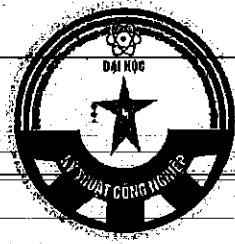


ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP



BÁO CÁO TỔNG KẾT
ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP TRƯỜNG
TÍNH TOÁN BIÊN DẠNG CAM DỰA VÀO PHẦN TỬ HỮU
HẠN

Mã số: T2019-B39

Chủ nhiệm đề tài: TS. NGUYỄN THỊ THANH NGÀ

THÁI NGUYÊN, NĂM 2021

NỘI DUNG

DANH MỤC HÌNH VẼ.....	3
DANH MỤC CÁC BẢNG BIỂU	5
THÔNG TIN KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU.....	6
INFORMATION ON RESEARCH RESULTS.....	8
MỞ ĐẦU.....	10
1. Tính cấp thiết của đề tài.....	10
2. Mục tiêu nghiên cứu.....	10
3. Nội dung nghiên cứu	11
4. Kết quả nghiên cứu.....	11
5. Cấu trúc của đề tài	11
CHƯƠNG I.....	13
NGHIÊN CỨU TỔNG QUAN VỀ THIẾT KẾ CƠ CẤU CAM	13
1.1. Giới thiệu về cơ cấu cam.....	13
1.2. Các khái niệm cơ bản về cơ cấu cam.....	14
1.2.1. Khái niệm và phân loại	14
1.2.2. Các khái niệm cơ bản của cơ cấu cam.....	18
1.2. Tổng quan về thiết kế cam.....	20
1.2.1. Các hàm toán học cơ bản mô tả chuyển động của cần	20
1.2.2. Thiết kế biên dạng cam	23
CHƯƠNG 2.....	25
THIẾT KẾ BIÊN DẠNG CAM DỰA VÀO PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN	25
2.1. Phương trình toán học mô tả biên dạng của cam	25
2.2. Phương pháp.....	27
2.3. Phương trình tổng hợp biên dạng cam.....	28
2.3.1. Điều kiện thiết kế cam	28
2.3.2. Phương trình Penalty	29
2.3.3. Phương trình Augmented Lagrange.....	29
2.3.4. Phương trình ổn định tổng quát	30
2.3.5. Phương trình tổng quát.....	31

2.3.6.	Tuyến tính hóa phương trình tổng quát.....	31
2.3.7.	Tuyến tính hóa phương trình ổn định.....	31
2.4.	Áp dụng phần tử hữu hạn	31
2.4.1.	Các thành phần của biên dạng cam biểu diễn bằng phần tử hữu hạn 32	
2.4.2.	Phương trình tổng quát dưới dạng phần tử hữu hạn.....	34
2.4.3.	Phương trình ổn định biểu diễn bằng phần tử hữu hạn.....	35
3.5.	Phương pháp giải	35
3.5.1.	Quá trình giải bài toán.....	35
3.5.2.	Phương pháp số dùng Gaussian	37
3.5.3.	Thuật toán.....	39
CHƯƠNG 3.....		40
KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN		40
4.1.	Biên dạng cam.....	40
4.2.	Ảnh hưởng của các tham số ϵ và μ đến độ chính xác của biên dạng cam	45
CHƯƠNG 4.....		47
KẾT LUẬN VÀ HƯỚNG NGHIÊN CỨU TIẾP THEO		47
4.1.	Kết luận	47
4.2.	Hướng nghiên cứu tiếp theo.....	48
TÀI LIỆU THAM KHẢO.....		49

DANH MỤC HÌNH VẼ

Hình 1. (a) Cam đĩa; (b) Cam tịnh tiến; (c) Cam thùng; (d) Cam mặt.	1616
Hình 2. Cam đĩa với: (a) Cam lệch tâm và cần đáy nhọn; (b) Cam chính tâm và cần đáy bằng; (c) Cam cần lắc đáy con lăn; (d) Cam cần lắc đáy cong.	17
Hình 3. Các kiểu ràng buộc tiếp xúc của cam và cần	17
Hình 4. Cơ cấu cam cần đẩy, đáy con lăn	18
Hình 5. Chuyển vị của cần	19
Hình 6. Hàm đa thức bậc 3, 5 và bậc 7 mô tả chuyển động của cần giai đoạn đi xa: chuyển vị, vận tốc, gia tốc và xung	21
Hình 7. Hàm điều hòa và cycloid mô tả chuyển động của cần giai đoạn đi xa: chuyển vị, vận tốc, gia tốc và xung	21
Hình 8. Hàm piecewise polynomial thỏa mãn 5 điều kiện biên của đường cong biểu thị chuyển vị của cần	22
Hình 9. Hàm Bezier mô tả chuyển động của cần [23]	23
Hình 10. Biểu diễn biên dạng cam thông qua hệ tọa độ curvilinear	25
Hình 11. Chia phần tử trên bề mặt cam	33
Hình 12. Phép chuyển đổi tích phân Gaussian giữa các phần tử của biên dạng tham chiếu Ω_{\square}^e và các phần tử của biên dạng cam hiện hành Ω_c thông qua hệ tọa độ tham số $\xi^{\alpha} \in [-1, +1]$	37
Hình 13. Tham số tính toán	41

Hình 14. Biên dạng cam và đặc điểm động học	44
Hình 15. Ảnh hưởng của số phần tử đến độ chính xác của biên dạng cam: (a) 16 phần tử; (b) 100 phần tử	45
Hình 16. Ảnh của của tham số Penalty ϵ đến độ chính xác của biên dạng cam	46
Hình 17. Ảnh hưởng của tham số μ đến độ chính xác của biên dạng cam	46

DANH MỤC CÁC BẢNG BIỂU

Bảng 1. Các ký hiệu	13
Bảng 2. Thuật toán	39

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐH KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

THÔNG TIN KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

1. Thông tin chung:

Tên đề tài: *Tính toán biên dạng cam dựa vào phương pháp phần tử hữu hạn*

- Mã số: **T2019-B39**

- Chủ nhiệm đề tài: *TS. Nguyễn Thị Thanh Nga*

- Tổ chức chủ trì: Trường Đại học kỹ thuật Công nghiệp

- Thời gian thực hiện: Từ tháng 7 năm 2019 đến tháng 7 năm 2021

2. Mục tiêu:

Dựa trên cơ sở phân tích phần tử hữu hạn của đường cong mô tả biên dạng cam, phương trình mô tả tổng hợp cho việc thiết kế biên dạng cam được thiết lập. Kết hợp với phương trình Penalty, phương trình Lagrange và phương trình ổn định để xác định biên dạng cam một cách tổng quát.

3. Tính mới và sáng tạo:

Đã đề xuất một phương pháp mới cho việc tính toán biên dạng cam

4. Kết quả nghiên cứu:

1. Nghiên cứu tổng quan về cơ cấu cam, các biết thiết kế cơ cấu cam;
2. Nghiên cứu áp dụng lý thuyết phần tử hữu hạn áp dụng tính toán biên dạng cam để dễ dàng xây dựng được phương trình tổng quát trong tính toán thiết kế;
3. Phương pháp Newton-Raphson và tích phân Gauss được áp dụng để giải bài toán phi tuyến;
4. Các tham số thiết kế cũng được đưa ra để chỉ ra ảnh hưởng của chúng đến độ chính xác của biên dạng cam thiết kế;

5. Sản phẩm:

01 bài báo trong danh mục SCIE Q2

Thi Thanh Nga Nguyen, Thang Xuan Duong, and Van Sy Nguyen, Design General Cam Profile Based on Finite Element Method, Appl. Sci. 2021, 11, 6052. <https://doi.org/10.3390/app11136052>.

6. Khả năng áp dụng và phương thức chuyển giao kết quả nghiên cứu:

- Áp dụng cho việc nâng cao chất lượng giảng dạy và học tập các học phần Nguyên lý máy cho ngành Kỹ thuật cơ khí;

- Dùng làm tài liệu tham khảo cho sinh viên, cho thiết kế liên quan đến tính toán thiết kế cơ cấu cam.

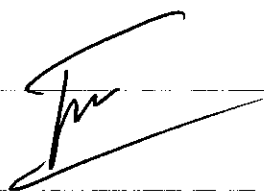
Cơ quan chủ trì

Ngày tháng năm 2021

K.T. HIỆU TRƯỞNG

Chủ nhiệm đề tài

PHÓ HIỆU TRƯỞNG



PGS. TS. Vũ Ngọc Pi

TS. Nguyễn Thị Thanh Nga

INFORMATION ON RESEARCH RESULTS

1. General information:

- Title: *Design General Cam Profile Based on Finite Element Method*

- Code number: T2019-B39

- Group leader: Dr. Nguyen Thi Thanh Nga

- Implementing institution: Thai Nguyen University of Technology

- Duration: from 7/2019 to 7/2021

2. Objective(s):

This project aims to design a cam profile using the finite element method from given displacements of the follower. The arbitrarily complex cam profile is described by Lagrangian finite elements, which are formed by the connectivity of nodes. In order to obtain the desired profile, a penalty-type functional that enforces the prescribed displacement of the follower is proposed. Additionally, in order to ensure convexity of the functional, a numerical stabilization scheme is used. The nodal positions are then obtained by solving a nonlinear system of equations resulting from minimizing the total functional. The geometrical accuracy of the cam profile can be controlled by the number of finite elements.

3. Creativeness and innovativeness:

This project proposed a new method to design cam profile in cam follower systems.

4. Research results:

1. Literature review for cam mechanisms in synthesis and design;
2. Based on finite element method, the general governing equation was established with Penalty, Augmented Lagrange and stabilized functionals;

3. Newton – Raphson and Gauss intergral methods have been applied in this research to solve the problem;
4. Penalty, Augmented Lagrange parameters were been evaluated in order to describe their influence on cam profilie.

5. Products:

01 paper, SCIE Q2

Thi Thanh Nga Nguyen, Thang Xuan Duong, and Van Sy Nguyen,
Design General Cam Profile Based on Finite Element Method,
Appl. Sci. 2021, 11, 6052. <https://doi.org/10.3390/app11136052>.

MỞ ĐẦU

1. Tính cấp thiết của đề tài

Cơ cấu cam được sử dụng rộng rãi trong nhiều loại máy đặc biệt các máy tự động, máy cắt, máy dệt, trong động cơ đốt trong, ... Trong thiết kế cam, với các đặc tính linh hoạt của cơ cấu cam bởi các hình dạng khác nhau của cam tạo nên các chuyển động linh hoạt của cần. Vì vậy cam được áp dụng nhiều trong các loại máy. Trong quá trình thiết kế cơ cấu cam bao gồm nhiều bước. Bước đầu tiên là lựa chọn loại cơ cấu cam. Tiếp theo đó là cấu trúc chuyển động của cần và lựa chọn phương trình toán học cho chuyển động của cần. Các kích thước của cam được đưa ra để đi xác định biên dạng của cam. Các kích thước cam và được chỉ ra trên bản vẽ và được sản xuất. Cuối cùng là hệ thống cơ cấu cam được lắp ráp hoàn chỉnh. Việc tính toán biên dạng cam đã có nhiều nghiên cứu về thiết kế cam đã được đưa ra, phương pháp vẽ đã được thiết lập với nhiều nghiên cứu (Myszka, 2012; Rothbart, 2004; Shigley and Jr., 1980). Để tăng độ chính xác thì phương pháp phân tích bằng việc sử dụng tọa độ đề các và tọa độ cực bởi (Myszka, 2012, Faxin and Xianzhang, 2011, Shala and Likaj, 2013 and Qian, 2007). Việc thiết kế biên dạng cam của cam cần đẩy đẩy con lăn sử dụng phương pháp đường bao (Y., 1982). Tuy nhiên các phương pháp này chỉ đưa ra tính toán của một vài biên dạng cam cơ bản. Vì vậy, trong nghiên cứu này, tác giả muốn đưa ra một phương pháp tổng quát có thể xác định biên dạng cam cho biên dạng cam bất kỳ khi tính toán thiết kế.

2. Mục tiêu nghiên cứu

Dựa trên cơ sở phân tích phân tử hữu hạn của đường cong mô tả biên dạng cam, phương trình mô tả tổng hợp cho việc thiết kế biên dạng cam được thiết

lập. Kết hợp với phương trình Penalty, phương trình Lagrange và phương trình ổn định, phương trình tổng quát cho thiết kế biên dạng cam hoàn toàn được xác lập một cách nhanh chóng và hiệu quả.

3. Nội dung nghiên cứu

- Thiết lập phương trình mô tả biên dạng cam dựa vào phương trình Penalty, Lagrange và ổn định;
- Phương pháp phân tử hữu hạn được áp dụng để xây dựng biên dạng cam.

4. Kết quả nghiên cứu

- Nghiên cứu tổng quan về cơ cấu cam, các biết thiết kế cơ cấu cam;
- Nghiên cứu áp dụng lý thuyết phân tử hữu hạn áp dụng tính toán biên dạng cam để dễ dàng xây dựng được phương trình tổng quát trong tính toán thiết kế;
- Phương pháp Newton-Raphson và tích phân Gauss được áp dụng để giải bài toán phi tuyến;
- Các tham số thiết kế cũng được đưa ra để chỉ ra ảnh hưởng của chúng đến độ chính xác của biên dạng cam thiết kế;

5. Cấu trúc của đề tài

Cấu trúc của đề tài gồm: Chương 1 trình bày tổng quan về cơ cấu cam và tính toán thiết kế cơ cấu cam. Chương 2 là tính toán biên dạng cam dựa vào phương pháp phân tử hữu hạn. Trong chương này trình bày phương trình tổng quát cho biên dạng cam được thiết kế, các phương trình Penalty, Lagrange và phương trình ổn định được thiết lập để thiết kế biên dạng cam. Tiếp theo là chương 3 trình bày một số kết quả của thiết kế cơ cấu cam cần đây đây bằng. Trong chương này các tham số ảnh hưởng đến độ chính xác

của cam cũng được đề cập đến. Cuối cùng, chương 4 sẽ ghi lại những kết luận đã làm được trong đề tài này.

CHƯƠNG I

NGHIÊN CỨU TỔNG QUAN VỀ THIẾT KẾ CƠ CẤU CAM

1.1. Giới thiệu về cơ cấu cam

Cơ cấu cam được sử dụng rộng rãi trong nhiều loại máy như sử dụng cho việc đóng mở súp páp của động cơ đốt trong, sử dụng trong nhiều loại máy gia công cơ khí. So sánh với cơ cấu dạng thanh, cơ cấu cam dễ thiết kế khi cho yêu cầu cụ thể của yêu cầu đầu ra; tuy nhiên cơ cấu cam khó chế tạo hơn so với cơ cấu dạng thanh.

Chương này sẽ đề cập đến các khái niệm cơ bản về cơ cấu cam. Các loại cơ cấu cam và những cơ cấu cam thông dụng thường dùng trong các hệ thống cơ khí.

Bảng 1. Các ký hiệu

t	Thời gian (s)
θ	Góc quay trục cam ($^{\circ}$ hoặc rad)
ω	Vận tốc góc của trục cam (rad/s)
β	Góc quay ở một giai đoạn của cam (đi xa, đứng xa, về gần hoặc đứng gần)
L	Hành trình của cần (chiều dài)
$S(y)$	Chuyển vị của cần (chiều dài)
$V(y')$	Vận tốc của cần (chiều dài/rad)
$v(y)$	Vận tốc dài của cần (chiều dài/s)
$A(y'')$	Vận tốc của cần (chiều dài/rad ²)
$a(\ddot{y})$	Gia tốc dài của cần (chiều dài/s ²)
$J(y''')$	Xung (chiều dài/rad ³)
R_b	Bán kính vòng tròn cơ sở thực (chiều dài)

R_p	Bán kính vòng tròn cơ sở lý thuyết (chiều dài)
R_f	Bán kính con lăn (chiều dài)
ϵ	Tâm sai (chiều dài)
ρ	Bán kính cong của bề mặt cam thực (chiều dài)
ρ_p	Bán kính cong của bề mặt cam lý thuyết (chiều dài)

1.2. Các khái niệm cơ bản về cơ cấu cam

1.2.1. Khái niệm và phân loại

Khái niệm cơ cấu cam

Cơ cấu cam là một cơ cấu trong đó khâu bị dẫn (được gọi là cần) nối với khâu dẫn (cam) bằng khớp cao và chuyển động qua lại theo quy luật do hình dạng của bề mặt tiếp xúc trên khâu dẫn quyết định.

Cơ cấu cam có thể được phân loại theo nhiều cách như: theo chuyển động của cần, theo hình dạng của cam, phân loại theo dạng đáy cần, cam chính tâm và lệch tâm.

Phân loại theo chuyển động của cần

Tùy thuộc vào chuyển động của cần: cần chuyển động tịnh tiến (Hình 1.1a, b, d; Hình 1.2a, b), cần chuyển động quay hay lắc (Hình 1.1c; Hình 1.2c, d).

Phân loại theo hình dạng của cam

Tùy theo hình dạng của cam, trên Hình 1.1 phân ra 4 loại cam như sau:

- Cam phẳng hay còn gọi là cam đĩa (Hình 1.1a).
- Cam tịnh tiến (Hình 1.1b).
- Cam thùng (Hình 1.1c).
- Cam mặt (Hình 1.1d).

Trong các loại cam nêu trên hình Hình 1.1a thì cam cam đĩa được dùng phổ biến nhất, còn cam tịnh tiến hiếm khi được sử dụng bởi vì đầu vào thường sử dụng dạng chuyển động quay liên tục.

