gán giá trị tải trọng: chọn nút 2 sau đó thực hiện: **Assign> Join Static Loads> Force**, trong bước này cần chú ý phương chiều của lực tác dụng, $P(x)=1000$, còn lại bằng 0.

Hàm tải thời gian $G(t)$ được thiết lập bằng việc Định nghĩa hàm tải: **Define> Time History Function>Add New Function**. Bài toán xét tác động trong một chu kỳ $T=2\pi$ ta có thể nhập trực tiếp từng giá trị (một cột là giá trị tại các nút thời gian 'time', và một cột là giá trị $\sin\omega t$ 'value') ngoài ra ta có thể nhập từ file text đã được thiết lập theo đúng quy cách.

Sau khi đã có hai hàm tải theo không gian và thời gian, tải trọng tổng hợp được tạo thành nhờ việc xác định trường hợp tải **Define/ Time History Cases**. Các tham số cần được khai báo trong cửa sổ này là **Analysis Type: Periodic**

Load Assignments

- **Load** : Chỉ định hàm tải không gian đã được khai báo ở trên '**Load1**'
- **Function** : Chỉ định hàm tải thời gian '**FC**'
- **Scale Factor**: Hệ số nhân cho giá trị của hàm tải trọng '**1**'
- **Arrival time**: Thời điểm ban đầu tác động (**0**)
- **Number of Output Time Steps**: bước thời gian tính toán '**20**'

- *Output Time Steps size*: Khoảng chỉ định $\Delta t = \pi/10 = 0.31416$

Bước 7: Phân tích dao động: Điều đầu tiên là chọn kiểu bài toán phân tích, được thực hiện lựa chọn thông qua **Analysis/Set Options**. Ở đây ta chọn **Dynamic Analysis** và **Set Dynamic Parametes** để khai báo các tham số: Số lượng modes; Phương pháp Eigenvector hay Ritsvector; Tần số trung tâm; Tần số cực đại, sai số,... . Để xuất kết quả cần chọn **Generate Output** và **Select Output Options**. Để bắt đầu giải bài toán ta chọn **Analysis/Run(hoặc F5)**.

Bước 8. Hiển thị kết quả phân tích. *a) Xem các dạng dao động riêng* (mode) được thực hiện nhờ **Display/Show Mode Shape**. Trong đó **Scale factor** là hệ số khuếch đại hiển thị; **Mode Number** – số hiệu dạng dao động cần hiển thị; **Wire Shadow** - thể hiện bằng đường mờ kết cấu chưa biến dạng.... Trên hình vẽ dạng riêng có kèm theo chu kỳ tương ứng của nó. Nhưng nếu muốn xem giá trị các tần số riêng đồng thời ta phải vào file kết quả **.out** và lấy ra bảng giá trị tần số như trong bảng 2.5.1. *b) Biểu diễn kết quả phân tích đáp ứng* bằng việc chọn **Display/Show Time History Traces**. Biểu diễn đồ thị của hàm tải trọng, chuyển vị, vận tốc.. theo hàm thời gian: **F(t) vs t** hoặc giữa các hàm với nhau: **F(t) vs F(t)**. Ở đây cần khai báo **Time range**- miền thời gian để biểu diễn; **Axis range override** - miền giá trị biểu diễn trên trục; **Define Function** - chỉ định hàm cần biểu diễn; **Line Option** - chỉ định đường cong thể hiện; **Line Color** - chỉ định màu của đường cong thể hiện; **Scale Factor** - hệ số phóng đại đường cong thể hiện; **Axis Labels** - ghi chú trên các trục tọa độ.

Bảng 2.5.1.

MODE	PERIOD	FREQUENCY	FREQUENCY
(TIME)	(CYC/TIME)	(RAD/TIME)	(RAD/TIME)**2
1	0.050112	19.955207	125.382264
2	0.048829	20.479569	128.676925
3	0.045175	22.13631	139.086537
4	0.027501	36.362876	228.47469
5	0.004981	200.751464	1261.359
6	0.004964	201.462361	1265.825

7	0.004951	201.964527	1268.981
8	0.004927	202.974334	1275.325
9	0.003929	254.496013	1599.046
10	0.003917	255.300014	1604.097

Lựa chọn các hàm hiển thị: bằng **Define Functions**. Ví dụ, để hiển thị đáp ứng của nút 8, Chọn **Add Joint Disps/Forces** , ta được cửa sổ trong đó chọn số hiệu nút **Joint ID** và dùng **Vector Type** để hiển thị phản ứng (chuyển vị – *Disp*, vận tốc – *Vel*, gia tốc *Accel* với các hình thức khác nhau) hoặc lực căng lò xo – *Spring Force*, phản lực *Reaction*). Cuối cùng là chọn hướng của đáp ứng cũng như của lực bằng Component. c) **Hiển thị ứng suất nội lực của kết cấu *Display>Show Element Forces/Stresses***. Trên cửa sổ **Member Force Diagram for frame** chọn loại lực cần hiển thị như **Axial Force** – lực dọc trục, **Shear 2-2** hoặc **Shear 3-3** theo các mặt cắt, các mômen xoắn và uốn. Biểu đồ được hiện ra ngay bên cạnh.

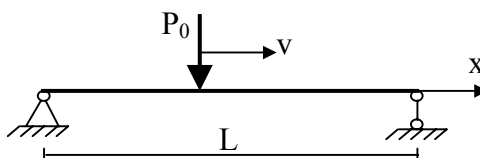
Chương 3

MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TẾ CỦA ĐỘNG LỰC HỌC CÔNG TRÌNH

Trong chương này ta nghiên cứu một số bài toán cơ bản của Động lực học công trình thường gặp trong thực tế. Bắt đầu từ bài toán dao động của dầm cầu đơn giản dưới tác động của tải trọng di động. Đây là vấn đề rất quan trọng trong việc thiết kế cũng như sử dụng các cầu giao thông trong thực tế. Việc giải bài toán này cho phép ta xác định được hệ số động của dầm cầu, vận tốc tối hạn cho phép của các phương tiện giao thông trên cầu để tránh cộng hưởng và hiểu được một số hiện tượng lý thú cần phải lưu ý trong thực tế sử dụng khai thác cầu. Bài toán thứ hai là việc nghiên cứu phản ứng của các công trình dưới tác dụng của động đất, một vấn đề cũng không kém phần quan trọng để xây dựng các công trình trong vùng động đất. Tiếp theo chúng ta xem xét bài toán động lực học công trình dưới tác dụng của sóng đang rất được quan tâm hiện nay trong việc xây dựng các công trình biển. Cuối cùng, chúng tôi xin giới thiệu tóm lược về ứng dụng động lực học công trình trong chẩn đoán kỹ thuật công trình.

3.1. Dao động của dầm cầu dưới tác dụng của tải trọng di động

Để đơn giản và hiểu rõ bản chất vấn đề, ta xét một nhịp cầu được mô hình hoá như một dầm đàn hồi có các đặc trưng vật liệu và hình học như sau: môđun đàn hồi E , hệ số cản nội μ , cản ngoại c , mật độ khối ρ , tiết diện ngang F , mômen quán tính tiết diện I và chiều dài L . Các điều kiện biên là gối tựa đơn giản. Tải trọng di động được xét như một lực hằng số tác dụng lên dầm có điểm đặt di động với vận tốc v .



Hình 3.1.1.

Khi đó phương trình dao động uốn của dầm có dạng

$$\rho F \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + c \frac{\partial W}{\partial t} + EI\mu \frac{\partial^5 W}{\partial x^4 \partial t} + EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = P_0 \delta(x - a(t)) \tag{3.1.1}$$

trong đó W là độ võng của dầm, $a(t) = x_0 + vt$, $\delta(x)$ là hàm Dirac.

Điều kiện biên có dạng

$$W(0,t) = W(L,t) = W''(0,t) = W''(L,t) = 0$$

Như trong phần 1.5.2 ta đã xác định được tần số và dạng dao động riêng của dầm gối tựa đơn giản bằng

$$\begin{aligned} \Phi_j(x) &= C_j \sin j\pi x / L; \quad C_j = \sqrt{2/L} \\ \omega_j &= a_0 \left[\frac{j\pi}{L} \right]^2, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad a_0 = \sqrt{\frac{EI}{\rho F}} \end{aligned}$$

Nếu tìm nghiệm phương trình (3.1.1) ở dạng

$$W(x,t) = \sum_j q_j(t) \Phi_j(x)$$

ta sẽ được các phương trình để tìm tọa độ suy rộng q ở dạng

$$\ddot{q}_j + 2h_j \dot{q}_j + \omega_j^2 q = p_0 \sin(v_j t + \varphi_j) \quad (3.1.2)$$

trong đó

$$2h_j = \frac{c}{\rho F} + \mu \omega_j^2; \quad p_0 = \frac{P_0}{\rho F} \sqrt{\frac{2}{L}}; \quad v_j = \frac{j\pi v}{L}; \quad \varphi_j = \frac{j\pi x_0}{L}$$

Từ đó nghiệm dừng (sau khi dao động riêng tắt) của phương trình (3.1.2) là

$$\begin{aligned} q_j(t) &= \frac{p_0 \sin(v_j t + \varphi_j - \theta_j)}{\sqrt{(\omega_j^2 - v_j^2)^2 + 4h_j^2 v_j^2}} \\ \theta_j &= \arctan \frac{2h_j v_j}{\omega_j^2 - v_j^2} \end{aligned}$$

Cuối cùng độ võng động lực học của dầm sẽ là

$$W(x,t) = \frac{2p_0}{\rho FL} \sum_j \frac{\sin(j\pi x / L) \sin(v_j t + \varphi_j - \theta_j)}{\sqrt{(\omega_j^2 - v_j^2)^2 + 4h_j^2 v_j^2}} \quad (3.1.3)$$

Timôshenkô đã chỉ ra được rằng nếu tải trọng đứng yên tại vị trí x_0 thì chuyển vị tĩnh của dầm sẽ được xác định từ công thức (3.1.3) bằng cách thay vào đó vận tốc $v = 0$. Khi đó

$$W_0(x) = \frac{2p_0 L^3}{EI\pi^4} \sum_j \frac{1}{j^4} \sin(j\pi x / L) \sin(j\pi x_0 / L_j) \quad (3.1.4)$$

Trong việc nghiên cứu động lực học cầu, người ta quan tâm nhiều đến hệ số động lực học, được xác định một cách giải tích bằng tỷ số

$$\mu_d = \frac{W(x,t) - W_0(x)}{W_0(x)}$$

hay

$$W(x,t) = (1 + \mu_d)W_0(x)$$

Do đó biểu thức tổng quát của hệ số động lực học có dạng

$$1 + \mu_d = \frac{W(x,t)}{W_0(x)} = \frac{a_0^2 \sum_j \frac{\sin(j\pi x / L) \sin(v_j t + \varphi_j - \theta_j)}{\sqrt{(\omega_j^2 - v_j^2)^2 + 4h_j^2 v_j^2}}}{\sum_j (L / j\pi)^4 \sin(j\pi x_0 / L_j)} \quad (3.1.5)$$

Trong thực tế hệ số động được tính như là giá trị cực đại của hệ số động lý thuyết theo thời gian. Khi đó hệ số động sẽ phụ thuộc vào từng vị trí trên cầu, cụ thể là đối với dạng dao động cơ bản tại vị trí lực tác dụng ta có

$$1 + \bar{\mu}_d = \frac{1}{\sqrt{(1 - \gamma^2)^2 + 4h^2 \gamma^2} \sin(\pi x_0 / L)} \quad (3.1.6)$$

với

$$\gamma = \frac{vL}{a_0 \pi}$$

Công thức cuối cho thấy:

- Hệ số động không xác định tại các đầu dầm và nhận giá trị nhỏ nhất tại vị trí giữa dầm.
- Đối với vận tốc của tải trọng thì hệ số động lớn nhất khi $v = \frac{a_0 \pi}{L}$.
- Hệ số động có thể xác định được nếu biết tần số dao động riêng và hệ số cản của dầm.