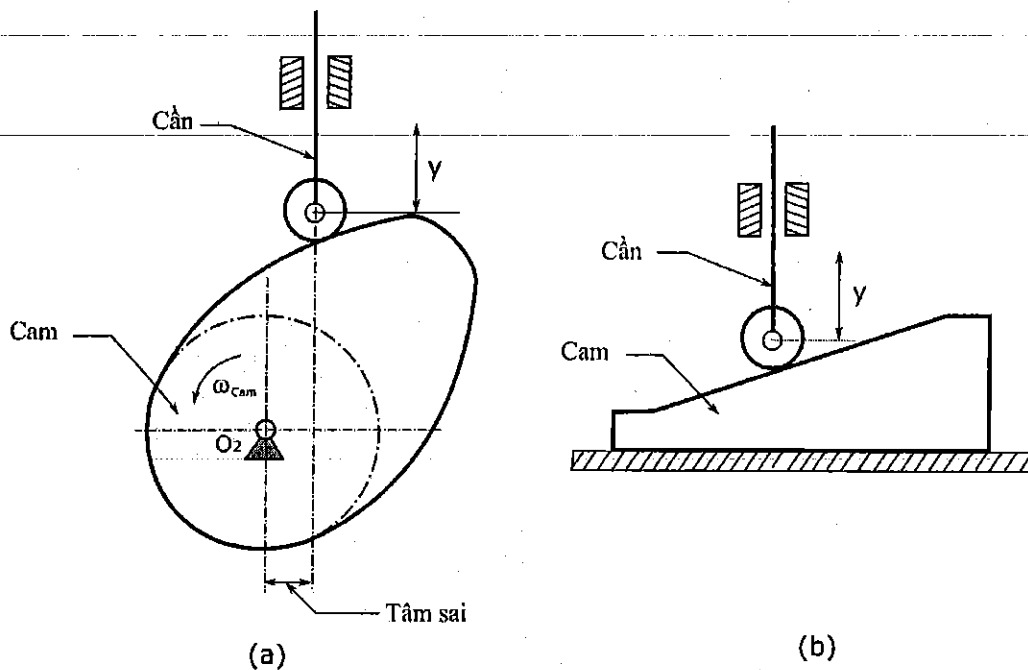
Theo hình dạng đáy cần

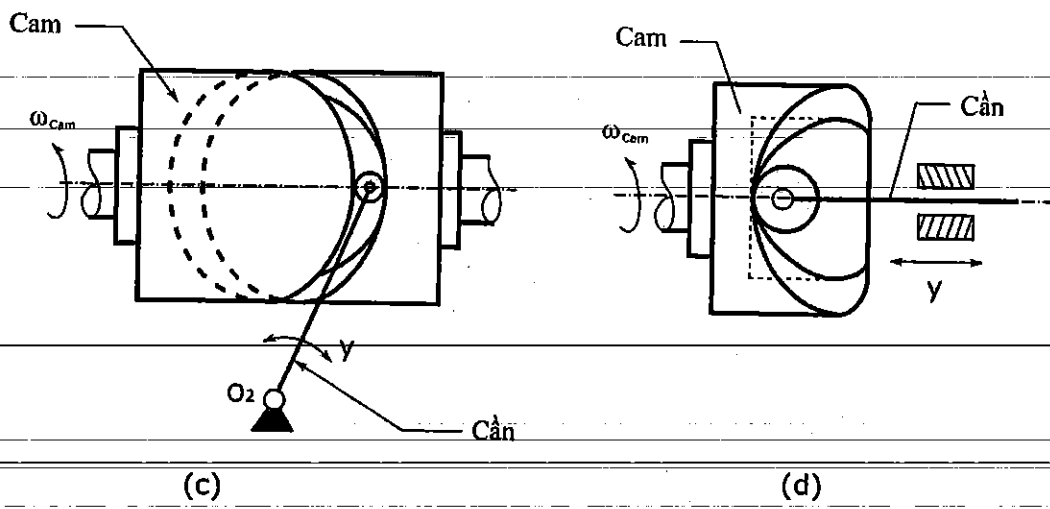
Trên hình Hình 1.2 chỉ ra các loại hình dạng đáy cần như sau:

- Cần đáy nhọn (Hình 1.2a).
- Cần đáy bằng (Hình 1.2b).
- Cần đáy con lăn (Hình 1.2c).
- Cần đáy cong (Hình 1.2d).

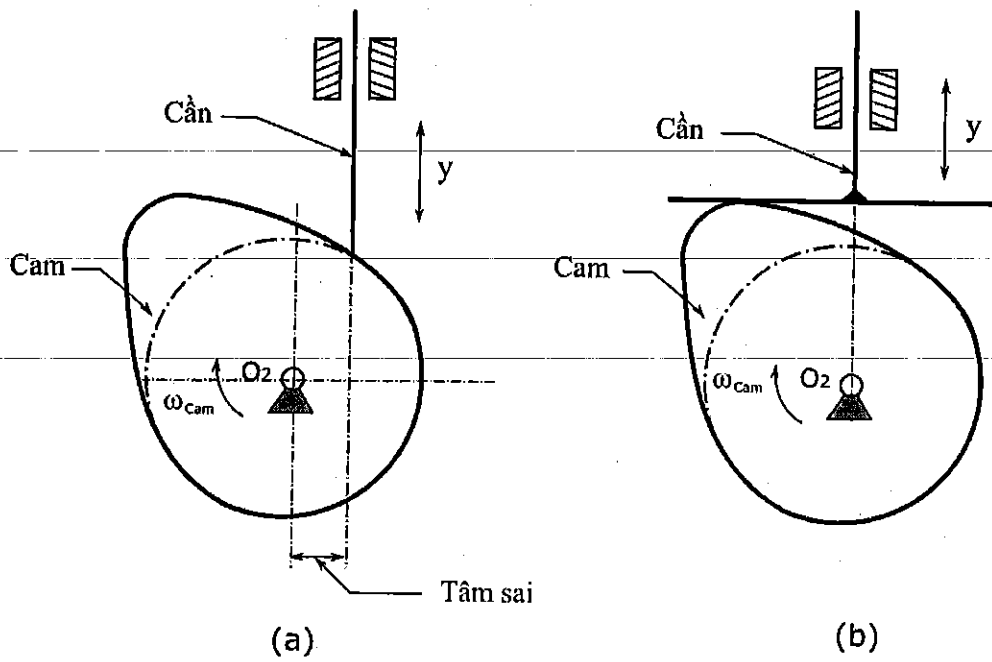
Loại cam: Cam chính tâm (Hình 1.2b), cam lệch tâm (Hình 1.2a).

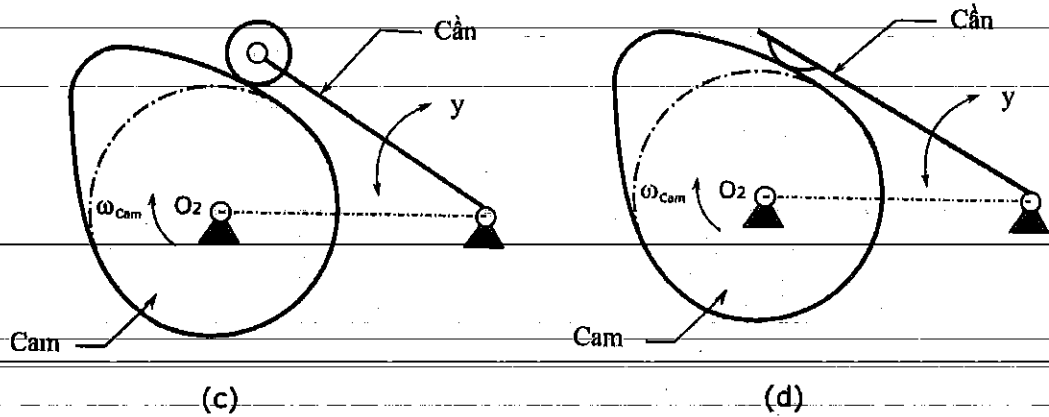
Trong quá trình làm việc của cơ cấu cam phải luôn đảm bảo rằng cam và cần luôn tiếp xúc với nhau. Điều này có thể được thực hiện bởi phụ thuộc và trọng lượng, hoặc sử dụng lực lò xo, hoặc là được ràng buộc bởi kết cấu. Chẳng hạn như Hình 1.1c sự tiếp xúc liên tục của cam và cần được thực hiện nhờ vào kết cấu của rãnh cam; hoặc kết cấu của cần như Hình 1.3c. Một cách khác để luôn giữ tiếp xúc giữa cam và cần là sử dụng cam đều cỡ như Hình 1.3a.





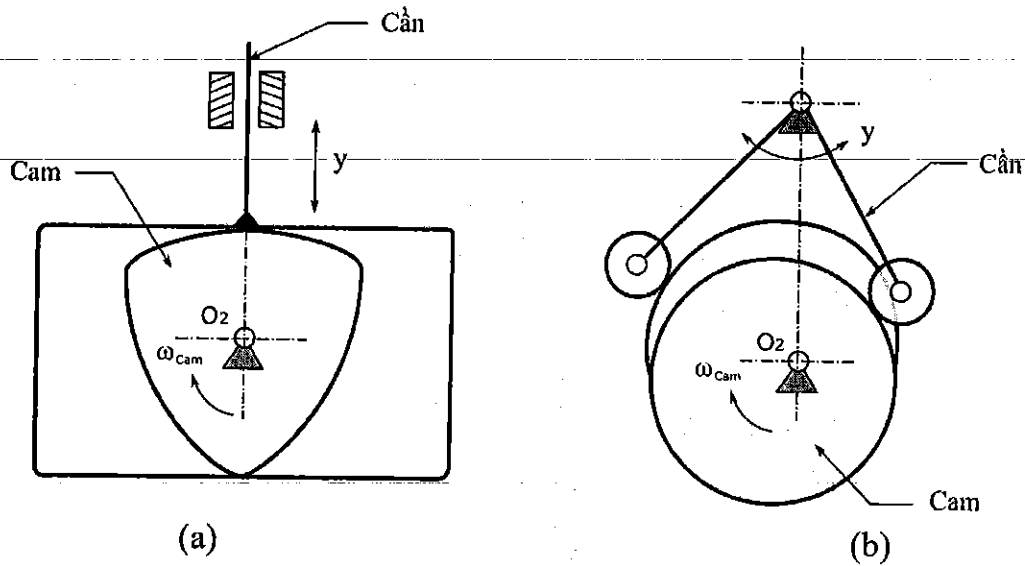
Hình 1. (a) Cam đĩa; (b) Cam tịnh tiến;
(c) Cam thùng; (d) Cam mặt.





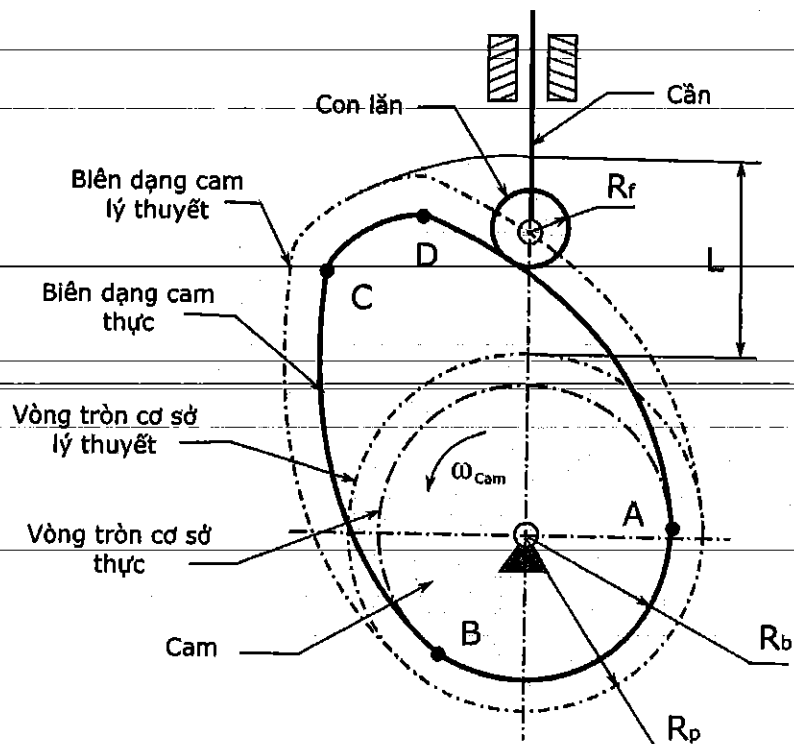
Hình 2. Cam đĩa với:

- (a) Cam lệch tâm và cần đáy nhọn;
- (b) Cam chính tâm và cần đáy bằng;
- (c) Cam cần lắc đáy con lăn;
- (d) Cam cần lắc đáy cong.



Hình 3. Các kiểu ràng buộc tiếp xúc của cam và cần

1.2.2. Các khái niệm cơ bản của cơ cấu cam



Hình 4. Cơ cấu cam cần đẩy, đáy con lăn

Giả sử xét cơ cấu cam cần đẩy, đáy con lăn như trên Hình 1.4:

- Biên dạng cam thực và biên dạng cam lý thuyết (quỹ đạo đường tâm con lăn) được chỉ ra trên Hình 1.4.
- Vòng tròn cơ sở thực (R_b): vòng tròn nhỏ nhất tiếp tuyến với cung R_{\min} của biên dạng cam thực.
- Vòng tròn cơ sở lý thuyết (R_p): vòng tròn nhỏ nhất tiếp tuyến với cung R_{\min} của biên dạng cam lý thuyết.

Một số giai đoạn chuyển động của cần:

- Giai đoạn dừng (dwell): là giai đoạn mà không có chuyển động của đầu cần hay cam quay nhưng cần đứng yên. Nếu giai đoạn dừng ở gần tâm cam gọi là giai đoạn đứng gần (đoạn AB trên Hình 1.4); còn nếu giai đoạn dừng ở xa tâm cam gọi là giai đoạn đứng xa (đoạn CD trên Hình 1.4).
- Giai đoạn đi xa (rise): là giai đoạn cần chuyển động dần dần xa tâm cam (đoạn CB trên Hình 1.4).

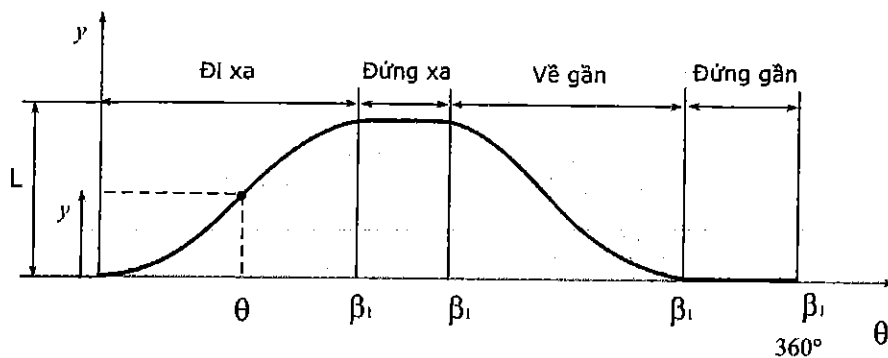
- Giai đoạn về gần (return or fall): là giai đoạn cần chuyển động về gần tâm cam (đoạn AD trên Hình 1.4).

Tùy thuộc vào yêu cầu làm việc của hệ thống, chuyển động của cơ cấu cam có thể có hai giai đoạn đi xa - về gần; có thể có ba giai đoạn như đi xa - về gần - dừng; hoặc có bốn giai đoạn như đi xa - đứng xa - về gần - đứng gần; hoặc có nhiều hơn bốn giai đoạn là sự kết hợp của các giai đoạn trên tùy thuộc vào yêu cầu thiết kế.

Chuyển vị của cần (displacement diagram)

Thông thường hệ thống sử dụng cơ cấu cam có một bậc tự do. Thường dẫn động cho trục cam quay với vận tốc góc không đổi để tạo ra chuyển động mong muốn của cần. Khi cam qua hết một vòng thì cần sẽ vạch lên một quỹ đạo là mối quan hệ góc quay của cam $\theta(t)$ và chuyển vị của cần y và được gọi là chuyển vị của cần. Trên Hình 1.5 chỉ ra chuyển vị của cần cho cơ cấu cam với cần chuyển động tịnh tiến gồm bốn giai đoạn: đi xa - đứng xa - về gần - đứng gần. Giá trị lớn nhất của chuyển vị cần trong giai đoạn đi xa được gọi là hành trình của cần (L) như chỉ ra trên Hình 1.4 và Hình 1.5.

Các góc quay của cam ứng với các giai đoạn chuyển động của cần được gọi là các góc định kỳ, ký hiệu là β_i . Trên Hình 1.5 các góc định kỳ $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ tương ứng với 4 giai đoạn chuyển động của cần: đi xa, đứng xa, về gần và đứng gần.

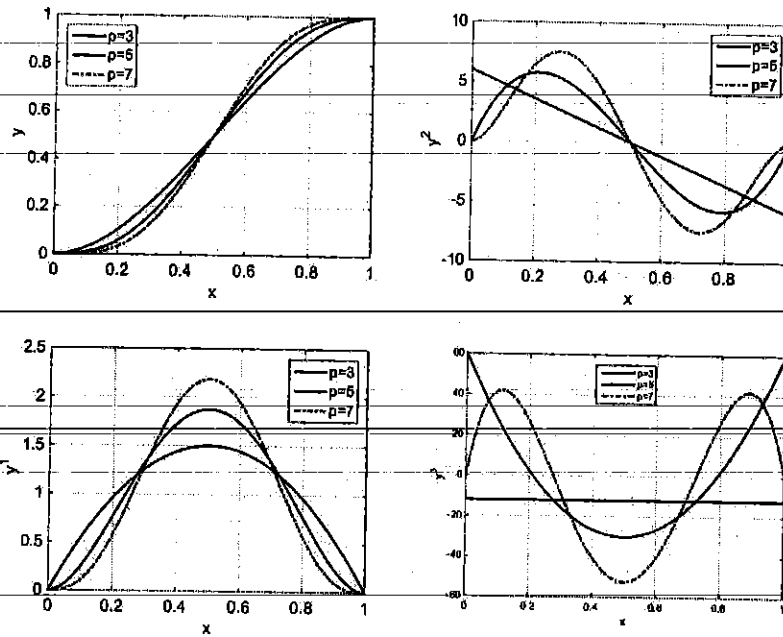


Hình 5. Chuyển vị của cần

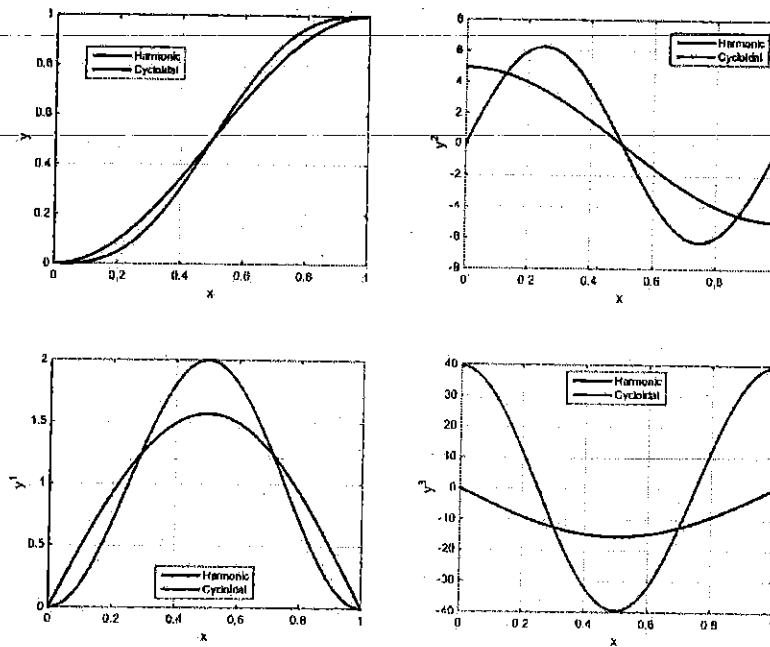
1.2. Tổng quan về thiết kế cam

1.2.1. Các hàm toán học cơ bản mô tả chuyển động của cần

Phương trình chuyển vị của cần quyết định rất nhiều đến động học và động lực học của cam được thiết kế. Có nhiều nghiên cứu đã đưa ra các phương trình toán học cơ bản cho chuyển vị của cần như hàm đa thức, hàm điều hòa, hàm cycloid [1–3]. Hàm đa thức được sử dụng rộng rãi trong thiết kế. Nhiều nghiên cứu sử dụng hàm đa thức bậc $p = 3$, $p = 5$ và $p = 7$ mô tả chuyển động của cần [1,2,4,5]. Với hàm đa thức bậc 3 phải thỏa mãn 4 điều kiện biên, với hàm bậc 5 thì 6 điều kiện biên và hàm đa thức bậc 7 thỏa mãn 8 điều kiện biên. Hình 6 mô tả đồ thị chuyển vị, vận tốc, gia tốc và xung của cần sử dụng hàm đa thức bậc 3, 5 và bậc 7. Nhiều nghiên cứu sử dụng hàm đa thức để thiết kế tối ưu động học cơ cấu cam [6–8]. Hàm lượng giác cũng được sử dụng cho thiết kế cam [9–13]. Đối với hàm điều hòa có nhược điểm là đường cong mô tả gia tốc không liên tục ở điểm đầu và điểm cuối. Do đó, đường cong xung sẽ nhận giá trị vô cùng tại hai vị trí này. Điều này không mong muốn trong thiết kế cam. Hình 7 mô tả đường cong chuyển vị, vận tốc, gia tốc và xung của cần sử dụng hàm điều hòa và hàm cycloid.

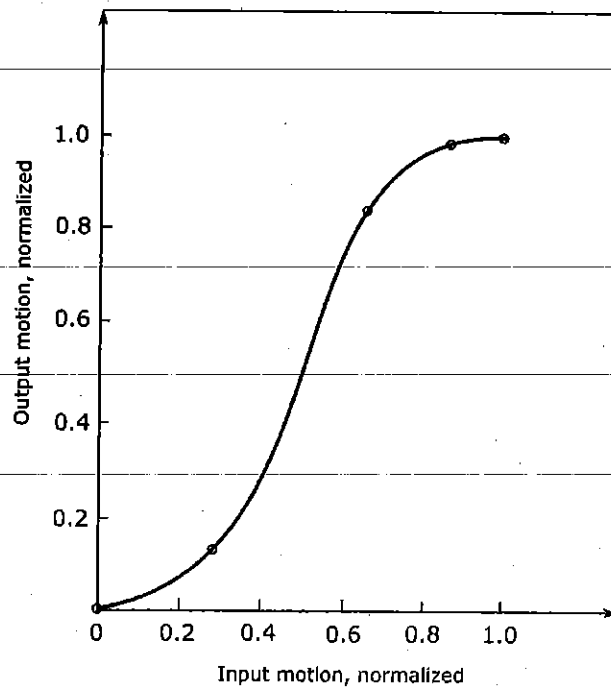


Hình 6. Hàm đa thức bậc 3, 5 và bậc 7 mô tả chuyển động của cần giai đoạn đi xa: chuyển vị, vận tốc, gia tốc và xung



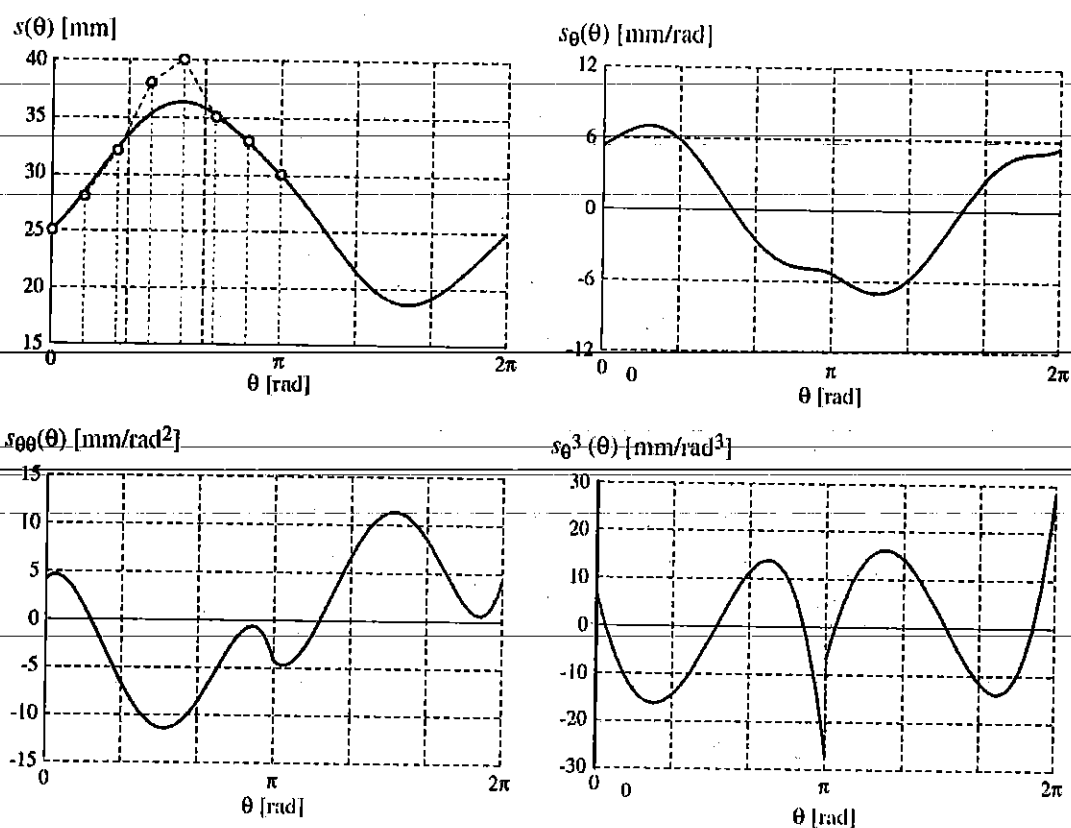
Hình 7. Hàm điều hòa và cycloid mô tả chuyển động của cần giai đoạn đi xa: chuyển vị, vận tốc, gia tốc và xung

Hàm piecewise polynomial cũng được sử dụng để mô tả chuyển động của cần. Trong những thập kỷ gần đây, hàm này được sử dụng để tổng hợp cơ cấu cam [14]. Hàm piecewise polynomial bậc 3 được sử dụng để thiết kế cam thảo mãn 5 điều kiện biên của đường cong chuyển vị (Hình 8). Nhiều nghiên cứu trình bày phương pháp tổng hợp cơ cấu cam sử dụng hàm piecewise polynomial [15–20]. Đặc điểm của hàm này là có thể thỏa mãn được vô số điều kiện biên. Tuy nhiên, trong tính toán thiết kế cần để ý đến giao điểm giữa hai đoạn trong hàm này bởi nếu không sẽ xảy ra sự không liên tục của vận tốc, gia tốc và xung trong quá trình thiết kế.



Hình 8. Hàm piecewise polynomial thảo mãn 5 điều kiện biên của đường cong biểu thị chuyển vị của cần

Hàm splines cũng được sử dụng rộng rãi trong những năm gần đây như : hàm Bezier, hàm B-spline và hàm NURBS. Cho đến nay có một số nghiên cứu ứng dụng hàm toán học Bezier cho việc tổng hợp cơ cấu cam [21–23]. Hình 9 mô tả chuyển động của cần sử dụng hàm Bezier với 8 điều kiện biên của đường cong chuyển vị.



Hình 9. Hàm Bezier mô tả chuyển động của cần [23]

Ngày nay hàm B-spline và NURBS được sử dụng rất nhiều trong thiết kế cam bởi tính linh hoạt của loại hàm này là không hạn chế số điều kiện biên mà vẫn đảm bảo được các hàm vận tốc, gia tốc và xung liên tục. Nhiều nghiên cứu đã ứng dụng các loại hàm này để tính toán thiết kế, tính toán tối ưu biên dạng cam [24–31].

1.2.2. Thiết kế biên dạng cam

Thiết kế biên dạng cam là một trong những bước quan trọng cho quá trình thiết kế cơ cấu cam. Biên dạng cam không chỉ thỏa mãn đặc điểm động học mà còn phải thỏa mãn đặc điểm lực học. Sau khi bước chọn hàm toán học mô tả chuyển động của cần và các đường cong vận tốc, gia tốc và xung phải thỏa mãn là liên tục trong quá trình chuyển động của cam. Việc tính toán

biên dạng cam được sử dụng phương pháp vẽ [1,2,32]. Phương pháp này có nhược điểm là kém chính xác bởi biên dạng cam được xác định khi chia các giai đoạn chuyển động của cam trong quá trình chuyển động và phụ thuộc vào khoảng chia.

Để tăng độ chính xác của biên dạng cam thì phương pháp giải tích sử dụng hệ tọa độ để các để biểu diễn biên dạng cam [33,34]. Phương pháp giải tích vẫn tiếp tục được đề cập đến nhưng sử dụng phương trình chuỗi động kín để tính toán cho biên dạng của cam cần đẩy đẩy con lăn [1,35]. Shala, R., Likaj và đồng nghiệp [3,7,34] trình bày phương pháp đường bao cho thiết kế biên dạng cam cho cam cần đẩy đẩy con lăn. Một số nghiên cứu khác xấp xỉ số để xác định biên dạng của cam [5,36,37].

Như vậy có thể thấy rằng mỗi phương pháp được trình bày ở trên của các nghiên cứu trước chỉ có thể áp dụng cho một loại cam và chưa mang tính thống nhất. Chính vì điều này, trong nghiên cứu này tác giả đề cập đến một phương pháp có thể thiết kế biên dạng cam đó là phương pháp phần tử hữu hạn. Với nghiên cứu này chứa đựng những tính mới sau:

- Hàm penalty được thiết lập để đảm bảo điều kiện của hàm chuyển vị;
- Hàm ổn định được đưa vào nhằm đảm bảo biên dạng cam luôn thỏa mãn bán kính cong tại mỗi thời điểm trên biên dạng của cam;
- Phương pháp Newton – Raphson được sử dụng để tìm ra biên dạng của cam;
- Độ chính xác biên dạng của cam tăng khi tăng số phần tử.

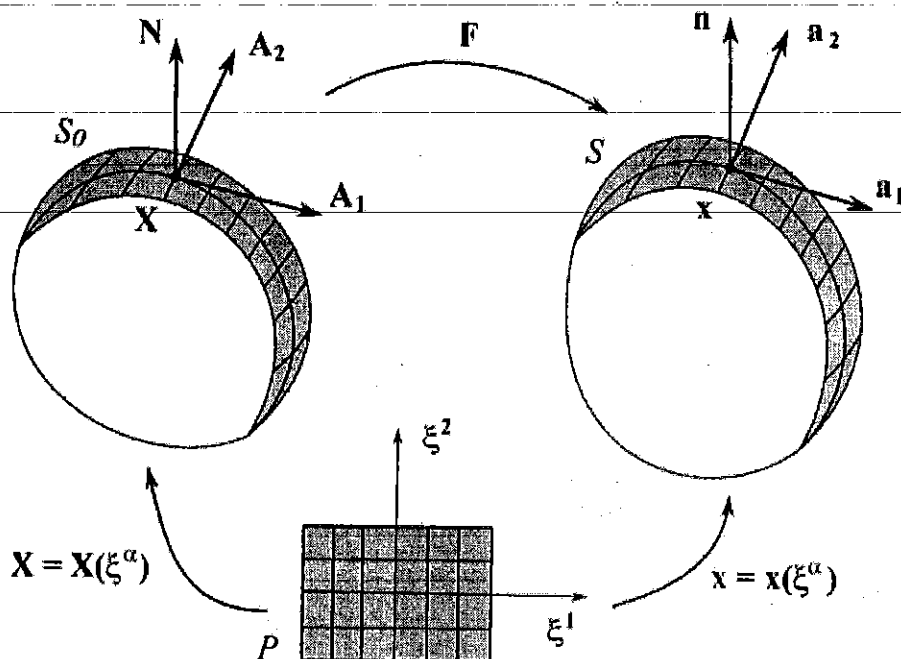
CHƯƠNG 2.

THIẾT KẾ BIÊN DẠNG CAM DỰA VÀO PHƯƠNG PHÁP PHÂN TỬ HỮU HẠN

2.1. Phương trình toán học mô tả biên dạng của cam

Trong phần này, biên dạng cam được biểu diễn thông qua hệ tọa độ curvilinear [38]. Bề mặt của cam được ký hiệu S (Hình 10) được áp dụng cho mọi biên dạng của cam. Phương trình biểu diễn biên dạng của cam được biết dưới dạng

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi), \quad (1)$$



Hình 10. Biểu diễn biên dạng cam thông qua hệ tọa độ curvilinear

Trong phương trình (1), $\xi (\xi^1, \xi^2)$ được biểu diễn cho hệ tọa độ curvilinear. Véc tơ tiếp tuyến $\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{a}^\alpha$ tại điểm x trên bề mặt cam S được biểu diễn như sau:

$$\mathbf{a}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^\alpha} \quad (2)$$

Và

$$\mathbf{a}^\alpha := a^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta \quad (3)$$

Với

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta} &:= \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta \\ a^{\alpha\beta} &:= [a_{\alpha\beta}]^{-1} \end{aligned} \quad (4)$$

là thành phần của tensor trong hệ tọa độ curvilinear.