Kết luận cuối có ý nghĩa thực tế rất cao, bởi vì để xác định hệ số động thực tế của dầm cầu không nhất thiết phải thử tải tĩnh và động, mà có thể bằng cách đo tần số riêng và hệ số cản của nó là đủ.

Ngoài hệ số động nêu trên, trong thực tế cần phải quan tâm đến hiện tượng cộng hưởng của cầu xảy ra do tốc độ của phương tiện giao thông đi trên cầu. Theo công thức (3.1.3) ta thấy biên độ dao động của dầm cầu sẽ rất lớn

nếu vận tốc của tải trọng gần với một trong các tần số dao động riêng (cộng hưởng), tức là khi

$$v \approx \frac{j a_0 \pi}{L}, j = 1, 2, 3, \dots$$

Trong thực tế để không xảy ra cộng hưởng, vận tốc của phương tiện giao thông trên cầu không được vượt quá giới hạn

$$\hat{v} = \frac{a_0 \pi}{L} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{EI}{\rho F}} \quad (3.1.7)$$

Rõ ràng là cầu càng cứng và càng ngắn thì vận tốc giới hạn càng cao. Cầu càng nặng thì vận tốc cho phép càng bé. Ở đây chúng ta không xét đến hiệu ứng tác dụng của gió, trong vài trường hợp có thể cũng dẫn đến cộng hưởng làm nguy hiểm cho cầu. Trong thực tế, để có thể quy định tốc độ cho phép đối với một cầu cụ thể, cần phải tính đến nhiều yếu tố khác nữa như tác động của gió, của nhiều phương tiện cùng một lúc và cả hệ số an toàn nào đó. Vì thế tốc độ cho phép thực tế nhỏ hơn nhiều so với tốc độ tính được từ công thức (3.1.7).

Một điều lý thú nữa khi nghiên cứu động lực học dầm cầu là hiện tượng “*cộng hưởng chậm*” sau đây. Theo (3.1.3), chu kỳ dao động cưỡng bức của dầm cầu bằng

$$T_c = \frac{2\pi}{v_j} = \frac{2L}{jv} = \frac{2}{j} T \quad (3.1.8)$$

trong đó T là thời gian tải trọng đi hết chiều dài dầm cầu. Đối với dạng dao động thứ nhất, khi tải trọng đi hết chiều dài dầm cầu thì dao động của cầu mới thực hiện được nửa chu kỳ cộng hưởng và thời điểm nguy hiểm nhất cũng là lúc này. Như vậy, thời điểm nguy hiểm nhất không phải là lúc tải trọng ở giữa cầu mà là lúc tải trọng đã đi hết chiều dài cầu.

Bằng phương pháp tương tự, chúng ta có thể nghiên cứu các bài toán phức tạp hơn về dao động của dầm cầu dưới tác động của tải trọng di động. Cụ thể như trong trường hợp tải không phải là hằng số, mà là hàm của thời gian hay là vật thể có khối lượng đặt trên bộ giảm chấn di động trên dầm. Hay bài toán phức tạp hơn nữa là việc nghiên cứu dao động của cầu dưới tác dụng của tổ hợp tải trọng phân bố di động. Những bài toán phức tạp này cho đến nay vẫn chưa giải quyết được trọn vẹn mà đang tiếp tục được nghiên cứu.

3.2. Phản ứng của công trình trong động đất

3.2.1. Sơ lược về động đất.

Động đất là một hiện tượng đặc biệt của tự nhiên, đã được biết đến từ thời cổ đại. Động đất rất nguy hiểm đối với các công trình xây dựng. Có rất nhiều ví dụ minh chứng cho tác hại của động đất đến cuộc sống của con người, gần đây nhất là các trận động đất ở Armeni, Thổ Nhĩ Kỳ, Kôbê (Nhật bản). Cho đến nay động đất vẫn là một hiện tượng không thể dự báo sớm được. Vì vậy, khi thiết kế xây dựng các công trình quan trọng trong vùng động đất bắt buộc phải tính đến khả năng động đất có thể xảy ra.

Nguyên nhân sâu xa của động đất cũng vẫn chưa được sáng tỏ. Người ta chỉ biết rằng động đất xảy ra khi ở một vị trí nào đó trong lòng đất phát ra một năng lượng vô cùng lớn làm các lớp vỏ trái đất trượt tương đối so với nhau. Tâm điểm xảy ra sự phát tán năng lượng này gọi là chấn tâm (Epicentre). Năng lượng phát ra được đặc trưng bởi một tham số gọi là cường độ động đất, mà người ta có thể sử dụng các thang đo khác nhau. Hiện nay thông dụng nhất là độ Richter. Tác động của động đất đến công trình thường được đánh giá bởi các tham số như hướng động đất, chuyển dịch, gia tốc của đất và cuối cùng là khoảng thời gian xảy ra động đất cũng như tần suất của nó.

3.2.2. Tính toán phản ứng động của công trình đối với động đất - mô hình rời rạc

Như ta đã nói ở trên, tác dụng của động đất lên công trình chủ yếu thông qua sự chuyển dịch ngang của nền được đặc trưng bởi gia tốc nền đất tại chân công trình. Xét mô hình đơn giản của công trình trong động đất cho trong Hình 3.2.1. Ở đây, ta chọn $n = 1$ khối lượng bằng m được giả thiết tập trung tại đỉnh công trình, c là hệ số cản nội và $k = \frac{3EI}{L^3}$ là độ cứng tương đương, $x_0(t)$ là dịch chuyển ngang của nền gây ra do động đất.

Với những giả thiết như vậy ta có phương trình chuyển động của hệ

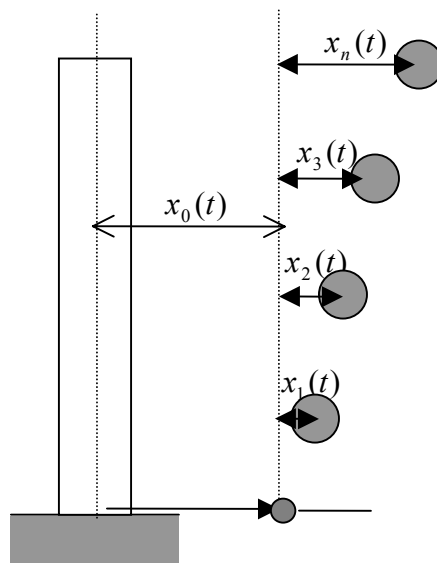
$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = -m\ddot{x}_0(t) \quad (3.2.1)$$

Phương trình này có thể đưa về dạng chuẩn hoá như sau:

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) = -\ddot{x}_0(t) \quad (3.2.2)$$

trong đó ω_0 là tần số riêng của hệ khi không có cản, ζ là chỉ số cản tối hạn

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \zeta = \frac{c}{2\omega_0 m}$$



Hình 3.2.1.

Nghiệm của phương trình cuối bằng tổng nghiệm riêng và nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng. Chỉ số cản tối hạn ζ phụ thuộc vào dạng kết cấu và bản chất của vật liệu xây dựng. Như đã biết trong lý thuyết dao động, trong trường hợp $\zeta = 1$ và $\zeta > 1$ thì hệ cơ học sẽ chuyển động tắt dần không dao động. Nếu $\zeta < 1$ thì nghiệm riêng của phương trình thuần nhất tương ứng biểu diễn dao động tắt dần và sẽ mất đi trong thời gian ngắn.

Vì vậy, ở đây ta chỉ xét nghiệm riêng của phương trình (3.2.2) nó biểu diễn dao động bình ổn dưới tác động của động đất. Nghiệm này được biểu diễn dưới dạng tích phân Duhamel

$$x(t) = -\frac{1}{\omega^*} \int_0^t \ddot{x}_0(\tau) e^{-\zeta\omega_0(t-\tau)} \sin \omega^*(t-\tau) d\tau \quad (3.2.3)$$

Đạo hàm liên tiếp (3.2.3) theo thời gian sẽ thu được vận tốc tương đối và gia tốc tuyệt đối của khối lượng m

$$\dot{x}(t) = \int_0^t \ddot{x}_0(\tau) e^{-\zeta\omega_0(t-\tau)} \left[-\cos \omega^*(t-\tau) + \zeta^* \sin \omega^*(t-\tau) \right] d\tau \quad (3.2.4)$$

$$\ddot{x}_0(t) + \ddot{x}(t) = \omega^* \int_0^t \ddot{x}_0(\tau) e^{-\zeta\omega_0(t-\tau)} \left[(1-\zeta^{*2}) \sin \omega^*(t-\tau) + 2\zeta^* \cos \omega^*(t-\tau) \right] d\tau \quad (3.2.5)$$

với

$$\omega^* = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}; \zeta^* = \zeta / \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Thực tế đối với nhiều hệ kết cấu, hệ số cản tới hạn khá nhỏ (<10%) và do đó có thể lấy gần đúng

$$\omega^* \approx \omega_0; \zeta^* \approx \zeta$$

Trên cơ sở các công thức này ta có thể xác định các đặc trưng sau

- Phổ đáp ứng tựa dịch chuyển

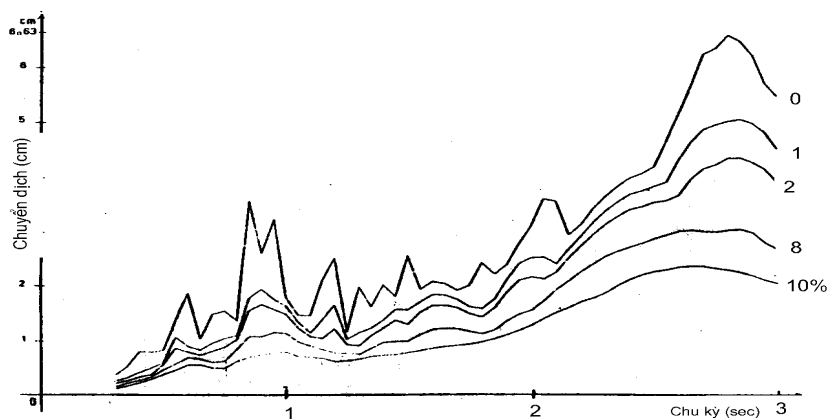
$$S_d(\omega, \zeta) = \text{Max}_t |x(t)|. \tag{3.2.6}$$