Với $\alpha = 1, 2$, là chỉ số. Véc tơ pháp tuyến \mathbf{n} tại x được xác định như sau:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|} \quad (5)$$

Và có thể biểu diễn:

$$\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\| = \sqrt{\det a_{\alpha\beta}} \quad (6)$$

Bán kính cong của biên dạng cam được biểu diễn dưới dạng [38]

$$\mathbf{b} = b_{\alpha\beta} \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta, \quad (7)$$

Với

$$b_{\alpha\beta} := n \cdot a_{\alpha,\beta}. \quad (8)$$

2.2. Phương pháp

Để tính toán biên dạng cam mong muốn, hình dạng bất kỳ ban đầu của cam được đưa ra. Biên dạng cam ban đầu được biến dạng để tạo thành biên dạng cam mong muốn dưới các điều kiện ràng buộc. Sự sai khác giữa biên dạng cam ban đầu và biên dạng cam thiết kế được chỉ ra trên Hình 10. Các biên dạng này được biểu diễn thông qua hệ tọa độ curvilinear. Với các ký hiệu chữ in hoa như: X , A_α , $A_{\alpha\beta}$, A^α và N biểu diễn cho biên dạng tham chiếu. Tương tự với các ký hiệu chữ thường như: x , a_α , $a_{\alpha\beta}$, a^α và n biểu diễn cho biên dạng cam hiện hành. Để mô tả sự biến dạng của biên dạng cam tham chiếu và biên dạng cam hiện tạo. một phần tử trên biên dạng cam hiện hành S được đưa ra như sau:

$$dx = a_\alpha d\xi^\alpha \quad (9)$$

Tương tự $dX = A_\alpha d\xi^\alpha$. Vì vậy có thể viết $d\xi^\alpha = A^\alpha \cdot dX$ và dx nằm trên biên dạng cam hiện hành như sau:

$$dx = (a_\alpha \otimes A^\alpha) dX. \quad (10)$$

Ở đây, tensor F là tensor đặc trưng cho biến dạng từ $X \rightarrow x$

$$F = a_\alpha \otimes A^\alpha, \quad (11)$$

Tương tự, F^{-1} có thể viết:

$$F^{-1} = A_\alpha \otimes a^\alpha, \quad (12)$$

Hay

$$\begin{aligned} a_\alpha &= F A_\alpha, & A_\alpha &= F^{-1} a_\alpha \\ a^\alpha &= F^{-T} A^\alpha, & A^\alpha &= F^T a^\alpha \end{aligned} \quad (13)$$

Hệ số biến dạng giữa hai biên dạng cam S_0 and S được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned} J_A &= \sqrt{\det A_{\alpha\beta}} \\ J_a &= \sqrt{\det a_{\alpha\beta}} \\ J &= \frac{J_a}{J_A} \end{aligned} \quad (14)$$

2.3. Phương trình tổng hợp biên dạng cam

Trong phần này, phương trình tổng hợp cho việc thiết kế biên dạng cam được đưa ra.

2.3.1. Điều kiện thiết kế cam

Phương trình tổng hợp cho thiết kế biên dạng cam được viết như sau:

$$g := s - s_0 = 0, \quad \forall x \in S, \quad (15)$$

Với các điều kiện:

$$x = \bar{x}, \quad \forall x \in \Gamma_u, \quad (16)$$

Ở đây, s_0 và s mô tả phương trình chuyển vị của cần cho biên dạng cam tham chiếu và biên dạng cam hiện hành. Từ phương trình (15), Biến phân của δg được viết dưới dạng:

$$\delta g = \delta s - \delta s_0, \quad (17)$$

Với

$$\delta s = \frac{\partial s}{\partial x} \cdot \delta x, \quad \delta s_0 = \frac{\partial s_0}{\partial x} \cdot \delta x \quad (18)$$

Phương trình (15) và (16) chưa đủ điều kiện để hình thành biên dạng cam bởi vẫn còn thiếu điều kiện ổn định để hình thành biên dạng cam. Vì vậy cần phải thêm điều kiện ổn cho tính toán biên dạng cam và sẽ được thảo luận trong phần 3.3.4.

2.3.2. Phương trình Penalty

Áp dụng phương pháp Penalty, phương trình (15) được viết dưới dạng sau:

$$\Pi_p = \int_{s_0} \frac{\epsilon}{2} g^2 dA_0, \quad (19)$$

Với là ϵ tham số Penalty. Biến phân của hàm Penalty được xác định:

$$\delta \Pi_p = \int_{s_0} \lambda \delta g dA_0, \quad (20)$$

Ở đây

$$\lambda = \epsilon g, \quad (21)$$

λ được hiểu là tham số cưỡng bức của g .

Có thể thấy rằng phương trình (19) thực thi chính xác cho điều kiện trong phương trình (15) tại các điểm giới hạn, chẳng hạn, $\epsilon = \infty$. Tại $\epsilon = 0$, Π_p không ảnh hưởng đến hệ thống.

2.3.3. Phương trình Augmented Lagrange

Để đạt được độ chính xác của biên dạng cam với giá trị ϵ lớn, phương pháp Augmented Lagrange được sử dụng. Theo phương trình (21), tham số λ được sử dụng cho quá trình lặp. Do đó, ta có:

$$\Pi_p = \int_{S_0} \left(\lambda g + \frac{\epsilon}{2} g^2 \right) dA_0 \quad (22)$$

Với λ là một số luôn dương. Biến phân của hàm này được viết:

$$\delta \Pi_p = \int_{S_0} (\lambda + \epsilon g) \delta g dA_0. \quad (23)$$

Từ phương trình (23), tham số mới được cập nhật cho phương trình (20) đó là:

$$\lambda_{new} = \epsilon g + \lambda_{old} \quad (24)$$

2.3.4. Phương trình ổn định tổng quát

Như đã trình bày ở trên, hệ thống không ổn định và không thể giải ra nghiệm duy nhất bằng phương pháp phần tử hữu hạn. Vì vậy, cần thiết phải đưa thêm yếu tố ổn định vào hệ thống. Phương trình ổn định được biểu diễn như sau [39]

$$\Pi_{stab} := \int_{S_0} \frac{\mu}{2} (I_1 - 2 \ln J) dA_0 ; I_1 := A^{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}, \quad (25)$$

Với μ là tham số đã biết. Biến phân của Π_{stab} được xác định như sau:

Biến phân của Π_{stab} :

$$\delta \Pi_{stab} := \frac{\mu}{2} \int_{S_0} \tau \delta a_{\alpha\beta} dA_0, \quad (26)$$

Với $\tau = A^{\alpha\beta} - a^{\alpha\beta}$.

2.3.5. Phương trình tổng quát

Biên dạng của cam được xác định khi cực tiểu hóa hàm sau:

$$\Pi = \Pi_p + \Pi_{stab}. \quad (27)$$

I.e.,

$$\delta \Pi = \delta \Pi_p + \delta \Pi_{stab}. \quad (28)$$

2.3.6. Tuyến tính hóa phương trình tổng quát

Tuyến tính phương trình tổng quát là rất cần thiết cho việc tính toán các ma trận tiếp. Tuyến tính phương trình (28) có thể viết như sau:

$$\Delta \delta \Pi_p = \int_{S_0} \epsilon (\Delta g \delta g + g \Delta \delta g) dA_0 \quad (29)$$

Ở đây $\Delta \delta g$ được biểu diễn dưới dạng:

$$\Delta \delta g = \Delta \delta s - \Delta \delta s_0. \quad (30)$$

2.3.7. Tuyến tính hóa phương trình ổn định

Từ phương trình (26), tuyến tính phương trình ổn định được xác định như sau:

$$\Delta \delta \Pi_{stab} = \mu \int_{S_0} (-\Delta a^{\alpha\beta} \delta a_{\alpha\beta} + \tau \Delta \delta a_{\alpha\beta}) dA_0. \quad (31)$$

2.4. Áp dụng phân tử hữu hạn

Phương trình (28) được giải bởi việc sử dụng phương pháp phân tử hữu hạn. Biên dạng cam tham chiếu S_0 được chia thành nhiều phần tử Ω_e và được

định nghĩa bởi các nốt x_e tương ứng với các phần tử Lagrangian được biểu diễn trên Hình 11.

2.4.1. Các thành phần của biên dạng cam biểu diễn bằng phần tử hữu hạn

Phương trình biểu diễn biên dạng của cam bằng phương pháp phần tử hữu hạn được định nghĩa như sau:

$$x \approx x^h = \sum_{e=1}^n N x_e \quad (32)$$

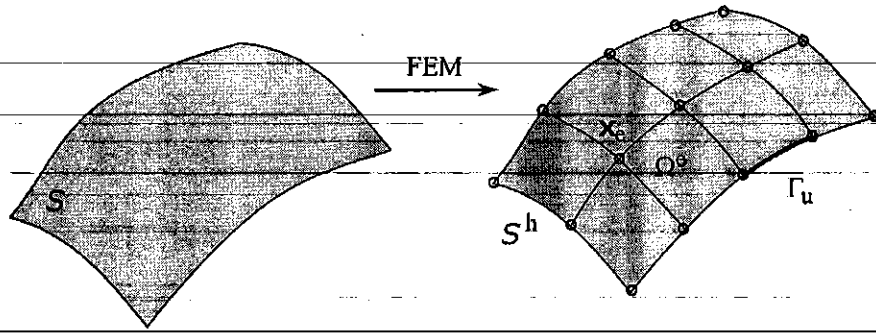
Ở đây, $N = N(\xi^\alpha)$ và n là hàm dạng và số nốt. Bằng việc sử dụng ký hiệu ngắn, phương trình (32) và (2) được viết lại:

$$x \approx x^h = N x_e \quad (33)$$

$$a_\alpha = N_{,\xi^\alpha} x_e \quad (34)$$

Với $N_{,\xi^\alpha} = \partial N / \partial \xi^\alpha$.

Để viết phương trình tổng quát dưới dạng phần tử hữu hạn, biến phân của các véc tơ tiếp tuyến a_α , véc tơ vị trí của nốt x và véc tơ pháp tuyến được n tính như sau:



Hình 11. Chia phần tử trên bề mặt cam

Biến phân của véc tơ tiếp tuyến và véc tơ vị trí:

$$\delta \mathbf{a}_\alpha = N_{,\xi^\alpha} \delta \mathbf{x}_e \quad (35)$$

$$\delta \mathbf{x} = N \delta \mathbf{x}_e. \quad (36)$$

Biến phân của véc tơ pháp tuyến được tính theo [40]

$$\delta \mathbf{n} = \mathbf{R}_A \delta \mathbf{a}_\alpha, \quad (37)$$

Với

$$\mathbf{R}_A = -(\mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{n}). \quad (38)$$

Tuyến tính hóa véc tơ pháp tuyến \mathbf{n} , ta được:

$$\Delta \delta \mathbf{n} = (-\Delta \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{n}) \delta \mathbf{a}_\alpha - (\mathbf{a}^\alpha \otimes \Delta \mathbf{n}) \delta \mathbf{a}_\alpha, \quad (39)$$

Ở đây, $\Delta \mathbf{a}^\alpha$ được xác định như sau [39]

$$\Delta \mathbf{a}^\alpha = \mathbf{B} \Delta \mathbf{a}_\alpha, \quad (40)$$

Với $\mathbf{B} = \mathbf{a}^{\alpha\beta} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\alpha$,

$\Delta \mathbf{a}_1$ được tính tương tự $\delta \mathbf{a}_1$ từ phương trình (35). Biến phân của J được xác định theo [38]

$$\delta J = J a^\alpha \cdot \delta a_\alpha. \quad (41)$$

Biến phân và tuyến tính hóa của $a_{\alpha\beta}$ và $a^{\alpha\beta}$ được tính như sau:

$$\delta a_{\alpha\beta} = a_\alpha \cdot \delta a_\beta + \delta a_\alpha \cdot a_\beta, \quad (42)$$

$$\delta a^{\alpha\beta} = a^\alpha \cdot \delta a^\beta + \delta a^\alpha \cdot a^\beta, \quad (43)$$

$$\Delta \delta a_{\alpha\beta} = \Delta a_\alpha \cdot \delta a_\beta + \delta a_\alpha \cdot \Delta a_\beta. \quad (44)$$

2.4.2. Phương trình tổng quát dưới dạng phần tử hữu hạn

Phương trình (20) được biểu diễn bằng phần tử hữu hạn như sau:

$$\delta \Pi_p \approx \delta \Pi_p^h = \delta x_e^T \sum_{el=1}^{nel} f_p^e, \quad (45)$$

Với

$$f_p^e = \int_{\Omega_0^e} g_p dA_e. \quad (46)$$

Tuyến tính phương trình (45) được:

$$\Delta \delta \Pi_p^e = \delta x_e^T k_p \Delta x_e, \quad (47)$$

Với k_p là ma trận tiếp. Nó được biểu diễn dưới dạng:

$$k_p = \sum_{el=1}^{nel} k_p^e. \quad (48)$$

2.4.3. Phương trình ổn định biểu diễn bằng phần tử hữu hạn

Một cách tương tự, phương trình (26) được biểu diễn bằng phần tử hữu hạn như sau:

$$\delta \Pi_{stab} \approx \delta \Pi_{stab}^h = \delta \mathbf{x}_e^T \sum_{el=1}^{nel} \mathbf{f}_{stab}^e, \quad (49)$$

Đặt

$$\mathbf{f}_{stab}^e := \int_{\Omega_0^e} \mathbf{g}_{stab} dA_e. \quad (50)$$

Tuyến tính hóa phương trình (49), ta được:

$$\Delta \delta \Pi_{stab}^e = \delta \mathbf{x}_e^T \mathbf{k}_{stab} \Delta \mathbf{x}_e, \quad (51)$$

Ở đây, ma trận tiếp được viết như sau:

$$\mathbf{k}_{stab} := \sum_{el=1}^{nel} \mathbf{k}_{stab}^e. \quad (52)$$

3.5. Phương pháp giải

3.5.1. Quá trình giải bài toán

Từ phương trình (45) và (49), phương trình tổng quát có thể viết lại như sau:

$$\delta \mathbf{x}_e^T [\mathbf{f}_p + \mathbf{f}_{stab}] = 0 \quad \forall \delta \mathbf{x}_e, \quad (53)$$

Với

$$f_p := \sum_{el=1}^{nel} f_p^e; \quad f_{stab} := \sum_{el=1}^{nel} f_{stab}^e. \quad (54)$$

Phương trình (53) là phương trình phi tuyến và được giải bằng phương pháp số. Phương pháp Newton-Raphson được áp dụng để giải phương trình này. Phương trình (53) có thể biểu diễn dưới dạng:

$$f(x) := f_p + f_{stab} = 0, \quad (55)$$

Tại một vòng lặp i , nghiệm xấp xỉ của biên dạng cam đạt được và ký hiệu là x^i . Phương pháp Newton-Raphson được mô tả bởi Gouri Dhatt và đồng nghiệp [41]

$$f(x^i) := f(x^{i-1} + \Delta x^i) \approx 0, \quad (56)$$

Thuật toán được xây dựng dựa trên chuỗi Taylor như sau:

$$f(x^{i-1} + \Delta x^i) = f(x^{i-1}) + \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x=x^{i-1}} \Delta x^i + \dots = 0, \quad (57)$$

và

$$x^i = x^{i-1} + \Delta x^i, \quad (58)$$

Bỏ qua các thành phần rất bé, ta có:

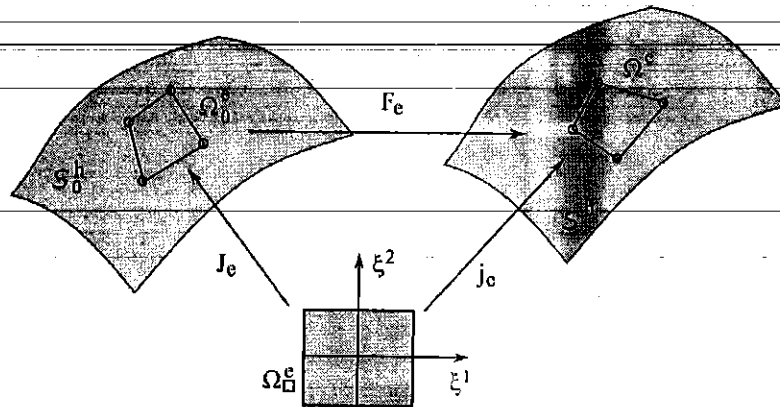
$$K \Delta x^i = -f(x^{i-1}), \quad (59)$$

Với K là ma trận tiếp và được xác định:

$$K := \frac{\partial f}{\partial x} = k_p + k_{stab} \quad (60)$$

3.5.2. Phương pháp số dùng Gaussian

Tính toán bằng phương pháp phần tử hữu hạn, các phương trình, các ma trận cần phải được đánh giá. Những phương trình tích phân này được giải bằng phương pháp phần tử hữu hạn. Hệ tọa độ tham số $\xi^\alpha \in [-1, +1]$ được sử dụng để chuyển đổi giữa các phần tử của biên dạng tham chiếu và các phần tử của biên dạng cam hiện hành (Hình 12).



Hình 12. Phép chuyển đổi tích phân Gaussian giữa các phần tử của biên dạng tham chiếu Ω_e^e và các phần tử của biên dạng cam hiện hành Ω_e^c thông qua hệ tọa độ tham số $\xi^\alpha \in [-1, +1]$

Jacobian được xác định như sau:

$$\begin{aligned}
 J_e &= \frac{\partial X}{\partial \xi} \approx \sum_A^n X_A \otimes \frac{\partial N_A}{\partial \xi} \\
 j_e &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \approx \sum_A^n x_A \otimes \frac{\partial N_A}{\partial \xi} \\
 F_e &= j_e J_e^{-1}
 \end{aligned} \tag{61}$$

Như đã trình bày ở trên, các phương trình tích phân được tính theo phương pháp Gaussian dựa trên hệ tọa độ tham số. Các tích phân này

được mô tả by P. Wriggers [40]. Từ phương trình (46) và (50), phương trình tổng quát cho mỗi phần tử được xác định như sau:

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{g} dA_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{g}_p dA_e + \int_{\Omega_e} \mathbf{g}_{stab} dA_e \quad (62)$$

Phương trình (62) được tính như sau:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \mathbf{g} dA_e &= \int_{\Omega_{\square}} \mathbf{g}_p(\xi) \det \mathbf{J}_e d\xi + \int_{\Omega_{\square}} \mathbf{g}_{stab}(\xi) \det \mathbf{J}_e d\xi \\ &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{g}_p(\xi^\alpha) \det \mathbf{J}_e d\xi^1 d\xi^2 \\ &\quad + \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{g}_{stab}(\xi^\alpha) \det \mathbf{J}_e d\xi^1 d\xi^2 \end{aligned} \quad (63)$$

Các tích phân này được tính theo phương pháp số. n_{gp} là số điểm Gauss. Vì vậy, phương trình (63) có thể viết như sau:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \mathbf{g} dA_e &\approx \sum_{gp=1}^{n_{gp}} \mathbf{g}_p(\xi_{gp}) \det \mathbf{J}_e W_p \\ &\quad + \sum_{gp=1}^{n_{gp}} \mathbf{g}_{stab}(\xi^\alpha) \det \mathbf{J}_e W_p \end{aligned} \quad (64)$$

Với, W_p là trọng số; ξ_{gp} là tọa độ của các điểm đánh giá trong hệ tọa độ tham số. Tích phân trong phương trình (64) được viết lại cho toàn bộ hệ thống như sau:

$$\begin{aligned}
& \sum_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} g \, dA_e \\
& \approx \sum_{el=1}^{n_{el}} \sum_{gp=1}^{n_{gp}} g_p(\xi_{gp}) \det J_e W_p \\
& + \sum_{el=1}^{n_{el}} \sum_{gp=1}^{n_{gp}} g_{stab}(\xi^{\alpha}) \det J_e W_p
\end{aligned} \tag{65}$$

3.5.3. Thuật toán

Phần này trình bày thuật toán cho việc tìm biên dạng cam mong muốn. Các bước của thuật toán được chỉ ra trong Bảng 2.

Bảng 2. Thuật toán

<p>1. Định nghĩa biên dạng cam ban đầu</p> <p>2. Vòng lặp</p> <ul style="list-style-type: none"> Tham số: $\mu, \epsilon; \lambda$
<p>2.1. Các bước lặp:</p> <ul style="list-style-type: none"> Tính $f_p, K_p, f_{stab}, K_{stab}$ Các điều kiện biên Bước 1: Tính toán bước tại phương pháp Penalty Bước: Giảm μ Bước 3: Cập nhật tham số λ của phương pháp Augmented Lagrangian $\lambda_{new} = \epsilon g + \lambda_{old}$ Giải phương trình $K \Delta x^i = -f(x^{i-1})$ và cập nhật $x^i = x^{i-1} + \Delta x^i$
<ul style="list-style-type: none"> Thay đổi lại biên dạng cam tham chiếu

CHƯƠNG 3.

KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

4.1. Biên dạng cam

Trong chương này đề cập đến việc tính toán cam cần đẩy đáy bằng.

Phương trình chuyển vị của cam được biểu diễn bởi:

$$s_0 = f(\varphi).$$

Với φ là góc quay của cam.

Với cam phẳng, chỉ số của véc tơ pháp tuyến $\alpha = 1$ và $\beta = 1$. Từ phương trình (26), f_{stab}^e được tính như sau:

$$f_{stab}^e = \int_{\Omega_0^e} \mu(A^{11} - a^{11}) N_{,\xi}^T a_1 dA_e. \quad (66)$$

Tương tự, ma trận tiếp được xác định:

$$k_{stab}^e = (k_{stab1}^e + k_{stab2}^e), \quad (67)$$

Với

$$k_{stab1}^e = \int_{\Omega_0^e} 2\mu a^{11} N_{,\xi}^T a_1 \otimes a_1 N_{,\xi}^T dA_e \quad (68)$$

$$k_{stab2}^e = \int_{\Omega_0^e} \mu(A^{11} - a^{11}) N_{,\xi}^T N_{,\xi} dA_e.$$

Các tham số tính toán của cam được chỉ ra trên Hình 13. Chuyển vị của cần được xác định:

$$s := x \cdot n - r_0. \quad (69)$$

Biến phân của s :

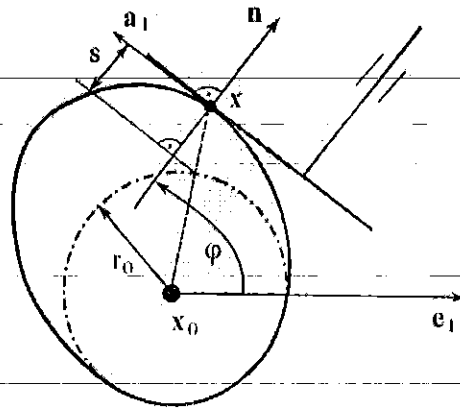
$$\delta s = \delta x \cdot \mathbf{n} + x \cdot \delta \mathbf{n}. \quad (70)$$

Góc quay của cam được viết như sau (Hình 13):

$$\varphi = \arccos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) \quad (71)$$

Biến phân góc quay của cam:

$$\delta s_0 = -d_c \mathbf{e}_1 \cdot \delta \mathbf{n} \quad (72)$$



Hình 13. Tham số tính toán

Từ tính toán trên, f_p^e được xác định:

$$f_p^e = \int_{\Omega_0^e} \lambda (N^T \mathbf{n} + N_{,\xi}^T R_A^T \mathbf{b}) dA_e. \quad (73)$$

Ma trận tiếp:

$$k_p^e = k_{p1}^e + k_{p2}^e \quad (74)$$

Với

$$k_{p1}^e = \int_{\Omega_0^e} \epsilon (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} N + \mathbf{n} \otimes \mathbf{b} R_A N_{,\xi}) dA_e \quad (75)$$

$$+ \int_{\Omega_0^e} \epsilon N_{,\xi}^T R_A^T (\mathbf{b} \otimes \mathbf{n} N + \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} R_A N_{,\xi}) dA_e$$

$$k_{p2}^e = \int_{\Omega_0^e} \lambda (N^T R_A N_{,\xi} + N_{,\xi}^T R_A^T G_1 - N_{,\xi}^T G_2 N_{,\xi}) dA_e. \quad (76)$$

Trong phương trình (75) và (76), véc tơ \mathbf{b} và tensor G_1, G_2 được xác định như sau:

$$\mathbf{b} := \mathbf{x} + d_c \mathbf{e}_1. \quad (77)$$

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{N} + d_{c1} \mathbf{A} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 R_A N_{,\xi}, \quad (78)$$

$$\mathbf{G}_2 = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{b}) \mathbf{B}^{11} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}^1) R_A \quad (79)$$

Với

$$d_c = f_{,\varphi} c_s, \quad (80)$$

Và

$$d_{c1} = f_{,\varphi\varphi} c_s^2 + f_{,\varphi} c_s \sin \varphi \cos \varphi. \quad (81)$$

$$c_s = \frac{1}{\sqrt{(1 - (\cos \varphi)^2)}}. \quad (82)$$

Trong ví dụ này thì hàm cycloid được sử dụng cho tính toán thiết kế cam. Cam thiết kế gồm có ba giai đoạn: đi xa, về gần và đứng gần. Mỗi giai đoạn tương ứng với góc định kỳ $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 120^\circ$ và chiều cao nâng $L = 5$ [đơn vị chiều dài]. Bằng việc sử dụng thuật toán trong phần 3.5.3, biên dạng cam được và đặc điểm động học của cam (chuyển vị, vận tốc, gia tốc) được chỉ ra trên Hình 14. Kết quả của biên dạng cam sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn đã được so sánh với kết quả biên dạng cam sử dụng phương pháp

giải tích. Từ Hình 14 thấy rằng sự sai khác biên dạng cam giữa phương pháp phần tử hữu hạn và phương pháp giải tích.

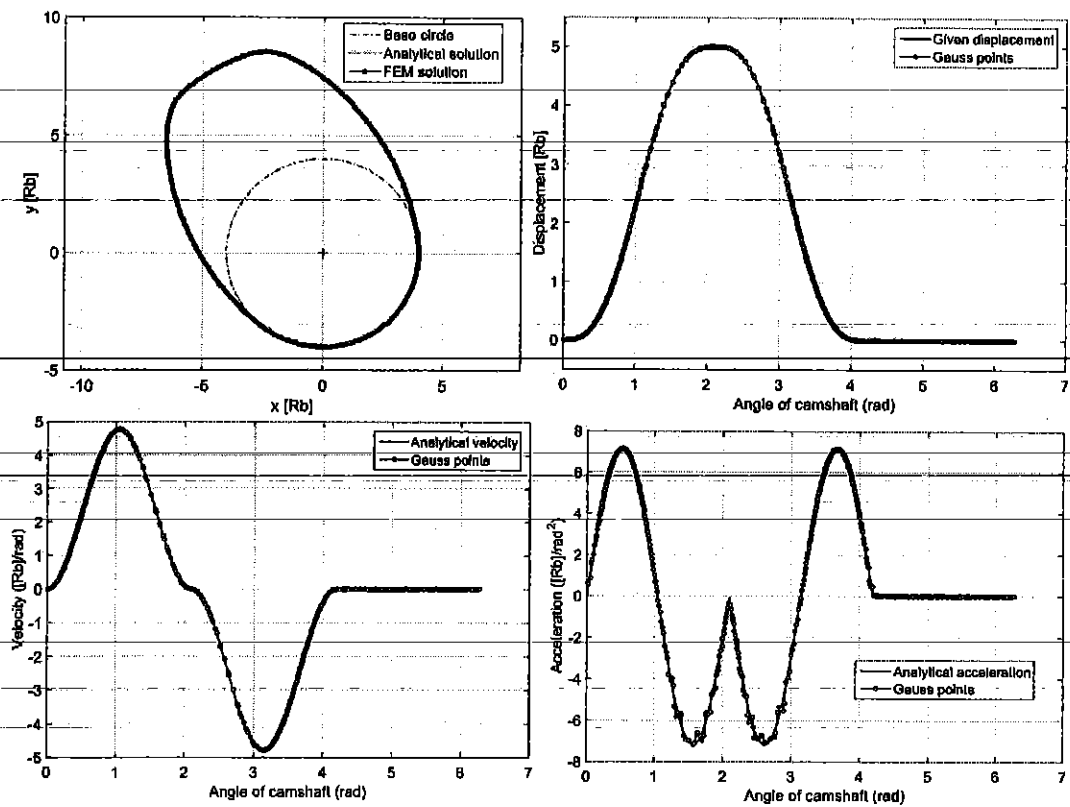
Trong ví dụ này, 128 phần tử được sử dụng để tính toán cho biên dạng cam. Với bước Penalty, sự sai khác lớn nhất của chuyển vị giữa phương pháp phần tử hữu hạn và chuyển vị đã cho là $\varepsilon = 1.9 \times 10^{-3}$. Ở bước thứ 2, tham số μ giảm từ 100 xuống 25, độ chính xác đạt $\varepsilon = 2.6133 \times 10^{-5}$.

Trong ví dụ này, kích thước cam cũng được cân nhắc trong quá trình thiết kế bởi nó là một trong những yếu tố quyết định giá thành của cam. Kích thước của cam thường được đánh giá bởi vòng tròn cơ sở r_0 . Bán kính nhỏ nhất của vòng tròn cơ sở được xác định như sau:

$$r_{0\min} > \rho_{\min} - s_{@amin} - a_{\min}, \quad (83)$$

Với ρ_{\min} , a_{\min} , $s_{@amin}$ lần lượt là bán kính cong, giá tốc nhỏ nhất và giá trị chuyển vị tại điểm mà gia tốc nhỏ nhất.

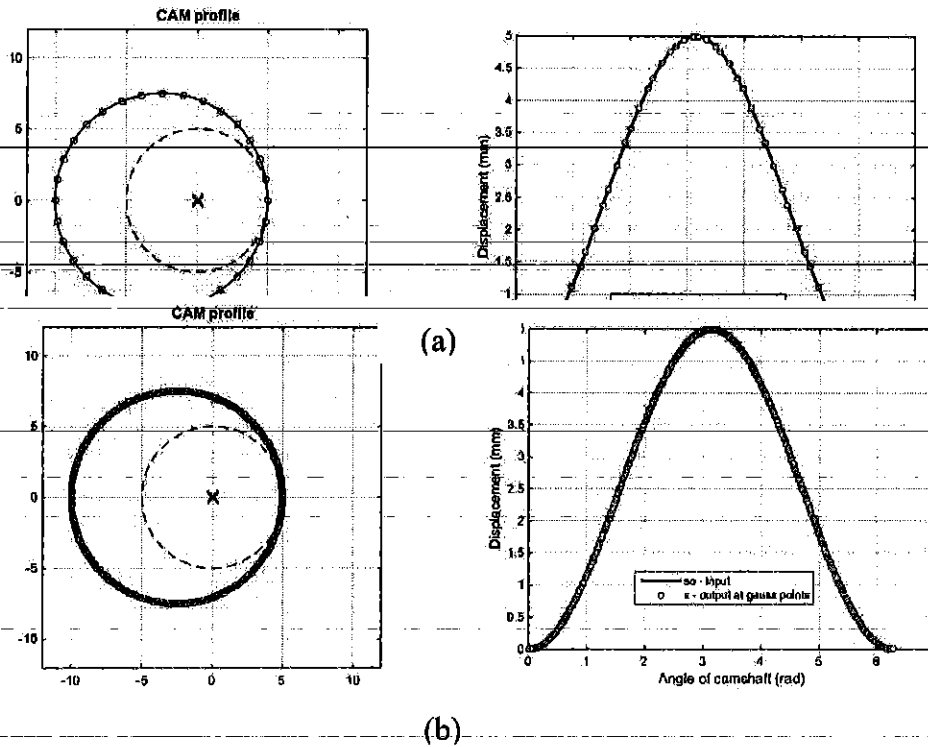
Để xác định bán kính nhỏ nhất của vòng tròn cơ sở, các giá ρ_{\min} , a_{\min} , $s_{@amin}$ trị cần được xác định. Bán kính cong ρ_{\min} được xác định từ phương trình (7). Giá trị $s_{@amin}$ và a_{\min} được xác định từ hàm chuyển vị và gia tốc. Từ phương trình (78) dễ dàng xác định được bán kính nhỏ nhất của vòng tròn cơ sở là 3.9878 [đơn vị chiều dài]. Hơn nữa, đối với loại cam cần đẩy đáy bằng này thì cần phải thỏa mãn điều kiện bán kính cong của biên dạng cam luôn là đường cong lồi để đảm bảo cam và cần luôn luôn tiếp xúc nhau trong quá trình chuyển động.



Hình 14. Biên dạng cam và đặc điểm động học

Tiếp theo, chúng ta xét ảnh hưởng của số phần tử đến độ chính xác biên dạng cam. Hình 15 trình bày biên dạng cam và chuyển vị của cam với hai đoạn đi xa và về gần với sự khác nhau về số lượng phần tử. Hàm điều hòa được sử dụng để biểu diễn cho chuyển vị của cần. Hình 15-a biểu diễn biên dạng cam và chuyển vị của cần với 16 phần tử với sai số là $\epsilon = 6.3506 \times 10^{-4}$;

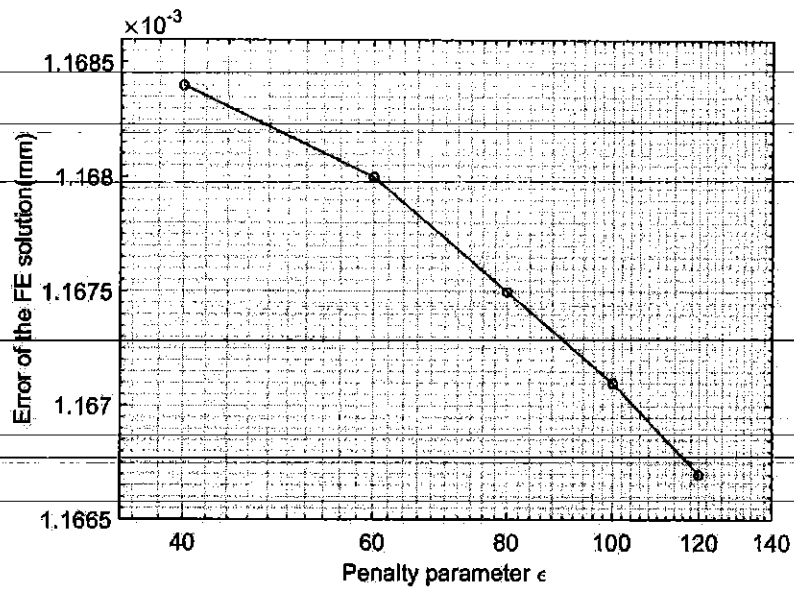
Hình 15-b với 100 phần tử và độ chính xác của cam đã tăng lên đáng kể với sai số là $\epsilon = 2.2036 \times 10^{-7}$. Như vậy từ kết quả này thấy rằng, độ chính xác của biên dạng cam tăng khi tăng số phần tử.



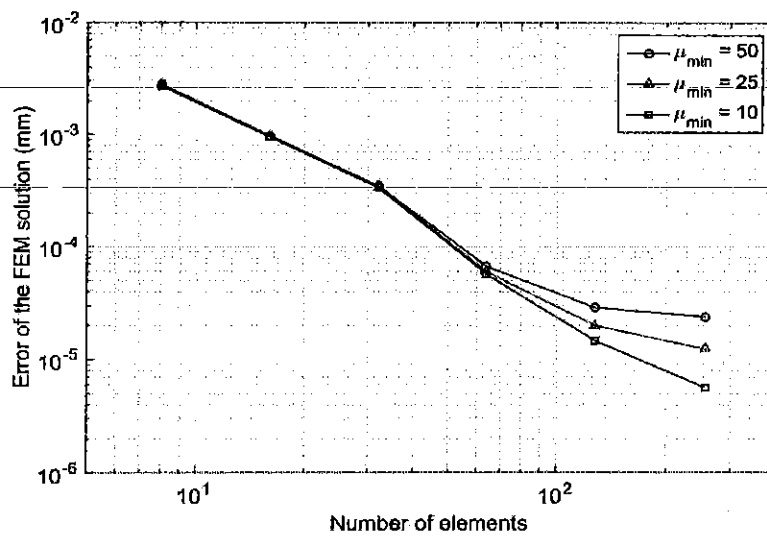
Hình 15. Ảnh hưởng của số phần tử đến độ chính xác của biên dạng cam: (a) 16 phần tử; (b) 100 phần tử

4.2. Ảnh hưởng của các tham số ϵ và μ đến độ chính xác của biên dạng cam

Ảnh hưởng của tham số Penalty ϵ được chỉ ra trên Hình 16. Từ hình vẽ có thể thấy rằng độ chính xác của biên dạng cam đạt được khi tham số ϵ đủ lớn. Điều này có thể thực hiện được thêm bước lặp của tham số μ . Hình 17 chỉ ra ảnh hưởng của tham số μ tới độ chính xác biên dạng cam. Từ Hình 17 ta thấy, với giá trị của μ đủ nhỏ thì độ chính xác của cam đạt được.