- Phổ đáp ứng tựa vận tốc và phổ đáp ứng tựa gia tốc được xác định theo các công thức sau

$$S_v(\omega, \zeta) = \text{Max}_t |\dot{x}(t)| = \omega S_d(\omega, \zeta) \tag{3.2.7}$$

$$S_a(\omega, \zeta) = \text{Max}_t |\ddot{x}(t)| = \omega^2 S_d(\omega, \zeta) \tag{3.2.8}$$

Như vậy, ứng với gia tốc đo được của động đất và với một hệ số cản nhớt đã cho, người ta có thể xác định tựa phổ đáp ứng như là một hàm số của tần số riêng của hệ dao động. Một ví dụ minh họa cho phổ tựa dịch chuyển được trình bày trong Hình 3.2.2.



Hình 3.2.2. Phổ đáp ứng tựa dịch chuyển của trận động đất El-Centro

Sau khi xác định được các phổ phản ứng, ta có thể tính được một lực tĩnh tương đương theo nghĩa thay lực tĩnh tác dụng lên hệ để gây nên dịch chuyển bằng dịch chuyển cực đại mà lực động gây nên $F_s = k \cdot x_{max} = m S_a$.

Tương tự có thể thiết lập mô hình hữu hạn bậc tự do cho công trình (ví dụ bằng phương pháp PTHH), khi đó ta được phương trình chuyển động của công trình có dạng véc tơ

$$[M]\{\dot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = [M]\{1\}\ddot{x}_0(t) \quad (3.2.9)$$

trong đó các ma trận M , C , K đã biết, có thể xây dựng được bằng một trong các phương pháp đã trình bày ở chương 2, véc tơ $\{1\}$ biểu diễn hướng tác dụng của động đất, tức hướng dịch chuyển ngang của nền đất. Nếu tìm nghiệm phương trình cuối ở dạng

$$\{U\} = [\Phi] \cdot \{q\}$$

trong đó $[\Phi]$ là ma trận dạng riêng và $\{q\} = \{q_1(t), \dots, q_N(t)\}^T$ là véc tơ tọa độ suy rộng, ta sẽ được phương trình

$$\ddot{q}_i(t) + 2\zeta_i\omega_i\dot{q}_i(t) + \omega_i^2q_i(t) = f_i\ddot{x}_0(t)$$

với các ký hiệu

$$\omega_j^2 = \frac{K_j}{M_j}; \quad \zeta_j = \frac{C_j}{2\sqrt{M_jK_j}}; \quad f_j = \frac{F_j}{M_j}$$

$$M_i = \{\Phi\}_i^T [M] \{\Phi\}_i; \quad C_i = \{\Phi\}_i^T [C] \{\Phi\}_i; \quad K_i = \{\Phi\}_i^T [K] \{\Phi\}_i; \quad F_i = \{\Phi\}_i^T [M] \{1\}$$

Theo kết quả ở phần trên, đối với mỗi tọa độ chính ta có thể xác định phổ tựa dịch chuyển bằng

$$S_k^q(\omega_k, \zeta_k) = \text{Max}_t |q_k(t)| = f_k S_d(\omega_k, \zeta_k)$$

Hiển nhiên đây không phải là phổ đáp ứng tựa dịch chuyển của công trình. Về nguyên tắc, để tìm phổ đáp ứng này chúng ta phải tính biên độ cực đại của phản ứng công trình tại một nút k nào đó từ biểu thức

$$q_j(t) = \int_0^t \ddot{x}_0(\tau) \left[\sum_k (1/\omega_k) \Phi_{jk} f_k e^{-\zeta_k \omega_k (t-\tau)} \sin \omega_k (t-\tau) \right] d\tau; \quad j = 1, \dots, N$$

Vì vậy, có hai cách đơn giản để tìm phổ đáp ứng một cách gần đúng từ phổ của tọa độ suy rộng. Thứ nhất, có thể tính

$$S_j(\omega, \zeta) = \text{Max} |q_j(t)| = \sqrt{\sum_k S_{jk}^2(\omega, \zeta_k)} \quad (3.2.10)$$

trong đó

$$S_{jk}(\omega_k, \zeta_k) = \Phi_{jk} S_k^q(\omega_k, \zeta_k)$$

Cách thứ hai có kể đến tương quan giữa các dạng riêng

$$S_j(\omega, \zeta) = \sqrt{\sum_{m,n} Q_{mn} S_m^q(\omega_m, \zeta_m) S_n^q(\omega_n, \zeta_n)} \quad (3.2.11)$$

trong đó Q_{mn} là các hệ số tương quan giữa các dạng riêng.

3.2.2. Tính toán phản ứng động của công trình đối với động đất – mô hình liên tục

Xét một cột đứng, như một dầm đàn hồi với các đặc trưng E, ρ, I, F, L , ngàm một đầu vào nền đất. Một cách tổng quát, chuyển động của nền trong động đất được giả thiết theo hướng xiên, tạo với phương nằm ngang một góc α và có độ lớn bằng $\zeta(t)$. Khi đó thành phần nằm ngang và thành phần thẳng đứng của chuyển vị nền lần lượt có dạng:

$$u_0(t) = \zeta(t) \cos \alpha; v(t) = \zeta(t) \sin \alpha. \quad (3.2.12)$$

Không khó khăn có thể thay thế chuyển vị cưỡng bức thẳng đứng của nền bằng lực nén dọc phân bố đều trên dầm với mật độ phân bố bằng

$$p(t) = -\rho F \ddot{\zeta}(t) \sin \alpha$$

Như vậy, nếu coi $u(x, t)$ là độ uốn ngang của cột (chuyển vị ngang tương đối của dầm so với nền, thì phương trình (1.4.4), chương 1 tính thêm cần ngoài cho ta:

$$\rho F \ddot{u}(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] + c \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[p \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] = -\rho F \ddot{u}_0(t) \quad (3.2.13)$$

Với điều kiện biên

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{(x=L)} = \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} \Big|_{(x=L)} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = u(x, t) \Big|_{(x=0)} = 0$$

phương trình (3.2.13) có thể nghiên cứu bằng phương pháp Búpnốp-Galerkin và sẽ dẫn tới việc nghiên cứu tác động đồng thời của ngoại lực và kích động tham số, một bài toán phi tuyến vượt ra ngoài khuôn khổ nội dung của giáo trình này. Đây là một vấn đề nghiên cứu ảnh hưởng của dịch chuyển đứng trong động đất đến công trình, độc giả có thể tìm hiểu trong các tài liệu hoặc tự giải quyết.

Nếu bỏ qua thành phần chuyển dịch đứng của động đất, ta được bài toán dao động uốn của dầm với lực tập phân bố đều trên cả dầm với mật độ là quán tính của dầm

$$\rho F \ddot{u}(x, t) + c \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] = -\rho F \ddot{u}_0(t)$$

Lời giải của bài toán này đã cho ở mục 1.5.3, cụ thể là hàm mật độ phổ của chuyển vị ngang (độ uốn) của dầm bằng

$$S_w(x, \omega) = S_{\ddot{u}_0}(\omega) \sum_{j,k} r_j r_k H_j(\omega) H_k^*(\omega) \phi_j(x) \phi_k(x) \quad (3.2.14)$$

trong đó $S_{\ddot{u}_0}(\omega)$ là mật độ phổ của gia tốc nền theo phương ngang và

$$H_j(\omega) = [\omega_j^2 - \omega^2 + 2i\zeta_j \omega_j \omega]^{-1}; r_j = \int_0^L \phi_j(x) dx; i = \sqrt{-1}$$

Hàm mật độ phổ (3.2.14) không phải là phổ tựa dịch chuyển đã nghiên cứu ở trên. Đây là hàm mật độ phổ của chuyển vị ngang, phụ thuộc vào tọa độ trên dầm và tần số kích động. Dĩ nhiên, cũng giống như tựa phổ đáp ứng nêu trên, mật độ phổ đáp ứng phụ thuộc cả vào tần số riêng và hệ số cản của công trình. Tính phương sai của dịch chuyển ngang bằng

$$\begin{aligned} \sigma_w^2(x, \omega_j, \zeta_j) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_w(x, \omega) d\omega = \\ &= \sum_{j,k} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} S_{\ddot{u}_0}(\omega) H_j(\omega) H_k^*(\omega) d\omega \right] r_j \phi_j(x) r_k \phi_k(x) = \sum_{j,k} S_{jk} \phi_j(x) \phi_k(x) \end{aligned}$$

trong đó

$$S_{jk} = \left[r_j r_k \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\ddot{u}_0}(\omega) H_j(\omega) H_k^*(\omega) d\omega \right]$$

Cuối cùng, độ lệch trung bình bình phương của chuyển vị có dạng

$$\sigma_w(x, \omega, \zeta) = \sqrt{\sum_{j,k} S_{jk} \phi_j(x) \phi_k(x)}$$

tương đương với phổ tựa dịch chuyển đã tính một cách gần đúng ở trên. Nếu tính độ lệch trung bình bình phương của chuyển vị tại $x = x_n$ và ký hiệu $\sigma_w(x_n, \omega, \zeta) = \sigma_n(\omega, \zeta)$ thì công thức (3.2.15) đúng là tương tự như công thức (3.2.11). Chỉ có điều công thức (3.2.15) là chính xác, còn (3.2.11) chỉ là gần đúng. Tuy nhiên công thức (3.2.15) chỉ nhận được đối với kết cấu dầm, còn công thức (3.2.11) có thể nhận được cho cả kết cấu khung, dàn,...