Hình 16. Ảnh của của tham số Penalty ϵ đến độ chính xác của biên dạng cam



Hình 17. Ảnh hưởng của tham số μ đến độ chính xác của biên dạng cam

CHƯƠNG 4.

KẾT LUẬN VÀ HƯỚNG NGHIÊN CỨU TIẾP THEO

4.1. Kết luận

Đề tài đã trình bày cách xây dựng biên dạng cam dựa trên phương pháp phần tử hữu hạn. Các công việc của đề tài đã thực hiện được bao gồm:

- Nghiên cứu tổng quan về cơ cấu cam. Các hàm biểu diễn cho chuyển vị của cần được thảo luận. Nhiều nghiên cứu đã đưa ra nhiều dạng hàm toán học để mô tả chuyển động của cần. Mỗi một loại hàm đều có tính chất khác nhau và cho các kết quả về động học và động lực học khác nhau. Chính vì vậy, trong quá trình thiết kế cam việc lựa chọn hàm là một trong những bước quan trọng. Ngoài ra, nghiên cứu này cũng đề cập đến các phương pháp thiết kế biên dạng cam. Mỗi phương pháp cũng có những ưu nhược điểm nhất định.
- Biên dạng cam được xây dựng dựa vào hệ tọa độ curvilinear được biểu diễn thông qua véc tơ vị trí trên biên dạng của cam và được xác định thông qua các thành phần véc tơ trong hệ tọa độ này.
- Phương trình tổng quát đã được thiết lập nhằm dựa vào chuyển vị của cần. Từ đó thiết lập được các phương trình Penalty, phương trình Augmented Lagrange và phương trình ổn định cho quá trình thiết kế biên dạng cam. Các phương trình này thiết lập dựa trên phương pháp phần tử hữu hạn.
- Để giải được phương trình tổng quát, phương pháp Newton – Raphson được áp dụng để tìm ra biên dạng của cam mong muốn.
- Kết quả đạt được đã chỉ ra rằng, sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn cho kết quả với độ chính xác cao, hiệu quả. Hơn nữa, kích thước của cam cũng được cân nhắc để tối ưu hóa kích thước của cơ cấu cam.

4.2. Hướng nghiên cứu tiếp theo

Thiết kế biên dạng cam của cơ cấu cam không gian là một trong những vấn đề khó. Vì vậy, bằng việc sử dụng hệ tọa độ curvilinear có thể dễ dàng biểu diễn biên dạng cam không gian. Chính vì vậy, nghiên cứu tiếp theo cho ứng dụng phương pháp phân tử hữu hạn sẽ được áp dụng cho việc tính toán biên dạng của cam không gian.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] R.L. Norton, *Design of Machinery*, McGraw-Hill, 2003.
- [2] J.J. Uicker, G.R. Pennock R., J.E. Shigley, *Theory of Machines and Mechanisms*, 5th ed., United State of America by Oxford University Press, New York, 2017.
- [3] F.Y. Chen, *Mechanics and Design of Cam Mechanisms*, Pergamon Press, 1982.
- [4] Y. Chang, R.F. Lin, Design and analysis of cam mechanisms with a flat-faced follower by the application of support function, *Adv. Mater. Res.* 711 (2013) 506–512.
<https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.711.506>.
- [5] A. Biswas, M. Stevens, G.L. Kinzel, A comparison of approximate methods for the analytical determination of profiles for disk cams with roller followers, *Mech. Mach. Theory*. 39 (2004) 645–656.
<https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2003.10.001>.
- [6] P. Flores, A computational approach for cam size optimization of disc cam-follower mechanisms with translating roller followers, *J. Mech. Robot.* 5 (2013) 1–12. <https://doi.org/10.1115/1.4025026>.
- [7] H. Jiang, C. Duan, J. Wu, Y. Zhao, C. Liu, Z. Luo, L. Dong, B. Zhang, Z. Wang, C. Zhang, X. Yu, Kinematics characteristics of the vibrating screen with rigid-flexible screen rod and the behavior of moist coal particles during the dry deep screening process, *Powder Technol.* 319 (2017) 92–101. <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2017.06.036>.
- [8] Z. Liang, J. Huang, Design of high-speed cam profiles for vibration reduction using command smoothing technique, *Proc. Inst. Mech. Eng. Part C J. Mech. Eng. Sci.* 228 (2014) 3322–3328.
<https://doi.org/10.1177/0954406214528321>.
- [9] A. DasGupta, A. Ghosh, On the Determination of Basic Dimensions of

- a Cam With a Translating Roller-Follower, *J. Mech. Des. Trans. ASME*. 126 (2004) 143–147. <https://doi.org/10.1115/1.1637650>.
- [10] F.W. Flocker, A versatile cam profile for controlling interface force in multiple-dwell cam-follower systems, *J. Mech. Des. Trans. ASME*. 134 (2012) 1–6. <https://doi.org/10.1115/1.4007146>.
- [11] C. Sun, A. Ren, G. Sun, Optimum design of motion curve of cam mechanism with lowest maximum acceleration, *Appl. Mech. Mater.* 86 (2011) 666–669. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.86.666>.
- [12] G. Gatti, D. Mundo, On the direct control of follower vibrations in cam-follower mechanisms, *Mech. Mach. Theory*. 45 (2010) 23–35. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2009.07.010>.
- [13] H. Xiao, J.W. Zu, Cam profile optimization for a new cam drive, *J. Mech. Sci. Technol.* 23 (2009) 2592–2602. <https://doi.org/10.1007/s12206-009-0715-7>.
- [14] B.L. Maccarthy, N.D. Burns, An evaluation of spline functions for use in cam design, *Proc. Inst. Mech. Eng. Part C J. Mech. Eng. Sci.* 199 (1985) 239–248. https://doi.org/10.1243/PIME_PROC_1985_199_118_02.
- [15] L.C.T. Wang, Y.T. Yang, Computer aided design of cam motion programs, *Comput. Ind.* 28 (1996) 151–161. [https://doi.org/10.1016/0166-3615\(95\)00073-9](https://doi.org/10.1016/0166-3615(95)00073-9).
- [16] J.H. Kim, K.Y. Ahn, S.H. Kim, Optimal synthesis of a spring-actuated cam mechanism using a cubic spline, *Proc. Inst. Mech. Eng. Part C J. Mech. Eng. Sci.* 216 (2002) 875–884. <https://doi.org/10.1177/095440620221600902>.
- [17] D.M. Tsay, B.J. Lin, Improving the geometry design of cylindrical cams using nonparametric rational B-splines, *CAD Comput. Aided*

- Des. 28 (1996) 5–15. [https://doi.org/10.1016/0010-4485\(95\)00020-8](https://doi.org/10.1016/0010-4485(95)00020-8).
- [18] S.P. Mermelstein, M. Acar, Optimising cam motion using piecewise polynomials, *Eng. Comput.* 19 (2003) 241–254. <https://doi.org/10.1007/s00366-003-0264-0>.
- [19] V. Nguyen, D. Kim, Cam profile smoothing by modified spline curves, (2007).
- [20] E.E. Zayas, S. Cardona, L. Jordi, Analysis and synthesis of the displacement function of the follower in constant-breadth cam mechanisms, *Mech. Mach. Theory.* 44 (2009) 1938–1949. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2009.05.002>.
- [21] S.K. Saha, The Design Optimization of Cam Mechanisms With Oscillating, 1 (2016) 1992–1995.
- [22] R.T. Farouki, J. Manjunathaiah, S. Jee, Design of rational cam profiles with pythagorean-hodograph curves, *Mech. Mach. Theory.* 33 (1998) 669–682. [https://doi.org/10.1016/S0094-114X\(97\)00099-2](https://doi.org/10.1016/S0094-114X(97)00099-2).
- [23] S. Cardona, E.E. Zayas, L. Jordi, P. Català, Synthesis of displacement functions by Bézier curves in constant-breadth cams with parallel flat-faced double translating and oscillating followers, *Mech. Mach. Theory.* 62 (2013) 51–62. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2012.11.004>.
- [24] M. Mandal, T.K. Naskar, Introduction of control points in splines for synthesis of optimized cam motion program, *Mech. Mach. Theory.* 44 (2009) 255–271. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2008.01.005>.
- [25] N. Sateesh, C.S.P. Rao, T.A. Janardhan Reddy, Optimisation of cam-follower motion using B-splines, *Int. J. Comput. Integr. Manuf.* 22 (2009) 515–523. <https://doi.org/10.1080/09511920802546814>.
- [26] T.K. Naskar, R. Mishra, Introduction of control points in B-splines for

- synthesis of ping finite optimized cam motion program, *J. Mech. Sci. Technol.* 26 (2012) 489–494. <https://doi.org/10.1007/s12206-011-1004-9>.
- [27] T. Ouyang, P. Wang, H. Huang, N. Zhang, N. Chen, Mathematical modeling and optimization of cam mechanism in delivery system of an offset press, *Mech. Mach. Theory.* 110 (2017) 100–114. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2017.01.004>.
- [28] T.T.N. Nguyen, S. Kurtenbach, M. Hüsing, B. Corves, Improving the kinematics of motion curves for cam mechanisms using NURBS, *Mech. Mach. Sci.* 52 (2018) 79–88. https://doi.org/10.1007/978-3-319-60702-3_9.
- [29] T.T.N. Nguyen, S. Kurtenbach, M. Hüsing, B. Corves, A general framework for motion design of the follower in cam mechanisms by using non-uniform rational B-spline, *Mech. Mach. Theory.* 137 (2019) 374–385. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2019.03.029>.
- [30] T.T.N. Nguyen, V.S. Nguyen, T.B.N. Nguyen, T.L. Vu, An Evaluation of B-spline for Synthesis of Cam Motion with a Large Number of Output Conditions, in: 2020: pp. 173–180.
- [31] R.Y. Ge, P.Q. Guo, Flexible cam profile synthesis method using NURBS and its optimization based on genetic algorithm, *Adv. Mater. Res.* 426 (2012) 69–72. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.426.69>.
- [32] D.H. Myszka, *Machines and Mechanisms: Applied Kinematic Analysis*, 4th ed., Prentice Hall, 2012. <https://www.pearson.com/us/higher-education/program/Myszka-Machines-Mechanisms-Applied-Kinematic-Analysis-4th-Edition/PGM64620.html>.
- [33] J. Sun, Z. Tang, The parametric design and motion analysis about line

- translating tip follower cam mechanism based on model datum graph, *Procedia Eng.* 23 (2011) 439–444. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2011.11.2527>.
- [34] A. Shala, R. Likaj, Analytical Method for Synthesis of Cam Mechanism, *Int. J. Curr. Eng. Technol.* 133 (2013). <http://inpressco.com/category/ijcet>.
- [35] U. John, P. Gordon, S. Joseph, *Theory of Machines and Mechanisms*, 2017. <https://www.amazon.com/Theory-Machines-Mechanisms-John-Uicker/dp/0195371232>.
- [36] J.F. Hsieh, Design and analysis of indexing cam mechanism with parallel axes, *Mech. Mach. Theory.* 81 (2014) 155–165. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2014.07.004>.
- [37] J.F. Hsieh, Design and analysis of cams with three circular-arc profiles, *Mech. Mach. Theory.* 45 (2010) 955–965. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2010.02.001>.
- [38] R.A. Sauer, X.T. Duong, C.J. Corbett, A computational formulation for constrained solid and liquid membranes considering isogeometric finite elements, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 271 (2014) 48–68. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0045782513003332>.
- [39] R.A. Sauer, A contact theory for surface tension driven systems, *Math. Mech. Solids.* 21 (2016). <https://journals.sagepub.com/doi/abs/10.1177/1081286514521230?journalCode=mmsa>.
- [40] P. Swiggers, *Computational Contact Mechanics*, Second Edi, Springer, 2006. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-540-32609-0>.

[41] G. Dhatt, E. Lefrançois, G. Touzot, Finite Element Method, 1st editio, Wiley-ISTE, 2012. <https://www.amazon.com/Finite-Element-Method-Numerical-Methods/dp/1848213689>.

**ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP**

**THUYẾT MINH
ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP TRƯỜNG
Năm 2019**

**Tên đề tài:
TÍNH TOÁN BIÊN DẠNG CAM DỰA VÀO PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ
HỮU HẠN
Mã số: T2019-B39**

Chủ nhiệm đề tài: TS. Nguyễn Thị Thanh Nga

THÁI NGUYÊN, NĂM 2019

THUYẾT MINH ĐỀ TÀI
KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP TRƯỜNG - Năm 2019

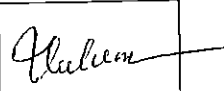
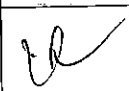
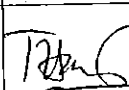


1. TÊN ĐỀ TÀI: Tính toán biên dạng cam dựa vào phương pháp phần tử hữu hạn	2. MÃ SỐ: T2019-B39
3. LĨNH VỰC NGHIÊN CỨU	4. LOẠI HÌNH NGHIÊN CỨU
Khoa học Tự nhiên <input type="checkbox"/> Khoa học KT và CN <input checked="" type="checkbox"/> Khoa học Y, dược <input type="checkbox"/> Khoa học Nông nghiệp <input type="checkbox"/> Khoa học Xã hội <input type="checkbox"/> Khoa học Nhân văn <input type="checkbox"/>	Cơ bản <input checked="" type="checkbox"/> Ứng dụng <input type="checkbox"/> Triển khai <input type="checkbox"/>

5. THỜI GIAN THỰC HIỆN 12 tháng
 Từ tháng 07 năm 2019 đến tháng 07 năm 2020

6. CHỦ NHIỆM ĐỀ TÀI

Họ và tên: Nguyễn Thị Thanh Nga Học vị: TS
 Chức danh khoa học: Năm sinh: 25/04/1982
 Địa chỉ cơ quan: Đường 3/2, Phường Tích Lương, Thành Phố Thái Nguyên, Tỉnh Thái Nguyên Điện thoại di động: 0355 122138
 Điện thoại cơ quan: Fax:
 E-mail: nguyennga@tnut.edu.vn

7. NHỮNG THÀNH VIÊN THAM GIA NGHIÊN CỨU ĐỀ TÀI

TT	Họ và tên	Đơn vị công tác và lĩnh vực chuyên môn	Nội dung nghiên cứu cụ thể được giao	Chữ ký
1	TS. Vũ Thị Liên	Khoa Quốc Tế, Chuyên môn Cơ khí	Tìm hiểu thông tin tổng quan về cơ cấu cam và biên dạng cam	
2	ThS. Vũ Như Nguyệt	Khoa Cơ khí, Chuyên môn: Cơ khí	Xây dựng lý thuyết tính toán biên dạng cam	
3	TS. Trần Ngọc Giang	Khoa Cơ khí, Chuyên môn: Cơ khí	Tính toán phần tử hữu hạn cho biên dạng cam	
4	ThS. Lê Thị Phương Thảo	Khoa Cơ khí, Chuyên môn: Cơ khí	Tính toán phần tử hữu hạn cho biên dạng cam	
5	ThS. Nguyễn Phương Vân	Khoa Cơ khí, Chuyên môn: Cơ khí	Viết chương trình tính toán	

8. ĐƠN VỊ PHỐI HỢP CHÍNH

Tên đơn vị trong và ngoài nước	Nội dung phối hợp nghiên cứu	Họ và tên người đại diện đơn vị
-----------------------------------	---------------------------------	------------------------------------

9. TỔNG QUAN TÌNH HÌNH NGHIÊN CỨU THUỘC LĨNH VỰC CỦA ĐỀ TÀI Ở TRONG VÀ NGOÀI NƯỚC

9.1. Tổng quan tình hình nghiên cứu thuộc lĩnh vực của đề tài: *(Mức độ đầy đủ, hợp lý trong việc đánh giá tình hình nghiên cứu trong và ngoài nước; thành công và hạn chế của công trình liên quan; mức độ cập nhật thông tin mới nhất về lĩnh vực nghiên cứu)*

Cơ cấu cam được sử dụng rộng rãi trong nhiều loại máy đặc biệt các máy tự động, máy cắt, máy dệt, trong động cơ đốt trong, ... Trong thiết kế cam, với các đặc tính linh hoạt của cơ cấu cam bởi các hình dạng khác nhau của cam tạo nên các chuyển động linh hoạt của cần. Vì vậy cam được áp dụng nhiều trong các loại máy. Trong quá trình thiết kế cơ cấu cam bao gồm nhiều bước. Bước đầu tiên là lựa chọn loại cơ cấu cam. Tiếp theo đó là cấu trúc chuyển động của cần và lựa chọn phương trình toán học cho chuyển động của cần. Các kích thước của cam được đưa ra để đi xác định biên dạng của cam. Các kích thước cam và được chỉ ra trên bản vẽ và được sản xuất. Cuối cùng là hệ thống cơ cấu cam được lắp ráp hoàn chỉnh. Việc tính toán biên dạng cam đã có nhiều nghiên cứu về thiết kế cam đã được đưa ra, phương pháp vẽ đã được thiết lập với nhiều nghiên cứu (Myszka, 2012; Rothbart, 2004; Shigley and Jr., 1980). Để tăng độ chính xác thì phương pháp phân tích bằng việc sử dụng tọa độ đề các và tọa độ cực bởi (Myszka, 2012, Faxin and Xianzhang, 2011, Shala and Likaj, 2013 and Qian, 2007). Việc thiết kế biên dạng cam của cam cần đẩy đẩy con lăn sử dụng phương pháp đường bao (Y., 1982). Tuy nhiên các phương pháp này chỉ đưa ra tính toán của một vài biên dạng cam cơ bản. Vì vậy, trong nghiên cứu này, tác giả muốn đưa ra một phương pháp tổng quát có thể xác định biên dạng cam cho biên dạng cam bất kỳ khi tính toán thiết kế.