3.3. Động lực học công trình biển

3.3.1. Các đặc trưng cơ bản của sóng biển.

Sóng biển chủ yếu được gây ra bởi gió, là kết quả của sự tương tác giữa gió (khí quyển) và mặt nước biển. Vì vậy, sóng biển được đặc trưng chủ yếu

bởi hình dạng mặt sóng – nguyên nhân cơ bản gây nên chuyển động sóng của nước biển. Để tính toán tác động của sóng lên các công trình biển, thông thường người ta giả thiết chất lỏng là lý tưởng, không nén được và không có chuyển động xoáy. Chuyển động được coi là có thế.

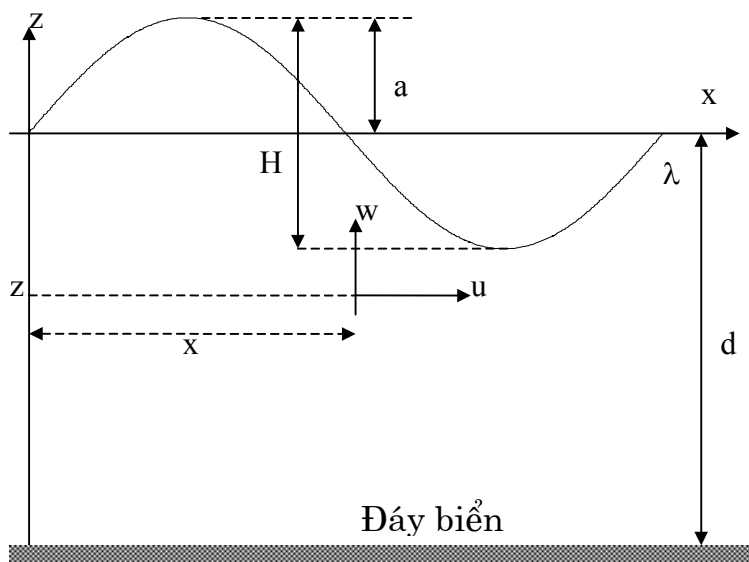
Xét trường hợp sóng phẳng trong mặt phẳng XOZ (Hình 3.3.1). Giả sử $z = \xi(x, t)$ là phương trình mặt sóng. Khi nước lặng tương ứng là $z = 0$. Ký hiệu u, w là chuyển dịch của hạt chất lỏng có tọa độ (x, z) , theo phương x và z , $\phi(x, z, t)$ là hàm thế vận tốc, tức

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{dx}{dt} \\ \dot{w} &= \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{dz}{dt} \end{aligned}$$

Với những giả thiết nêu trên ta có các phương trình

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} [\text{grad} \phi]^2 + \frac{1}{\rho} (p - p_0) + gz &= 0 \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Phương trình đầu là phương trình Laplas mô tả tính liên tục của chất lỏng, phương trình thứ hai là tích phân đầu Bernoulli.



Hình 3.3.1. Một sóng biển điều hòa

Tại mặt thoáng (mặt biển tiếp giáp với khí quyển) $z = \xi(x, t)$, ta có

$$\dot{w} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \xi}{\partial t} = \dot{u} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \tag{3.3.2}$$

và tại đáy biển $z=-d$

$$\dot{w} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (3.3.3)$$

Nếu coi $z = \xi(x, t)$ là nhỏ và bỏ qua các thành phần bậc hai, kết hợp phương trình thứ hai trong (3.3.1) và phương trình (3.3.2), tại $z=0$ ta được

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + g\xi &= 0 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Như vậy, vấn đề dẫn tới việc giải phương trình Laplace trong (3.3.1) cùng với các điều kiện biên (3.3.3), (3.3.4).

Xét trường hợp sóng điều hoà, nghiệm của bài toán biên tìm ở dạng

$$\phi(x, z, t) = f(z) \exp\{-i(kx - \omega t)\} \quad (3.3.5)$$

Khi đó hàm $f(z)$ sẽ thoả mãn

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f(z)}{dz^2} - k^2 f(z) &= 0 \\ f'(-d) &= 0 \end{aligned}$$

Vậy

$$f(z) = A \cosh k(z + d)$$

với A là hằng số. Sử dụng điều kiện (3.3.4), ta có

$$gf'(0) - \omega^2 f(0) = A(gk \cosh kd - \omega^2 \sinh kd) = 0$$

Từ đó ta nhận được

$$\omega = \sqrt{gk \tanh kd}$$

gọi là *tần số sóng* và

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

gọi là *chu kỳ sóng*.

Theo định nghĩa, bước sóng bằng $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, do đó vận tốc truyền sóng bằng

$$c = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi}{kT} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kd}$$

với k là số sóng. Xét trường hợp $d \rightarrow \infty$, khi đó $\tanh kd \rightarrow 1$ và do đó

$$\omega = \sqrt{gk}; \quad T = \frac{2\pi}{gk}; \quad c = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

Tính đến điều kiện (3.3.4), ta có

$$\xi(x, t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=0} = -\frac{i\omega A}{g} \cosh kd \cdot \exp\{-i(kx - \omega t)\} = a \cdot \exp\{-i(kx - \omega t)\} \quad (3.3.5)$$

trong đó

$$a = \frac{H}{2} = -\frac{i\omega A}{g} \cosh kd$$

gọi là biên độ sóng và H là chiều cao sóng.

Khi đó, hàm thế vận tốc có dạng

$$\phi(x, z, t) = \frac{iga \cosh k(z+d)}{\omega \cosh kd} \exp\{-i(kx - \omega t)\} = \frac{ig \cosh k(z+d)}{\omega \cosh kd} \xi(x, t) \quad (3.3.6)$$

Từ đây ta có thể tính được vận tốc, gia tốc và quỹ đạo chuyển động của hạt chất lỏng trong sóng

$$\begin{aligned} \dot{u}(x, z, t) &= \frac{gka \cosh k(z+d)}{\omega \cosh kd} \exp\{-i(kx - \omega t)\} = \frac{gk \cosh k(z+d)}{\omega \cosh kd} \xi(x, t) \\ \dot{w}(x, z, t) &= \frac{igka \sinh k(z+d)}{\omega \cosh kd} \exp\{-i(kx - \omega t)\} = \frac{igk \sinh k(z+d)}{\omega \cosh kd} \xi(x, t) \\ \ddot{u}(x, z, t) &= \frac{igka \cosh k(z+d)}{\cosh kd} \exp\{-i(kx - \omega t)\} = \frac{igk \cosh k(z+d)}{\cosh kd} \xi(x, t) \\ \ddot{w}(x, z, t) &= \frac{-gka \sinh k(z+d)}{\cosh kd} \exp\{-i(kx - \omega t)\} = \frac{-gk \sinh k(z+d)}{\cosh kd} \xi(x, t) \\ u(x, z, t) &= -\frac{igka \cosh k(z+d)}{\omega^2 \cosh kd} \exp\{-i(kx - \omega t)\} = -\frac{igk \cosh k(z+d)}{\omega^2 \cosh kd} \xi(x, t) \\ w(x, z, t) &= \frac{gka \sinh k(z+d)}{\omega^2 \cosh kd} \exp\{-i(kx - \omega t)\} = \frac{gk \sinh k(z+d)}{\omega^2 \cosh kd} \xi(x, t) \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Từ hai phương trình cuối trong (3.3.7), ta thấy quỹ đạo của hạt chất lỏng trong chuyển động sóng là hình elip khi nước nông và hình tròn khi nước sâu $d \rightarrow \infty$.

3.3.2. Công thức Morison.

Vấn đề quan trọng trong động lực học công trình biển là xác định được tải trọng sóng tác động lên công trình. Biết trường vận tốc của chất lỏng trong chuyển động sóng có thể tính toán được tác dụng của sóng lên một

vật thể nằm trong nước. Công thức Morison cho phép ta tính được lực tác dụng của sóng trên một đơn vị chiều dài hình trụ thẳng đứng cũng chuyển động với vận tốc và gia tốc $\dot{u}(z,t), \ddot{u}(z,t)$. Giả thiết sóng vẫn chỉ truyền theo phương x , hình trụ có trục thẳng đứng trùng với trục z và đường kính là D . Theo Morison, tải trọng sóng tác dụng vào cột ở lân cận mặt cắt z của hình trụ sẽ gồm hai thành phần: một là lực xô của chất lỏng gây ra do quán tính của chất lỏng khi có vật chắn đường (gọi là lực quán tính) và hai là lực ma sát giữa chất lỏng và vật gọi là lực cản nhớt, phụ thuộc vào vận tốc tương đối giữa vật và chất lỏng. Morison đã tính được lực quán tính bằng lý thuyết và đề nghị công thức tính lực cản bằng thực nghiệm. Ta sẽ xây dựng các công thức này theo quan điểm của Morison, dựa trên sóng điều hoà đã trình bày ở trên.

a) *Lực quán tính.*

Vấn xét bài toán phẳng trong mặt phẳng XOY , hàm thế vận tốc vẫn thoả mãn phương trình

$$\Delta\phi(x, y, t) = 0$$

với các điều kiện biên gồm ở xa cột $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \dot{u}_x &= \frac{\partial\phi}{\partial x} = \dot{u}_0 \\ \dot{u}_y &= \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

và điều kiện tiếp xúc giữa chất lỏng và cột trụ mô tả chất lỏng không thể xâm nhập vào hình trụ, được biểu diễn là vận tốc của chất lỏng chiếu lên phương pháp tuyến của mặt hình trụ bằng 0.

Nếu xét bài toán trên trong hệ toạ độ cực

$$(r, \theta) : x = r \cos\theta, y = r \sin\theta$$

phương trình Laplas nêu trên có dạng

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = 0 \tag{3.3.8}$$

và điều kiện biên ở xa vô cùng $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \dot{u}_x &= \dot{u}_r \cos\theta - \dot{u}_\theta \sin\theta = \dot{u}_0 \\ \dot{u}_y &= \dot{u}_r \sin\theta + \dot{u}_\theta \cos\theta = 0 \end{aligned}$$

trong đó

$$\dot{u}_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}; \quad \dot{u}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

là vận tốc pháp và vận tốc quay của chất lỏng. Từ các quan hệ trên ta thấy điều kiện ở xa vô cùng là

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} - \dot{u}_0 \cos \theta \right) &= 0 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \dot{u}_0 r \sin \theta \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.9.a)$$

Tại bề mặt của hình trụ $r = r_0 = \frac{D}{2}$, ta có điều kiện

$$\dot{u}_r - \dot{u} \cos \theta = 0$$

suy ra

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \dot{u} \cos \theta \quad (3.3.9.b)$$

Để dàng nhận thấy phương trình (3.3.8) với các điều kiện biên (3.3.9) cho nghiệm

$$\phi(r, \theta, t) = \left[\dot{u}_0 + \frac{r_0^2}{r^2} (\dot{u}_0 - \dot{u}) \right] r \cos \theta \quad (3.3.10)$$

Sử dụng tích phân Bernoulli, tính áp lực sóng lên bề mặt hình trụ ở trong một đơn vị chiều cao:

$$\begin{aligned} p(r = r_0) &= p(\theta) = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho [\text{grad} \phi]^2 = \\ &= -\rho [2\ddot{u}_0 - \ddot{u}] r_0 \cos \theta - \frac{1}{2} \rho [\dot{u}_0^2 + (\dot{u}_0 - \dot{u})^2 + 2\dot{u}_0(\dot{u} - \dot{u}_0) \cos \theta]. \end{aligned}$$

Lấy tổng theo chu vi hình trụ, ta được

$$q_M = - \int_0^{2\pi} p(\theta) \cos \theta \cdot r d\theta = \rho \pi r_0^2 (2\ddot{u}_0 - \ddot{u}) = \rho A (2\ddot{u}_0 - \ddot{u})$$

với $A = \pi r_0^2$ là diện tích mặt cắt ngang hình trụ.

Viết lại công thức cho lực quán tính ở dạng

$$q_M(z, t) = \rho A \ddot{u}_0 + \rho A C_a (\ddot{u}_0 - \ddot{u}) \quad (3.3.11)$$

với C_a là hệ số đưa vào để điều chỉnh hình dáng của tiết diện ngang (bằng 1 đối với hình tròn), $\rho A C_a$ gọi là khối lượng nước kèm, \ddot{u}_0 là gia tốc chuyển

động của chất lỏng, \dot{u} là gia tốc chuyển động của vật thể hình trụ. Lực quán tính gồm hai thành phần, thành phần thứ nhất chỉ phụ thuộc vào quán tính của chất lỏng, thành phần còn lại tỷ lệ với gia tốc tương đối giữa vật và chất lỏng thông qua hệ số nước kèm.

b) *Lực cản*

Morison đề nghị lực cản tính theo công thức

$$q_D = \frac{1}{2} C_D \rho D |\dot{u}_0 - \dot{u}| (\dot{u}_0 - \dot{u})$$

với $D=2r_0$ hay kích thước đặc trưng cho mặt chắn sóng lớn nhất, C_D là hệ số xác định bằng thực nghiệm. Đây là lực phi tuyến đối với vận tốc tương đối.

Để đơn giản thường người ta tuyến tính hoá thành phần lực này thành

$$q_D = \frac{1}{2} \bar{C}_D \rho D (\dot{u}_0 - \dot{u})$$

với \bar{C}_D là hằng số được tính theo phương pháp tuyến tính hoá thống kê.

Tóm lại ta được mật độ phân bố lực sóng tác dụng vào hình trụ thẳng đứng vuông góc với hướng truyền sóng bằng

$$q = q_M(z, t) + q_D(z, t) = \rho A \ddot{u}_0 + \rho A C_a (\ddot{u}_0 - \ddot{u}) + \frac{1}{2} \bar{C}_D \rho D (\dot{u}_0 - \dot{u}). \quad (3.3.11)$$

được gọi là công thức Morison tuyến tính.

Nếu chất lỏng đứng yên, $\dot{u}_0 = \ddot{u}_0 = 0$, ta được

$$q = q_M(z, t) + q_D(z, t) = -\rho A C_a \ddot{u} - \frac{1}{2} \bar{C}_D \rho D \dot{u}. \quad (3.3.12, a)$$

Khi cột đứng yên, $\dot{u} = \ddot{u} = 0$, ta có

$$\begin{aligned} q = q_M(z, t) + q_D(z, t) &= \rho A (1 + C_a) \ddot{u}_0 + \frac{1}{2} \bar{C}_D \rho D \dot{u}_0 = \\ &= \rho A \bar{C}_M \ddot{u}_0 + \frac{1}{2} \bar{C}_D \rho D \dot{u}_0 \end{aligned} \quad (3.3.12, b)$$

với $\bar{C}_M = 1 + C_a$.

3.3.3. Tác động của sóng đến công trình.

a) *Cột thẳng đứng*

Xét phản ứng của một cột thẳng đứng ngàm chặt với đáy biển như một dầm công sơn, chiều dài L , môđul đàn hồi E , tiết diện A , mômen quán tính

mặt cắt I , mật độ khối ρ . Trên đầu cọc có vật rắn nặng M_0 kg, chiều sâu mực nước biển d . Nếu ký hiệu $u(z,t)$ là chuyển vị ngang của cột tại mặt cắt z (độ uốn của dầm), thì phương trình dao động uốn của cột có dạng

$$EI \frac{\partial^4 u(z,t)}{\partial z^4} + C_h \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} + N \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} + \rho A(1 + \bar{C}_M) \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} = \rho A \bar{C}_M \ddot{u}_0(z,t) + C_h \dot{u}_0(z,t)$$

trong đó

$$C_h = \frac{1}{2} \rho D \bar{C}_D; N = M_0 g$$

Giả thiết gốc toạ độ tại đáy biển, tức là tại đáy biển $z = 0$, còn ở trên đầu cọc $z = L$. Cùng với phương trình trên ta có điều kiện biên

$$u(0,t) = u'(0,t) = u''(L,t) = u'''(L,t) = 0$$

Mặt khác, tại bề mặt của cọc coi $x \approx 0$, vận tốc của hạt chất lỏng \dot{u}_0 là

$$\dot{u}_0(z,t) = \frac{gk}{\omega} \eta(z) \xi(t) = \frac{gka}{\omega} \eta(z) e^{i\omega t}$$

với $\xi = ae^{i\omega t}$; $\eta(z) = \frac{\cosh kz}{\cosh kd}$. Từ đó

$$\ddot{u}_0(z,t) = ikg\eta(z)\xi(t) = igka\eta(z)e^{i\omega t}$$

và vế phải phương trình trên có thể viết gọn lại bằng

$$\rho A \hat{C}_M \ddot{u}_0 + C_h \dot{u}_0 = \bar{q}(z) e^{i\omega t}$$

với

$$\bar{q}(z) = \frac{gka}{\omega} (C_h + i\omega \rho A \bar{C}_M) \eta(z)$$

Phương trình dao động ở trên được viết về dạng chuẩn như sau

$$EI \frac{\partial^4 u(z,t)}{\partial z^4} + C_h \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} + N \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} + \rho A(1 + \bar{C}_M) \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} = \bar{q}(z) e^{i\omega t} \quad (3.3.13)$$

Ta sẽ tìm nghiệm ở dạng phức

$$u(z,t) = \hat{U}(z) e^{i\omega t}$$

Khi đó, biên độ phức chuyển vị ngang của cột thoả mãn phương trình

$$\frac{d^4 \tilde{U}(z)}{dz^4} + 2n \frac{d^2 \hat{U}(z)}{dz^2} - \Omega^2 \hat{U}(z) = \hat{q}(z) \quad (3.3.14)$$

với

$$2n = \frac{N}{EI}; \Omega^2 = \frac{-i\omega C_h + \rho A \omega^2 (1 + \bar{C}_M)}{EI}; \hat{q}(z) = \frac{\bar{q}(z)}{EI}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (3.3.14) có thể viết ở dạng

$$\hat{U}(z) = B_1 \cosh \lambda_1 z + B_2 \sinh \lambda_1 z + B_3 \cosh \lambda_2 z + B_4 \sinh \lambda_2 z + \int_0^z K(z-\tau) \hat{q}(\tau) d\tau$$

trong đó

$$\lambda_1 = \sqrt{\sqrt{n^2 + \Omega^2} - n}; \lambda_2 = \sqrt{\sqrt{n^2 + \Omega^2} + n}$$

và hàm số

$$K(z) = \frac{\lambda_2 \sinh \lambda_1 z - \lambda_1 \sin \lambda_2 z}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}$$

là nghiệm phương trình (3.3.14) với vế phải bằng 0 và có tính chất

$$K(0) = K'(0) = K''(0) = 0, K'''(0) = 1$$

Áp dụng điều kiện biên cho nghiệm tổng quát nêu trên ta sẽ được

$$\hat{U}(z) = B_1 (\cosh \lambda_1 z - \cos \lambda_2 z) + B_2 (\sinh \lambda_1 z - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sin \lambda_2 z) + \int_0^z K(z-\tau) \hat{q}(\tau) d\tau \quad (3.3.15)$$

với các hằng số B_1, B_2 là nghiệm của hệ phương trình đại số tuyến tính

$$B_1 (\lambda_1^2 \cosh \lambda_1 L - \lambda_2^2 \cos \lambda_2 L) + B_2 (\lambda_1^2 \sinh \lambda_1 L - \lambda_1 \lambda_2 \sin \lambda_2 L) = - \int_0^d K''(d-\tau) \hat{q}(\tau) d\tau = q''$$

$$B_1 (\lambda_1^3 \cosh \lambda_1 L - \lambda_2^3 \cos \lambda_2 L) + B_2 (\lambda_1^3 \sinh \lambda_1 L - \lambda_1^2 \sin \lambda_2 L) = - \int_0^d K'''(d-\tau) \hat{q}(\tau) d\tau = q'''$$

Như vậy, (3.3.15) cho ta biên độ phức của cột thẳng đứng dưới tác động của sóng điều hoà.

b) Tác động của sóng lên cột xiên

Ở các phần trên chúng ta chỉ xét trường hợp cột thẳng đứng và hướng sóng trùng với hướng trục x . Điều này có nghĩa là sóng chỉ tác dụng trên mặt phẳng vuông góc với trục của cột. Công thức Morison cũng chỉ áp dụng cho trường hợp khi vận tốc và gia tốc của hạt chất lỏng có hướng pháp

tuyến với bề mặt của phần tử. Chuyển động dọc theo trục của cột không gây nên áp lực sóng. Ý tưởng này cho phép ta tính lực sóng tác dụng lên một thanh xiên.