9.2. Danh mục các công trình đã công bố thuộc lĩnh vực của đề tài của chủ nhiệm và những thành viên tham gia nghiên cứu *(họ và tên tác giả; bài báo; ấn phẩm; các yếu tố về xuất bản)*

a) Của chủ nhiệm đề tài

Chen H., Nguyen T. T. N., Müller M., Kurtenbach S., Pan C., Hüsing M., Corves B., Application of a Cam Workbench for Education in Mechanical Engineering, New Advances in Mechanisms, Mechanical Transmissions and Robotics, Vol. 46, ISBN 978-3-319-45449-8, pp 177-186, Springer, 2016.

Nguyen T.T.N., Kurtenbach S., Hüsing M., Corves B., Evaluating the Knot Vector to Synthesize the Cam Motion Using NURBS. In: Zeghloul S., Romdhane L., Laribi M. (eds.) Computational Kinematics, Mechanisms and Machine Science, Vol. 50, Springer, 2017.

Nguyen T.T.N., Kurtenbach S., Hüsing M., Corves B., Improving the Kinematics of Motion Curves for Cam Mechanisms Using NURBS. In: Dede M., İtik M., Lovasz EC., Kiper G. (eds.) Mechanisms, Transmissions and Applications, Mechanisms and Machine Science, Vol. 52, Springer, 2017.

Nguyen T.T.N., Kurtenbach S., Hüsing M. and Corves B., A General Framework for Motion Design of the Follower in Cam Mechanisms by Using Non-Uniform Rational B-Spline, Mechanism and Machine Theory, pp 374-385, 2019.

b) Của các thành viên tham gia nghiên cứu

Vũ Thị Liên, Chao-Chang A. Chen, Chia-Chen Lee, and Chia-Wei Yu, Compensating additional optical power in the central zone of multifocal contact lens for minimization of shrinkage error of shell mold in injection molding process, Applied Optics, Vol 57(12), pp 2981-2991; ISSN:1559-128X (print); ISSN:2155-3165, 2018.

Vũ Thị Liên, Chao-Chang A. Chen, and Chia-Wei Yu, Optical design of soft multifocal contact lens with uniform optical power in center-distance zone with optimized NURBS, Optics Express, Vol 26(3), pp 3544-3556; ISSN: 1094-4087, 2018.

(Những công trình tiêu biểu được công bố trong 3 năm gần nhất)

***Tài liệu tham khảo:**

Myszka, D. H. (2012). Machines and Mechanisms: Applied Kinematic Analysis. 4th ed. Prentice Hall.

Rothbart, H. A. (2004). Cam Design Handbook. McGraw-Hill.

Shigley, J. E. and Jr., J. J. U. (1980). Theory of Machines and Mechanisms. McGraw-Hill Book Company.

Faxin, L. and Xianzhang, F. (2011). The design of parallel combination for cam mechanism.

Procedia Environmental Sciences 10, www.sciencedirect.com:1343-1349.

Shala, A. and Likaj, R. (2013). Analytical method for synthesis of cam mechanism. International

Journal of Current Engineering and Technology ISSN 2277-4106, Vol.3(No.2):432-435.

Qian, Z. (2007). Research on constant diameter cam mechanism with a planar motion follower.

Mechanism and Machine Theory 42, www.elsevier.com/locate/mechmt:1017-1028.

Y., C. F. (1982). Mechanics and Design of Cam Mechanisms. Pergamon Press-New York.

10. TÍNH CẤP THIẾT CỦA ĐỀ TÀI

Từ việc phân tích tổng quan các nghiên cứu đã được ra việc tính toán biên dạng cam thấy rằng trong việc tính toán thiết kế hệ thống cơ khí bao gồm cơ cấu cam, việc tính toán biên dạng cam khi biết chuyển vị của cần vẫn còn hạn chế trong việc tính toán cho tất cả các loại biên dạng cam. Tuy nhiên các phương pháp này chỉ đưa ra tính toán của một vài biên dạng cam cơ bản. Vì vậy, trong nghiên cứu này, tác giả muốn đưa ra một phương pháp tổng quát bằng việc sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để xác định biên dạng cam cho biên dạng cam bất kỳ khi tính toán thiết kế. Điều này sẽ làm cho việc thiết kế cam một cách linh hoạt và hiệu quả.

11. MỤC TIÊU ĐỀ TÀI

- Xác định dạng chuyển vị của cần;
- Viết phương trình chuyển vị của cần;
- Xây dựng lý thuyết tính toán biên dạng cam;
- Tính toán các ví dụ áp dụng.

12. ĐỐI TƯỢNG, PHẠM VI NGHIÊN CỨU

12.1. Đối tượng nghiên cứu

Nghiên cứu biên dạng của cam

12.2. Phạm vi nghiên cứu

Nghiên cứu các biên dạng cam phẳng

13. CÁCH TIẾP CẬN, PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

13.1. Cách tiếp cận

Phương pháp phần tử hữu hạn được áp dụng cho việc tính toán lý thuyết biên dạng cam

13.2. Phương pháp nghiên cứu

- Nghiên cứu các thông số ảnh hưởng đến biên dạng cam
- Lập trình tính toán biên dạng cam được thiết lập

14. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU VÀ TIẾN ĐỘ THỰC HIỆN

14.1. Nội dung nghiên cứu (*Mô tả chi tiết những nội dung nghiên cứu phù hợp với mục tiêu của đề tài*)

- Xây dựng lý thuyết biên dạng cam dựa trên phương pháp phần tử hữu hạn;
- Lập trình tính toán, thiết kế biên dạng cam;
- Tính toán các ví dụ áp dụng.

14.2. Tiến độ thực hiện				
ST T	Các nội dung, công việc thực hiện	Sản phẩm	Thời gian (bắt đầu-kết thúc)	Người thực hiện
1	Xây dựng thuyết minh đề tài	Thuyết minh	06/2019 - 07/2019	TS. Nguyễn Thị Thanh Nga
2	Tìm hiểu thông tin tổng quan về cơ cấu cam và biên dạng cam	Báo cáo	07/2019-08/2019	TS. Vũ Thị Liên ThS. Vũ Như Nguyệt
3	Xây dựng lý thuyết tính toán biên dạng cam	Báo cáo	09/2019-10/2019	TS. Nguyễn Thị Thanh Nga TS. Trần Ngọc Giang ThS. Nguyễn Phương Vân Ths. Lê Thị Phương Thảo
4	Tính toán phân tử hữu hạn cho biên dạng cam	Báo cáo	11/2019-01/2020	TS. Nguyễn Thị Thanh Nga TS. Vũ Thị Liên ThS. Nguyễn Phương Vân ThS. Lê Thị Phương Thảo ThS. Vũ Như Nguyệt
5	Lập trình Matlab	Báo cáo	02/2020-03/2020	ThS. Vũ Như Nguyệt TS. Vũ Thị Liên TS. Trần Ngọc Giang ThS. Lê Thị Phương Thảo ThS. Nguyễn Phương Vân
6	Viết báo	Báo cáo	04/2020-05/2020	TS. Nguyễn Thị Thanh Nga ThS. Vũ Như Nguyệt
7	Báo cáo bài báo tại đơn vị	Báo cáo	05/2020-06/2020	TS. Nguyễn Thị Thanh Nga ThS. Lê Thị Phương Thảo
8	Xây dựng báo cáo khoa học tổng kết đề tài	Báo cáo	07/2020	TS. Trần Ngọc Giang TS. Nguyễn Thị Thanh Nga

15. SẢN PHẨM

ST T	Tên sản phẩm	Số lượng	Yêu cầu chất lượng sản phẩm (mô tả chi tiết chất lượng sản phẩm đạt được như nội dung, hình thức, các chỉ tiêu, thông số kỹ thuật,...)
I	Sản phẩm khoa học (Các công trình khoa học sẽ được công bố: sách, bài báo khoa học, ..)		
1.1	01 Tạp chí quốc tế ISI (Q1)	01	
II	Sản phẩm đào tạo (cử nhân, thạc sĩ, tiến sĩ,...): 0		
III	Sản phẩm ứng dụng: 0		

16. PHƯƠNG THỨC CHUYỂN GIAO KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU VÀ ĐỊA CHỈ ỨNG DỤNG

16.1. Phương thức chuyển giao

16.2. Địa chỉ ứng dụng

17. TÁC ĐỘNG VÀ LỢI ÍCH MANG LẠI CỦA KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

17.1. Đối với lĩnh vực giáo dục và đào tạo

17.2. Đối với lĩnh vực khoa học và công nghệ có liên quan

17.3. Đối với phát triển kinh tế-xã hội

17.4. Đối với tổ chức chủ trì và các cơ sở ứng dụng kết quả nghiên cứu

17. KINH PHÍ THỰC HIỆN ĐỀ TÀI

Tổng kinh phí: 70.000.000

Bằng chữ: Bảy mươi triệu đồng

(Dự toán chi tiết các mục chi đính kèm có xác nhận của các đơn vị liên quan.)

Ngày 10... tháng 11... năm 2019

CHỦ NHIỆM ĐỀ TÀI

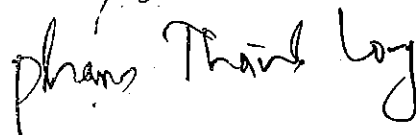
XÁC NHẬN CỦA ĐƠN VỊ



TS. Nguyễn Thị Thanh Nga

KT. HIỆU TRƯỞNG
PHÓ HIỆU TRƯỞNG

TRƯỞNG PHÒNG KHCN&HTQT



PGS.TS. Vũ Ngọc Pi

DỰ TOÁN KINH PHÍ ĐỀ TÀI KH&CN CẤP TRƯỜNG NĂM 2019

Tên đề tài: Tính toán biên dạng cam dựa vào phương pháp phần tử hữu hạn

Chủ nhiệm đề tài: TS. Nguyễn Thị Thanh Nga

Thành viên chính: TS. Vũ Thị Liên, ThS. Vũ Như Nguyệt, TS. Trần Ngọc Giang, ThS. Nguyễn Phương Vân, ThS. Lê Thị Phương Thảo

ĐVT: VNĐ

STT	Nội dung	Dự toán			
		Người thực hiện	Số ngày công	Hệ số tiền công theo ngày (2)	Thành tiền
1	Mục chi tiền công lao động tham gia trực tiếp (1)				
1.1	Xây dựng thuyết minh đề tài	TS. Nguyễn Thị Thanh Nga	4	0,45	2.502.000
1.2	Tìm hiểu thông tin tổng quan về cơ cấu cam và biên dạng cam	TS. Vũ Thị Liên	7	0,3	2.919.000
		ThS. Vũ Như Nguyệt	8	0,3	3.336.000
1,3	Xây dựng lý thuyết tính toán biên dạng cam	TS. Nguyễn Thị Thanh Nga	5	0,45	3.127.500
		TS. Trần Ngọc Giang	9	0,3	3.753.000
		ThS. Nguyễn Phương Vân	8	0,3	3.336.000
		ThS. Lê Thị Phương Thảo	8	0,3	3.336.000
1,4	Tính toán phần tử hữu hạn cho biên dạng cam	TS. Nguyễn Thị Thanh Nga	5	0,45	3.127.500
		TS. Vũ Thị Liên	8	0,3	3.336.000
		ThS. Nguyễn Phương Vân	5	0,3	2.085.000
		ThS. Lê Thị Phương Thảo	8	0,3	3.336.000
		ThS. Vũ Như Nguyệt	7	0,3	2.919.000
1,5	Lập trình Matlab	ThS. Vũ Như Nguyệt	5	0,3	2.085.000
		TS. Vũ Thị Liên	9	0,3	3.753.000
		TS. Trần Ngọc Giang	10	0,3	4.170.000
		ThS. Lê Thị Phương Thảo	4	0,3	1.668.000
1,6	Viết báo	ThS. Nguyễn Phương Vân	12	0,3	5.004.000
		TS. Nguyễn Thị Thanh Nga	4	0,45	2.502.000
1,7	Báo cáo tại đơn vị	ThS. Vũ Như Nguyệt	5	0,3	2.085.000
		TS. Nguyễn Thị Thanh Nga	3	0,45	1.876.500
1,8	Xây dựng báo cáo khoa học tổng kết đề tài	ThS. Lê Thị Phương Thảo	3	0,3	1.251.000
		TS. Trần Ngọc Giang	6	0,3	1.251.000
		TS. Nguyễn Thị Thanh Nga	4	0,45	2.502.000
	Tổng 1				65.260.500
2	Chi mua nguyên vật liệu, dịch vụ chuyên môn kỹ thuật	Đơn vị tính	Đơn giá	Số lượng	Thành tiền
					0
	Tổng 2				0
3	Chi phí khác				
3.1	Hội thảo nội bộ của đề tài (3)				0
	Chủ trì hội thảo				0
	Thư ký hội thảo				0
	Báo cáo				0

	Đại biểu				0
3.2	Đánh giá, nghiệm thu (4)				700.000
	Chủ tịch		150.000	1	150.000
	Ủy viên hội đồng		100.000	4	400.000
	Ủy viên phản biện		150.000	1	150.000
3.3	Thư ký hành chính (5)				300.000
3.4	Văn phòng phẩm, in ấn (6)				239.500
3.5	Quản lý chung của cơ quan chủ trì (5% tổng kinh phí đề tài)				3.500.000
	Tổng 3				4.739.500
	Tổng 1+2+3				70.000.000

Cơ quan chủ trì
KT. HIỆU TRƯỞNG
PHÓ HIỆU TRƯỞNG



PGS. TS. NGUYỄN NGỌC PI

TRƯỜNG PHÒNG KHCN&HTQT

Phạm Thành Lợi

PHÒNG KH-TC

Phạm

CHỦ NHIỆM ĐỀ TÀI

NTNga

Nguyễn Thị Thanh Nga



Design General Cam Profiles Based on Finite Element Method

Thi Thanh Nga Nguyen ^{1,*}, Thang Xuan Duong ² and Van-Sy Nguyen ¹

¹ Faculty of Mechanical Engineering, Thai Nguyen University of Technology (TNUT),
Thai Nguyen City 250000, Vietnam; vansy@tnut.edu.vn

² Aachen Institute for Study in Computational Engineering Science (AICES), RWTH Aachen University,
52062 Aachen, Germany; duong@aices.rwth-aachen.de

* Correspondence: nguyennga@tnut.edu.vn

Abstract: This paper presents a general framework to design a cam profile using the finite element method from given displacements of the follower. The arbitrarily complex cam profile is described by Lagrangian finite elements, which are formed by the connectivity of nodes. In order to obtain the desired profile, a penalty-type functional that enforces the prescribed displacement of the follower is proposed. Additionally, in order to ensure convexity of the functional, a numerical stabilization scheme is used. The nodal positions are then obtained by solving a nonlinear system of equations resulting from minimizing the total functional. The geometrical accuracy of the cam profile can be controlled by the number of finite elements. A case study is considered to illustrate the flexibility, accuracy, and robustness of the proposed approach.

Keywords: cam profile; cam design; finite element; curvilinear coordinate



Citation: Nguyen, T.T.N.; Duong, T.X.; Nguyen, V.-S. Design General Cam Profiles Based on Finite Element Method. *Appl. Sci.* **2021**, *11*, 6052. <https://doi.org/10.3390/app11136052>

Academic Editor: José A. F. O. Correia

Received: 22 May 2021

Accepted: 22 June 2021

Published: 29 June 2021

Publisher's Note: MDPI stays neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.



Copyright: © 2021 by the authors. Licensee MDPI, Basel, Switzerland. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

1. Introduction

Cam mechanisms are widely used in various mechanical machines, such as machine tools, sewing machines, and engines due to their unlimited motions, operation speed, motion accuracy, and structural rigidity. In cam design, the follower motion affects the kinematic and dynamic characteristics of cam systems. Various traditional functions can be used to describe the follower motion such as harmonic, cycloidal, trapezoidal, polynomial, and piecewise polynomial [1,2]. So far, spline functions have also been used to develop the cam curves, for example, the Bezier curve [3], the B-spline curve [4–6], and the NURBS curve [7–10]. Besides, kinematics and dynamics have been considered to optimize the peak values of the displacement, velocity, acceleration, and jerk with referring to several functions, e.g., harmonic, cycloidal, and polynomial [11]. Qin and Chen [12] also proposed the kinematic optimization of cam motions for engine valve trains regarding the characteristics of polynomial cam curves. In order to achieve motion curves with good dynamic characteristics under arbitrary design conditions, the parameters of the motion model were obtained by optimizing the dynamic performance [13,14]. Related to the cam design process, the cam size optimization has been also investigated [15–17]. This plays an important role due to affect the cost of cam systems.