Giả sử thanh hình trụ nằm nghiêng tạo thành một véc tơ định hướng so với các trục tọa độ là (C_x, C_y, C_z) . Sóng vẫn truyền theo hướng trục x , khi đó vận tốc hạt nước vẫn có hai thành phần theo trục x và z tương ứng là \dot{u}, \dot{w} . Giả sử véc tơ vận tốc hạt nước là $\vec{v} = \{\dot{u}, 0, \dot{w}\}^T$. Ký hiệu \vec{v}_t là thành phần véc tơ vận tốc hướng dọc theo trục thanh, khi đó

$$\vec{v}_t = (\vec{v}, \vec{C})\vec{C}$$

Còn thành phần vận tốc pháp tuyến với trục thanh bằng

$$\vec{v}_n = \vec{v} - \vec{v}_t$$

và có các thành phần theo các trục tọa độ là

$$\begin{cases} v_{nx} = \dot{u} - (\dot{u}C_x + \dot{w}C_z)C_x \\ v_{ny} = -(\dot{u}C_x + \dot{w}C_z)C_y \\ v_{nz} = \dot{w} - (\dot{u}C_x + \dot{w}C_z)C_z \end{cases}$$

Quy định trục x trong hệ tọa độ địa phương của thanh trùng với hướng của \vec{v}_n , công thức Morison cho ta véc tơ lực sóng tác dụng lên một đơn vị chiều dài thanh bằng

$$\vec{f}_n = \rho A \dot{\vec{v}}_n + \rho A C_a (\dot{\vec{v}}_n - \dot{\vec{v}}_r) + 0.5 \bar{C}_D \rho D (\vec{v}_n - \vec{v}_r),$$

trong đó $\vec{v}_r, \dot{\vec{v}}_r$ là vận tốc và gia tốc pháp tuyến của thanh. Như vậy trong hệ tọa độ tổng thể, lực sóng vẫn tác dụng lên thanh theo cả ba hướng (nhưng trong hệ tọa độ địa phương thì chỉ có theo phương pháp tuyến với trục thanh). Đây là cơ sở để tính tải trọng sóng tác dụng lên công trình khung phức tạp.

Đối với các công trình biển, tải trọng sóng trong khuôn khổ phương pháp phần tử hữu hạn, đã được tính toán nhiều. Đã có những chương trình tính sóng chuẩn ở Việt Nam. Việc tính tải trọng sóng theo phương pháp ma trận độ cứng động đã được đề cập đến trong công trình [9]. Tuy nhiên một quy trình và phần mềm hoàn chỉnh vẫn chưa có được mà còn phải nghiên cứu tiếp.

3.4. Bài toán Chẩn đoán kỹ thuật công trình

3.4.1. Chẩn đoán kỹ thuật công trình.

Trong thực tế kỹ thuật hiện nay, vấn đề đánh giá chất lượng các công trình mới xây trước khi đưa vào sử dụng và đánh giá khả năng làm việc an toàn, hiệu quả của các công trình cũ trở nên vô cùng cấp thiết ở nước ta. Mục đích chính vẫn là đảm bảo hiệu quả và an toàn trong khai thác, duy tu và sửa chữa các công trình xây dựng. Bản chất khoa học của các vấn đề trên chính là việc đánh giá trạng thái kỹ thuật công trình.

Nếu trạng thái kỹ thuật công trình được hiểu là trạng thái kết cấu và khả năng làm việc của công trình, thì việc đánh giá trạng thái kỹ thuật công trình được chia làm hai bước.

- Bước một là chẩn đoán hư hỏng kết cấu công trình, tức đánh giá những thay đổi của kết cấu công trình so với một thời điểm nào đó trước đây (thông thường là trạng thái kết cấu khi đưa vào sử dụng). Điều này có nghĩa là phải xác định mô hình thực trạng của kết cấu tại thời điểm cần đánh giá. Công việc này về nội dung chính là bài toán nhận dạng kết cấu (*structure identification*).
- Bước sau chỉ là đánh giá các chỉ tiêu sử dụng của công trình như là độ bền, tuổi thọ, độ an toàn,... của công trình dựa trên cơ sở mô hình thực trạng đã được xác định.

Như vậy, vấn đề mấu chốt của chẩn đoán kỹ thuật công trình chính là bài toán nhận dạng kết cấu, hay còn gọi là bài toán chẩn đoán hư hỏng (*structural damage detection*). Đây là một bài toán ngược của Cơ học: *Từ những thông tin thu thập được về tải trọng cũng như về phản ứng của công trình, xác định mô hình kết cấu của nó*. Đầu vào của bài toán ngược này chính là các thông tin về tải trọng và phản ứng của công trình. Các tham số chính này có thể là tĩnh, nếu các phương trình được sử dụng tĩnh học hoặc là động lực học như đã được nghiên cứu khá chi tiết trong giáo trình này.

Trên cơ sở những kiến thức đã được trình bày ở trên về động lực học, ta có thể khẳng định rằng các tham số động lực học của công trình, đặc biệt là các đặc trưng động lực học của kết cấu chứa rất nhiều thông tin về bản thân kết cấu, hơn là các tham số tĩnh học. Chính vì thế, động lực học công trình đã trở thành nền tảng của Chẩn đoán kỹ thuật công trình. Đây cũng

là lý do để có sự bổ sung bài toán chẩn đoán kỹ thuật công trình vào giáo trình động lực học công trình này như một ứng dụng của nó.

3.4.2. Phương pháp rung động trong chẩn đoán công trình.

Việc chẩn đoán hư hỏng kết cấu công trình dựa trên cơ sở các thông tin thu thập được về các đặc trưng động lực học của công trình đang tồn tại được gọi là *chẩn đoán hư hỏng công trình* bằng các đặc trưng động lực học, hay gọi tắt là *chẩn đoán động* công trình. Cách tiếp cận này gọi là phương pháp rung động trong chẩn đoán kỹ thuật công trình. Sơ đồ nguyên lý của bài toán chẩn đoán động công trình được mô tả trong Hình vẽ 3.4.1.

Có lẽ cần thiết phải dừng lại đôi chút để giải thích nội dung công việc theo phương pháp rung động của chẩn đoán kỹ thuật công trình, được trình bày trong hình vẽ 3.4.1. Về nội dung, có ba bài toán cần phải giải quyết.

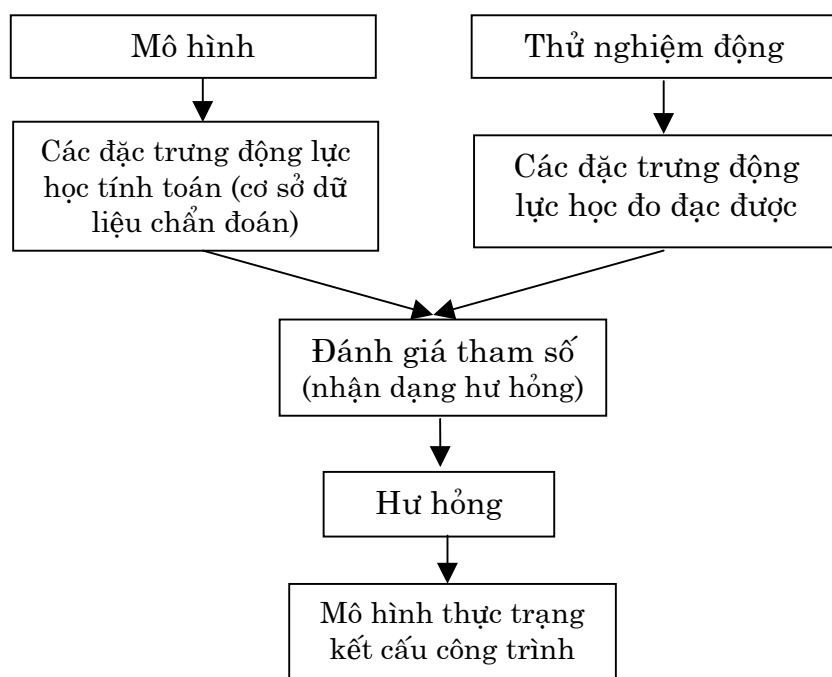
1. *Một là mô phỏng kết cấu công trình thực* bằng cách xây dựng mô hình kết cấu với những khả năng của các hư hỏng có thể xảy ra đối với công trình. Đây là công việc mô hình hoá kết cấu thực với những khả năng có thể xảy ra với công trình như những thay đổi về hình học: hình dáng tiết diện, ăn mòn, nứt, gãy, cong méo, các lỗ rỗng,....., về vật liệu: môđul đàn hồi, phân bố khối lượng, liên kết giữa các phần tử hay giữa công trình và nền móng ... Mục đích là xây dựng một tập các mô hình dự trữ, mô tả những khả năng hư hỏng có thể xảy ra của công trình. Tập mô hình dự trữ được xây dựng ở dạng một mô hình phụ thuộc vào một tập các tham số hư hỏng. Giá trị không của các tham số này tương ứng với trạng thái nguyên vẹn của kết cấu. Bất kỳ một trạng thái hư hỏng nào khác được mô tả bằng giá trị cụ thể của tập tham số hư hỏng.

Bằng cách như vậy, tập mô hình dự trữ của công trình được thay bằng một mô hình tham số của kết cấu công trình thực (có hư hỏng) và việc xác định mô hình thực trạng của kết cấu công trình trở thành bài toán xác định giá trị của tập tham số hư hỏng ứng với trạng thái kỹ thuật thực của công trình.

Sau khi xây dựng được mô hình tham số của kết cấu công trình, việc tiếp theo là tính toán các đặc trưng động lực của công trình đã được chọn là các dấu hiệu để chẩn đoán hư hỏng, ví dụ như các tần số riêng, các dạng dao động riêng hay các đặc trưng phổ khác như hàm truyền, trở kháng cơ học,...phụ thuộc vào các tham số hư hỏng làm cơ sở dữ liệu cho việc chẩn đoán hư hỏng.

2. Hai là việc tiến hành *thử nghiệm động trên công trình đang tồn tại*. Tức là tiến hành một số thí nghiệm về động lực học công trình tại hiện trường: Tạo ra các tải trọng làm cho công trình vào trạng thái làm việc động theo mong muốn của mình và dùng các thiết bị đo đạc đáp ứng của công trình với những tải trọng đã gây ra. Dựa trên các số liệu này, cần tiến hành phân tích, xử lý để rút ra các giá trị thực tế của các đặc trưng động lực học đã được chọn làm dấu hiệu chẩn đoán.

Dấu hiệu để chẩn đoán được chọn là tần số dao động riêng vì đặc trưng này dễ dàng đo được nhất với độ chính xác chấp nhận được. Hơn nữa các tần số riêng phản ánh trung thực nhất bản chất cơ học (khối lượng và độ cứng) của hệ không phụ thuộc vào các yếu tố bên ngoài. Thử nghiệm động là cả một dãy các công việc phức tạp, phải sử dụng các thiết bị đo đạc, công cụ xử lý số liệu hiện đại. Riêng thử nghiệm động đã là một ngành đang được nghiên cứu và ứng dụng nhiều trên thế giới hiện nay.



Hình vẽ 3.4.1

Sơ đồ giải bài toán chẩn đoán hư hỏng bằng phương pháp rung động

3. Sau khi đã thu thập được các số liệu đo đạc từ công trình thực về các đặc trưng động lực học của công trình, cùng với cơ sở dữ liệu đã xây dựng trong phần mô phỏng, giải bài toán đánh giá tham số (*parameter estimation*), ta thu được các giá trị của tham số hư hỏng, tương ứng với trạng thái thực của công trình. So sánh các giá trị này của tham số hư

hỏng với các giá trị gốc, ta có thể rút ra về tình trạng hư hỏng công trình và đề xuất các giải pháp sửa chữa kịp thời. Đồng thời ta cũng có ngay được mô hình thực trạng của kết cấu công trình, có thể sử dụng tiếp để đánh giá khả năng làm việc tiếp theo của nó.

Đến đây bài toán chẩn đoán hư hỏng kết cấu đã được hoàn tất.

3.4.3. Ví dụ minh họa

A. Chẩn đoán vết nứt trong dầm đàn hồi.

Xét một dầm đàn hồi có môđun đàn hồi E , mật độ khối ρ , hệ số Poisson ν , tiết diện $A=b \times h$ (h là chiều cao dầm), mômen tiết diện I và chiều dài L , như đã mô tả trong chương 1. Kết cấu này có thể mô tả một dầm cầu đang làm việc. Một vấn đề đặt ra là hãy xác định xem dầm có bị nứt ngang ở đâu đó không, nếu có thì vị trí ở đâu và độ sâu của vết nứt như thế nào. Đây là bài toán chẩn đoán hư hỏng đích thực của một kết cấu công trình đơn giản.

Các tham số hư hỏng là vị trí và độ sâu vết nứt x_c, a_c . Mô hình tham số của vết nứt chính bao gồm: Một là mô hình của vết nứt, được xây dựng trên cơ sở giả thiết vết nứt được thay thế bằng một lò xo quay tương đương tại vị trí vết nứt với độ cứng liên hệ với độ sâu vết nứt bằng công thức:

$$K = \frac{1}{C}; C = \frac{6\pi(1-\nu^2)h}{EI} I_c\left(\frac{a_c}{h}\right) \tag{3.4.1}$$

$$I_c(z) = 0.6272z^2 - 1.04533z^3 + 4.5948z^4 - 9.973z^5 + 20.2948z^6 - 33.0351z^7 + 47.1063z^8 - 40.7556z^9 + 19.6z^{10}$$

Hai là mô hình động lực học của dầm có vết nứt, được mô tả bằng phương trình tần số

$$F_1(\lambda, x_c)\beta + F_0(\lambda, x_c) = 0; \tag{3.4.2}$$

$$\lambda = L \left[\frac{\rho A}{EI} \omega^2 \right]^{1/4}; \beta = \frac{EI}{KL} = \frac{5.346h}{L} I_c(a_c/h)$$

Với các hàm F_0, F_1 là các hàm số được xác định trên cơ sở điều kiện biên ở hai đầu [14]. Hiển nhiên là, mô hình tham số này cho ta xác định tần số riêng của dầm phụ thuộc vào các tham số vết nứt x_c, a_c . Đặc biệt là khi độ sâu vết nứt bằng không (tương ứng với giá trị $\beta = 0$) ta được phương trình tần số của dầm không có vết nứt. Như vậy tham số β có thể coi là đại diện cho chiều sâu vết nứt hay mức độ hư hỏng. Nghiên cứu sự phụ thuộc của tần số riêng (đúng hơn là tham số tần số λ) vào độ sâu và vị trí vết nứt

trên cơ sở mô hình đã lập, cho thấy độ sâu của vết nứt càng lớn thì tần số riêng càng giảm, nhưng độ nhạy cảm của tần số lúc mới xuất hiện vết nứt lớn hơn so với lúc vết nứt đã đạt một độ sâu nào đó. Hơn nữa tồn tại một số vị trí trên dầm mà nếu vết nứt xuất hiện tại đó có một số tần số riêng tương ứng không phụ thuộc vào độ sâu vết nứt. Điều này quả là có ý nghĩa trong việc chẩn đoán vết nứt về sau.

Vấn đề tiếp theo là thử nghiệm động trên dầm. Dấu hiệu chẩn đoán tất nhiên là phải chọn tần số riêng. Vì thế mục tiêu thử nghiệm động là xác định các tần số riêng thực tế của dầm. Công việc này khá đơn giản đối với các chuyên gia về thử nghiệm động đối với một dầm đàn hồi. Chúng ta không có nhiều thời gian để xem xét vấn đề này ở đây mà chỉ dừng lại ở một ý tưởng đơn giản trong việc các tần số đo được là $\Omega = \{\omega_1^*, \dots, \omega_m^*\}$.

Thông thường, với các thiết bị thí nghiệm động hiện đại chúng ta có thể đo được hàm phổ của dịch chuyển, vận tốc hay gia tốc của công trình tại một số vị trí nào đó. Hàm phổ này thực chất là hàm truyền như đã nói đến nhiều trong các chương trước, phụ thuộc vào vị trí điểm đo và tần số. Những nghiên cứu lý thuyết cho thấy trên đồ thị của hàm truyền theo tần số các đỉnh tương ứng với các tần số riêng. Nói đúng hơn, các tần số riêng nói chung nằm trong lân cận của các đỉnh. Tuy nhiên tần số riêng không hoàn toàn trùng với tần số đỉnh vì hệ số cản làm tần số đỉnh (tần số cộng hưởng) lệch khỏi tần số riêng. Độ lệch này phụ thuộc vào hệ số cản được biểu hiện bằng bề rộng (độ nhọn) của đỉnh. Đối với các công trình thép, cản nhỏ, nói chung các đỉnh rất nhọn, nhưng đối với các công trình nằm trong đất thì các đỉnh rất tù. Như vậy, việc xác định tần số riêng dựa trên đồ thị của hàm truyền chỉ cần đến tần số đỉnh và độ nhọn (hệ số cản) của các đỉnh. Nhưng việc sắp xếp bố trí trật tự trong các tần số riêng theo thứ tự tăng dần là một việc khá phức tạp, cần đến kết quả phân tích dạng riêng trước khi đo và vị trí đo.

Cuối cùng là xác định các tham số hư hỏng. Từ các tần số đo, ta có thể có được các tham số tần số tương ứng số liệu đo $\Lambda = \{\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*\}$, tính theo công thức (3.4.2). Về nguyên tắc, nếu số liệu đo là chính xác và mô hình mô tả đúng sự làm việc của dầm thực tế, ta có thể xác định hai tham số vết nứt x_c và β từ các phương trình

$$F_1(\lambda_j^*, x_c)\beta + F_0(\lambda_j^*, x_c) = 0; j = 1, \dots, m \quad (3.4.3)$$

Hiển nhiên là để xác định được 2 ẩn số, ta cần ít nhất là 2 phương trình và do đó số lượng tần số đo ít nhất phải là 2, tức $m = 2$. Khi đó, để hệ hai phương trình (3.4.3) có nghiệm đối với β , cần phải thoả mãn điều kiện

$$F_1(\lambda_1^*, x_c)F_0(\lambda_2^*, x_c) - F_1(\lambda_2^*, x_c)F_0(\lambda_1^*, x_c) = 0 \quad (3.4.4)$$

Đây là phương trình để xác định vị trí vết nứt x_c , có thể giải bằng một phương pháp số thích hợp. Sau khi giải phương trình cuối, với nghiệm là \bar{x}_c , ta có thể tính tiếp mức độ hư hỏng

$$\bar{\beta} = -\frac{F_0(\lambda_1^*, \bar{x}_c)}{F_1(\lambda_1^*, \bar{x}_c)} \equiv -\frac{F_0(\lambda_2^*, \bar{x}_c)}{F_1(\lambda_2^*, \bar{x}_c)} \quad (3.4.5)$$

Nếu số lượng tần số đo được nhiều hơn 2 và do các sai số không thể tránh khỏi trong đo đạc và mô hình hoá, ta phải giải hệ phương trình (3.4.2) bằng phương pháp gần đúng – phương pháp bình phương tối thiểu

$$J(x_c, \beta) = \sum_{j=1}^m [F_1(\lambda_j^*, x_c)\beta + F_0(\lambda_j^*, x_c)] \Rightarrow \min$$

Nghiệm bình phương tối thiểu đối với mức độ hư hỏng tồn tại và bằng

$$\tilde{\beta} = -\left[\frac{\sum_j F_0^2(\lambda_j^*, x_c)}{\sum_j F_1^2(\lambda_j^*, x_c)} \right]^{1/2} \quad (3.4.6)$$

với điều kiện

$$\sum_{j=1}^m F_0^2(\lambda_j^*, x_c) \cdot \sum_{j=1}^m F_1^2(\lambda_j^*, x_c) - \left[\sum_{j=1}^m F_0(\lambda_j^*, x_c)F_1(\lambda_j^*, x_c) \right]^2 = 0 \quad (3.4.7)$$

Như vậy, (3.4.7) là phương trình để xác định vị trí vết nứt. Sau khi giải phương trình siêu việt một ẩn số này được \tilde{x}_c , rồi thay nó vào (3.4.6) ta xác định được mức độ hư hỏng phải tìm.

B. Chẩn đoán hư hỏng khung không gian sử dụng mô hình PTHH.

Đối với kết cấu công trình phức tạp hơn, chúng ta không thể sử dụng cách tiếp cận giải tích như trên, mà phải cần đến một trong các phương pháp mô phỏng đã trình bày ở chương hai. Vì phương pháp PTHH đã và đang được dùng phổ biến nên chúng tôi sẽ trình bày một ví dụ nữa về ứng dụng ĐLHCT trong chẩn đoán hư hỏng của khung trên cơ sở phương pháp PTHH.

Mô hình tham số của kết cấu công trình được xây dựng dựa trên cơ sở phương pháp PTHH. Cụ thể là tìm cách đưa các tham số hư hỏng vào các

ma trận khối lượng và độ cứng để cuối cùng nhận được $M(\beta), K(\beta)$, trong đó β là véc tơ tham số hư hỏng. Việc xây dựng các ma trận này tùy thuộc vào từng quan điểm về hư hỏng và có nhiều dạng khác nhau. Ví dụ, đối với một phần tử dầm hai chiều có một vết nứt, ma trận khối lượng vẫn giữ nguyên vì nói chung vết nứt không làm thay đổi khối lượng, còn ma trận độ cứng được xây dựng dựa trên các hàm dạng là chuyển vị tĩnh (theo phương pháp PTHH) của dầm có một vết nứt. Kết quả nhận được ma trận độ cứng phần tử có dạng

$$[K] = \frac{EI}{L_c^3} \begin{bmatrix} 12(1+\beta) & 6L(1+2\beta\bar{x}) & -12(1+\beta) & 6L(1+2\beta(1-\bar{x})) \\ 6L(1+2\beta\bar{x}) & 4L^2(1+3\beta\bar{x}^2) & -6L(1+2\beta\bar{x}) & 2L^2(1+6\beta\bar{x}(1-\bar{x})) \\ -12(1+\beta) & -6L(1+2\beta\bar{x}) & 12(1+\beta) & -6L(1+2\beta(1-\bar{x})) \\ 6L(1+2\beta(1-\bar{x})) & 2L^2(1+6\beta\bar{x}(1-\bar{x})) & -6L(1+2\beta(1-\bar{x})) & 4L^2(1+3\beta(1-\bar{x})^2) \end{bmatrix}$$

trong đó $\bar{x} = x_c / L$, x_c là vị trí vết nứt và

,

Để dàng nhận thấy nếu độ sâu vết nứt bằng 0 ta được ma trận độ cứng của phần tử dầm hai chiều cổ điển. Như vậy ta được ma trận độ cứng là hàm của hai tham số hư hỏng vị trí và độ sâu vết nứt. Vì dấu hiệu chẩn đoán được chọn là các tần số riêng, nên cơ sở dữ liệu cho chẩn đoán nói chung được xây dựng từ độ nhạy cảm của chúng đối với các tham số hư hỏng. Thật vậy, xuất phát từ phương trình cơ bản của bài toán trị riêng

$$(3.4.8)$$

ta có thể tính được

Nhân vô hướng từ bên phải phương trình cuối với véc tơ dạng riêng Φ^T , sử dụng tính chất đối xứng của các ma trận và phương trình (3.4.8), ta được

Từ đây ta có thể tính được

(3.4.9)

Công thức cuối mô tả sự thay đổi của trị riêng (hay tần số riêng) theo tham số hư hỏng được gọi là *độ nhạy cảm của trị riêng*. Đây là công cụ chủ yếu để nghiên cứu thiết kế cũng như chẩn đoán hư hỏng công trình.

Giả sử kết quả của thử nghiệm động công trình khung là m tần số riêng, và do đó ta có m trị riêng đo được. Về nguyên tắc ta có

trong đó

là ma trận độ nhạy cảm của các trị riêng đã được xây dựng ở trên và là trị riêng của kết cấu công trình không có hư hỏng.

Đưa vào ký hiệu

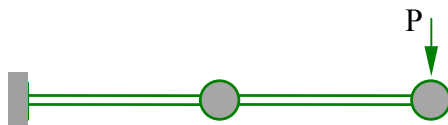
bài toán chẩn đoán hư hỏng được thay bằng bài toán đánh giá tham số tuyến tính

với D là ma trận cấp $m \times n$, n là số lượng các tham số hư hỏng, b là véc tơ số liệu đo đạc. Bài toán đánh giá tham số cơ bản này cho ta nghiệm bình phương tối thiểu

Như vậy, bài toán chẩn đoán hư hỏng về nguyên tắc là giải xong. Tuy nhiên nghiệm này chỉ là gần đúng. Độ chính xác của nó phụ thuộc nhiều vào ma trận độ nhạy cảm D . Có nhiều cách để chính xác hoá cũng như để vượt qua tính kỳ dị của bài toán không chính, tuy nhiên chúng vượt ra ngoài khuôn khổ giáo trình này, nên không được trình bày ở đây.

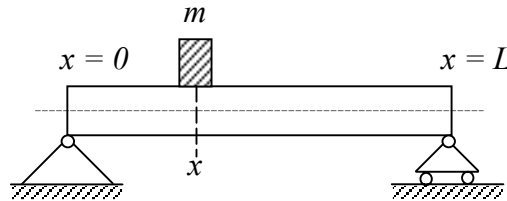
MỘT SỐ ĐỀ BÀI KIỂM TRA

1. Hãy thiết lập phương trình tần số dao động uốn của dầm đàn hồi có các đặc trưng E , F , J , L , ρ không đổi trong trường hợp dầm công-xôn (một đầu ngàm, một đầu tự do).
2. Chứng minh rằng hai dạng riêng khác nhau của một dầm đàn hồi trực giao.
3. Nêu khái niệm, ý nghĩa cơ học và biểu thức giải tích của hàm truyền thông qua các đặc trưng động lực học đối với dầm đàn hồi.
4. Chứng minh rằng các dạng riêng của hệ cơ học hữu hạn bậc tự do trực giao theo ma trận khối lượng và độ cứng.
5. Thiết lập ma trận độ cứng và khối lượng trong hệ tọa độ địa phương của một phần tử dầm hai chiều bằng phương pháp phần tử hữu hạn.
6. Cho một hệ cơ học như trong Hình vẽ P1. Các vật có cùng khối lượng m và khoảng cách giữa chúng và đến đầu mút trái đều bằng L . Các thanh nối có cùng các đặc trưng cơ học như modul đàn hồi E và mô men quán tính J . Bỏ qua khối lượng của các thanh nối, kích thước các vật và chỉ xét chuyển động thẳng đứng của các vật, dùng phương pháp tập trung khối lượng hãy:
 - a. Xác định bậc tự do và Thiết lập ma trận khối lượng M của hệ (2 điểm).
 - b. Cho lực $P=1$ tác dụng lên vật 2 (hình vẽ), xác định chuyển vị tĩnh của hai vật (3 điểm).
 - c. Xây dựng ma trận độ mềm F và ma trận độ cứng $K=F^{-1}$ của hệ (3 điểm).
 - d. Xác định các tần số riêng và dạng dao động riêng của hệ (2 điểm).



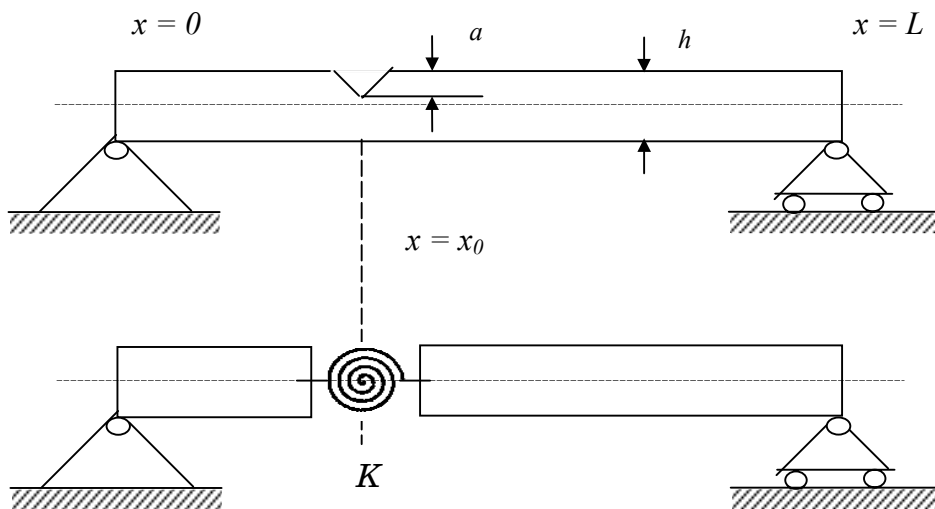
Hình P1

7. Dầm có khối lượng tập trung. Thiết lập phương trình tần số cho kết cấu được mô tả trong Hình P2. Nếu biết một số tần số riêng của hệ, hãy tính khối lượng tập trung.



Hình P2

8. Dầm có một vết nứt. Cho một dầm đàn hồi, có một vết nứt mở tại x_0 (Hình P3) với độ sâu a . Vết nứt được mô tả bằng một lò xo xoay độ cứng K , phụ thuộc vào độ sâu vết nứt. Thiết lập phương trình tần số của hệ. Nếu biết một tần số và vị trí vết nứt, hãy tìm độ sâu.



Hình P3

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Đỗ Sanh, Cơ học, tập 2, NXBGD, Hà Nội, 1992.
2. Nguyễn Văn Khang, Dao động kỹ thuật, NXBKHK, Hà Nội, 2001.
3. Filipov A. P. Dao động của các hệ đàn hồi, M. 1970 (Tiếng Nga).
4. Panovko I.A., Gubanov I.I., ổn định và dao động hệ đàn hồi, M.1967.
5. R. W. Clough, Dynamics of structures, McGraw-Hill, Inc, 1993.
6. Timoshenko S., Young D.H., Weaver W., Vibration Problems in Engineering, 1974.
7. Daniel J. Inman, Engineering Vibration, Printice Hall International, Inc., 1996.
8. Nguyen Xuan Hung. Dynamics of Structures and its Application in Structural Identification. IAM, Ho Chi Minh city, 1999.
9. Nguyễn Xuân Hùng, Động lực học công trình biển, NXB KHKT, Hà Nội, 1999.
10. Nguyễn Xuân Hùng, Tính toán chính xác kết cấu trên máy tính. NXB KHKT, Hà Nội, 2002.
11. Lê Văn Quý, Lê Thọ Trình, Cơ học kết cấu, Phần 2: Động lực học công trình. NXB ĐH&THCN, Hà nội, 1979.
12. Phạm Khắc Hùng, Đào Trọng Long, Lê Văn Quý, Lê Thọ Trình. ổn định và Động lực học công trình. NXB ĐH&THCN, Hà Nội, 1974.
13. D. H. Moon and M. S. Choi (2000) Journal of Sound and Vibration 234(5), 725-736. Vibration analysis for frame structures using transfer of dynamic stiffness coefficient.
14. Nguyen Tien Khiem, Dao Nhu Mai (1997) Vietnam Journal of Mechanics, Natural Frequency Analysis of Cracked Beam.
15. Khiem N . T. and Lien T. V. (2002) Journal of Sound and Vibration 234(5), 725-736. The Dynamic Stiffness Matrix Method in Forced Vibration Analysis of Multiple Cracked Beam.

16. Nguyễn Tiến Khiêm, Chấn đoán kỹ thuật công trình- Bài toán, phương pháp và ứng dụng. Tuyển tập Hội nghị Cơ học Kỹ thuật toàn quốc, Hà Nội, 12-13/10/2001. NXB Đại học quốc gia Hà Nội, 2001, 162-172.
17. Wittrick W.H. and Williams F. W., A general algorithm for computing natural frequencies of elastic structures. *Quart. Journ.Mech. and Applied Math.*, Vol. XXIV, Pt.3, 1971, 263-284.