The design of the cam profile is one of the main tasks in designing a cam mechanism. The profile of the cam must be designed correctly to ensure the characteristics of kinematics and dynamics of cam mechanisms. However, when a priori displacement of the follower is given, obtaining the corresponding curve equations for cam profiles is nontrivial in general. Many approaches to design the profile of a cam have been proposed. The graphical method has been established by several studies for disk cams [1,18,19]. In this method, kinematic inversion is used. To increase the accuracy, the analytical method using a Cartesian coordinate system is presented by [20–22]. Since then, the analytical method has been continuously advanced, among others by Shigley and Jr. [1] and Norton [23]. In these studies, the equations of cam profile have been formulated by the loop-closure equation

and using complex polar notation. Wu et al. [24] presented a cam profile of a translating cam driven. In this approach, the follower motion can be arbitrarily chosen for only the forward or the return stroke. The desired cam profile is obtained by using the theory of envelopes [25]. To this end, the envelopes are given by fitting a tangent curve to the successive follower positions, and the cam profile is achieved by the boundary of the family. Biswas et al. [26] presented two approximate analytical methods for determining disk cam profiles of roller followers. In the first method, the average location is defined by two lines tangent of three roller positions. The cam profile is obtained by the interpolation of the roller positions. In the second method of this research, the cam profile is achieved by the intersection of the curvature center and the roller center. A systematic method for the design and analysis of cams with three circular-arc profiles is presented by Jung-Fa Hsieh [27]. This study is based on constructing a generic geometric model of cam profile and deriving the corresponding equations of the constituent circular arcs using a coordinate transformation. Moreover, using coordinate transformation, the cam profile is obtained by [28]. This study proposes a simple yet comprehensive method for the design and analysis of an indexing cam mechanism with parallel axes.

In this paper, we propose a finite element method to design a cam profile from a given displacement of the follower. To the best of our knowledge, this is the first time a finite element description is used directly for obtaining the cam profile. Compared to earlier works, the presented method contains the following merits and novelties:

- A penalty type functional to enforce the prescribed displacement of the follower is proposed;
- A stabilization scheme is added to guarantee convexity of the functional;
- For the Newton–Raphson solution method, the consistent linearization of the weak form is presented;
- The arbitrary desired accuracy of the cam profile can be achieved by increasing the number of finite elements;
- The resulting profile represented by finite elements can be used for cam manufacturing.

The remainder of the paper is structured as follows. In Section 2, the geometrical description of cam profiles is presented. Section 3 introduces the synthetical kinematics. The formulation of the general framework for the synthesis of cam mechanisms is presented in Section 4. The finite element (FE) formulation is discussed in Section 5. Section 6 then presents a solution of the finite element. The case study for this method is presented in Section 7. Finally, conclusions are drawn in Section 8.

2. Geometrical Description of Cam Profiles

In this section, we present the geometrical description of the cam profile. The differential geometry (see [29]) is used for an arbitrarily complex cam surface. The cam surface, denoted by S (see Figure 1), is represented in curvilinear coordinates as

$$x = x(\xi), \quad (1)$$

where $\xi = (\xi^1, \xi^2)$ are the curvilinear coordinates. Accordingly, the covariant and contravariant tangent vectors, a_α and a^α , at point x depending on S are calculated by

$$a_\alpha = \frac{\partial x}{\partial \xi^\alpha}, \quad (2)$$

and

$$a^\alpha := a^{\alpha\beta} a_\beta, \quad (3)$$

respectively, where

$$\begin{aligned} a^{\alpha\beta} &:= [a_{\alpha\beta}]^{-1}, \\ a_{\alpha\beta} &:= a_\alpha \cdot a_\beta \end{aligned} \quad (4)$$

are the contravariant and covariant components of the metric tensor. Here and henceforth, the summation convention is implied for repeated Greek indices, e.g., $\alpha = 1, 2$. The unit normal vector \mathbf{n} at x is defined by [30]

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|} \quad (5)$$

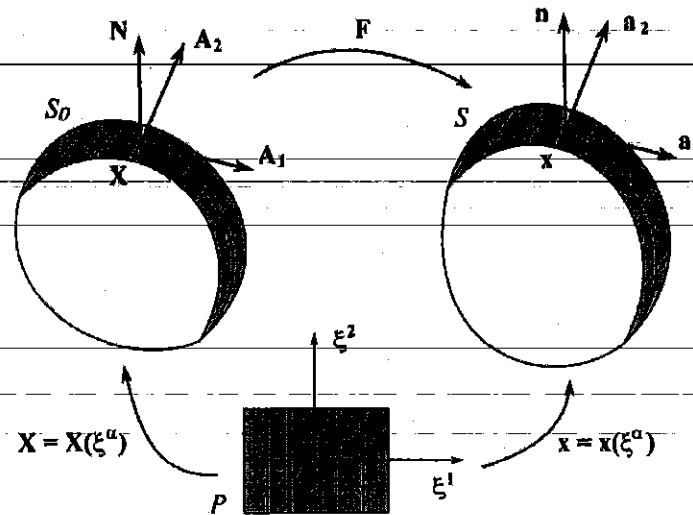


Figure 1. Mapping between parameter domain P , reference configuration S_0 , and current configuration S .

It can be shown that

$$\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\| = \sqrt{\text{deta}_{\alpha\beta}} \quad (6)$$

The curvature tensor can be computed as (see, e.g., [29])

$$\mathbf{b} = b_{\alpha\beta} \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta, \quad (7)$$

where

$$b_{\alpha\beta} := \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \quad (8)$$

3. Synthetical Kinematics

In this section, the established approach to describe the deformation of membranes (see, e.g., [29]) is employed in the context of synthetical kinematics for designing cam profiles. To obtain the desired cam profile, a given initial configuration is selected. The initial curve is then "deformed" to the desired configuration. The differences between the initial (reference) configuration S_0 and the current configuration S are shown in Figure 1. Both configurations are described by the geometrical quantities discussed in Section 2. For the reference configuration S_0 we use the upper-case symbols $X, A_\alpha, A_{\alpha\beta}, A^\alpha$, and N . The corresponding lower-case symbols $x, a_\alpha, a_{\alpha\beta}, a^\alpha$, and \mathbf{n} are used in the current configuration S . In order to characterize the deformation between the reference configuration S_0 and the current configuration S , a line element in S is considered as

$$dx = a_\alpha d\xi^\alpha, \quad (9)$$

and its corresponding line $dX = A_\alpha d\xi^\alpha$ in S_0 . So that we can write $d\xi^\alpha = A^\alpha dX$. With this, dx in the current configuration can be mapped to dX in S_0 by

$$dx = (a_\alpha \otimes A^\alpha) dX. \quad (10)$$

Here the tensor

$$\mathbf{F} = \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{A}^\alpha \quad (11)$$

denotes the deformation gradient. Vice versa

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{A}_\alpha \otimes \mathbf{a}^\alpha \quad (12)$$

maps the dX in S_0 to dx in S . Through F we thus have the following transformation

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\alpha &= \mathbf{F} \mathbf{A}_\alpha, & \mathbf{A}_\alpha &= \mathbf{F}^{-1} \mathbf{a}_\alpha, \\ \mathbf{a}^\alpha &= \mathbf{F}^{-T} \mathbf{A}^\alpha, & \mathbf{A}^\alpha &= \mathbf{F}^T \mathbf{a}^\alpha. \end{aligned} \quad (13)$$

Finally, the stretch between configurations S_0 and S is defined by

$$\begin{aligned} J &:= \frac{J_A}{J_a}, \\ J_A &:= \sqrt{\det A_{\alpha\beta}}, \\ J_a &:= \sqrt{\det a_{\alpha\beta}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Here, "det" denotes the surface determinant.

4. Governing Equation for the Synthesis of Cam Profile

In this section, the governing equation for designing cam profile is proposed. The strong form, weak form, and stabilization scheme are presented.

4.1. Strong form Statement

The point-wised governing equation for the synthesis of cam profile is given by

$$g := s - s_0 = 0, \forall x \in S, \quad (15)$$

subjected to the boundary condition

$$\bar{x} = \bar{x}, \forall x \in \Gamma_u, \quad (16)$$

where s_0 and s denote the reference and current displacement of the follower, respectively. s_0 and s will be explicitly defined for a particular type of cam. Γ_u is a subset of S . From Equation (15), the variation δg can be expressed as

$$\delta g = \delta s - \delta s_0, \quad (17)$$

where

$$\delta s = \frac{\partial s}{\partial x} \cdot \delta x, \quad \delta s_0 = \frac{\partial s_0}{\partial x} \cdot \delta x. \quad (18)$$

The strong form equation as shown in Equations (15) and (16) is not a well-posed statement since it is still missing an in-plane constraint equation. In another word, the positions of two arbitrary material points $x_1 \in S \setminus \Gamma_u$ and $x_2 \in S \setminus \Gamma_u$ can be exchanged without affecting the solution of Equation (15). The system is thus unstable and needs stabilization, which will be discussed in Section 4.4.

4.2. Penalty-Type Functional

The point-wise condition in Equation (15) can be enforced by a penalty-type functional. The penalty-type functional can be expressed as

$$\Pi_p = \int_{S_0} \frac{\epsilon}{2} g^2 dA_0, \quad (19)$$

where ϵ is the penalty parameter. The variation of the penalty-type functional is computed as

$$\delta\Pi_p = \int_{S_0} \lambda \delta g \, dA_0, \quad (20)$$

where

$$\lambda := \epsilon g \quad (21)$$

represents the pressure of the enforcement.

It should be noted that the potential in Equation (19) exactly enforces the condition at the limit, i.e., $\epsilon \rightarrow \infty$. At $\epsilon \rightarrow 0$, Π_p does not affect the system. It turns out that this property is advantageous for the Newton solution method since it allows for the application of s in an increment manner until a desired accuracy is reached.

4.3. Augmented Lagrange Functional

In order to enforce the condition in Equation (15) stronger, the Augmented Lagrange method can be used instead of the Penalty method. Accordingly, the pressure λ (see Equation (21)) is further corrected by using extra loops called augmentation steps. For this, we consider the functional

$$\Pi_p = \int_{S_0} \left(\lambda g + \frac{\epsilon}{2} g^2 \right) dA_0, \quad (22)$$

where λ is a non-negative parameter. Thus, its variation reads:

$$\delta\Pi_p = \int_{S_0} (\lambda + \epsilon g) \delta g \, dA_0. \quad (23)$$

From Equation (23), one finds the updated new parameter λ_{new} for Equation (20) as

$$\lambda_{\text{new}} = \epsilon g + \lambda_{\text{old}}. \quad (24)$$

4.4. Stabilization Governing Functional

As noted above, the system is unstable and thus cannot be solved uniquely with FEM. In this paper, a stabilization method is considered as found in [31]. The stabilization functional can be expressed by

$$\Pi_{\text{stab}} := \int_{S_0} \frac{\mu}{2} (I_1 - 2 \ln J) dA_0; \quad I_1 := A^{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}, \quad (25)$$

where μ is a given parameter. The variation of Π_{stab} can be found as

$$\delta\Pi_{\text{stab}} := \frac{\mu}{2} \int_{S_0} \tau^{\alpha\beta} \delta a_{\alpha\beta} \, dA_0, \quad (26)$$

where, $\tau^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta} - a^{\alpha\beta}$.

4.5. Stabilized weak Form Statement

The cam surface is assumed to be governed by the weak form

$$\Pi := \Pi_p + \Pi_{\text{stab}}, \quad (27)$$

where Π_p and Π_{stab} are defined in Equations (19) or (22), and (25), respectively. The cam profile is obtained by minimizing potential (27). I.e.,

$$\delta\Pi := \delta\Pi_p + \delta\Pi_{\text{stab}} = 0. \quad (28)$$

Here, $\delta\Pi_p$ and $\delta\Pi_{\text{stab}}$ are defined in Equations (20) or (23), and (26), respectively.

4.6. Linearized Weak Form

The linearization is necessary for the calculation of tangent matrices. The linearization of the potential energy as shown in Equation (20) can be computed by

$$\Delta\delta\Pi_p = \int_{S_0} \epsilon (\Delta g \delta g + g \Delta\delta g) dA_0. \tag{29}$$

Here $\Delta\delta g$ can be expressed in the form

$$\Delta\delta g = \Delta\delta s - \Delta\delta s_0. \tag{30}$$

4.7. Linearized Stabilization Term

From Equation (26), the linearization of the stabilization equation can be computed by

$$\Delta\delta\Pi_{stab} = \mu \int_{S_0} (-\Delta a^{\alpha\beta} \delta a_{\alpha\beta} + \tau^{\alpha\beta} \Delta\delta a_{\alpha\beta}) dA_0. \tag{31}$$

5. Finite Element Discretization

Equation (28) is solved by the finite element method. The surface S is therefore discretized into a set of finite elements Ω^e that are defined by nodal points x_i which corresponds to the Lagrangian finite element description (see Figure 2).

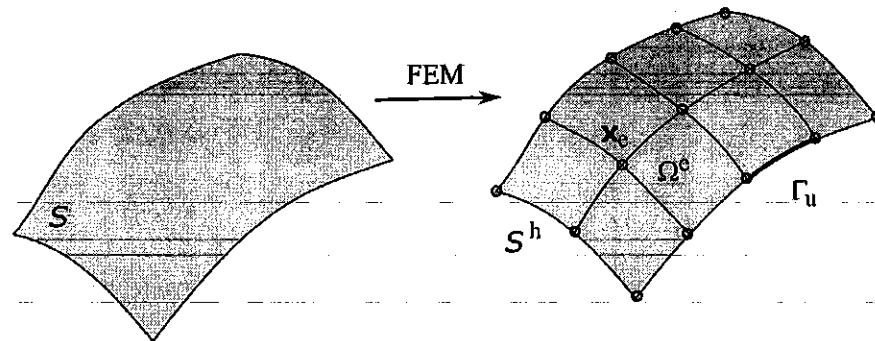


Figure 2. FE discretization of surface S .

5.1. Discretized Synthetical Kinematic Quantities

Within elements Ω^e , the geometry is approximated by the nodal interpolations

$$x \approx x^h = \sum_{i=1}^n N_i x_i, \tag{32}$$

where $N_i = N_i(\xi^\alpha)$ and n denote the shape function and number of nodes, respectively. For shorthand notation, Equations (32) and (2) can be expressed as follows:

$$x \approx x^h = N x_e, \tag{33}$$

$$a_\alpha = N_{,\xi^\alpha} x_e \tag{34}$$

with $N_{,\xi^\alpha} = \partial N / \partial \xi^\alpha$.

To write the discretized weak form of the governing equation, the variation of the tangent vector a_α , current nodal position vector of the nodes x , and the unit normal vector n are required.

The variation of current position vector in Equation (33) and the tangent vector in Equation (34) is written as

$$\delta x = N \delta x_e \tag{35}$$

$$\delta a_\alpha = N_{,\xi^\alpha} \delta x_e \tag{36}$$

The variation of the unit normal vector is given by [30]

$$\delta \mathbf{n} = \mathbf{R}_A^\alpha \delta \mathbf{a}_\alpha, \tag{37}$$

with

$$\mathbf{R}_A^\alpha = -(\mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{n}). \tag{38}$$

The linearization of vector \mathbf{n} is followed from Equation (37) as

$$\Delta \delta \mathbf{n} = (-\Delta \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{n}) \delta \mathbf{a}_\alpha - (\mathbf{a}^\alpha \otimes \Delta \mathbf{n}) \delta \mathbf{a}_\alpha, \tag{39}$$

where $\Delta \mathbf{a}^\alpha$ is can be found in [31]

$$\Delta \mathbf{a}^\alpha = \mathbf{B}^{\alpha\beta} \Delta \mathbf{a}_\beta \tag{40}$$

with $\mathbf{B}^{\alpha\beta} = \mathbf{a}^{\alpha\beta} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - \mathbf{a}^\beta \otimes \mathbf{a}^\alpha$, and $\Delta \mathbf{a}_\alpha$ is the same manner as $\delta \mathbf{a}_\alpha$ from Equation (36). The variation of J is given respectively in [29]

$$\delta J = J \mathbf{a}^\alpha \cdot \delta \mathbf{a}_\alpha. \tag{41}$$

Further, the variation and the linearization of $\mathbf{a}_{\alpha\beta}$ and $\mathbf{a}^{\alpha\beta}$ are:

$$\delta \mathbf{a}_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \delta \mathbf{a}_\beta + \delta \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta, \tag{42}$$

$$\delta \mathbf{a}^{\alpha\beta} = \mathbf{a}^\alpha \cdot \delta \mathbf{a}^\beta + \delta \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta, \tag{43}$$

$$\Delta \delta \mathbf{a}_{\alpha\beta} = \Delta \mathbf{a}_\alpha \cdot \delta \mathbf{a}_\beta + \delta \mathbf{a}_\alpha \cdot \Delta \mathbf{a}_\beta. \tag{44}$$

5.2. Discretized Weak Form of the Governing Equation

With the expressions in Section 5.1, the weak form is now discretized. Accordingly, Equation (20) can be written as follows:

$$\delta \Pi_P \approx \delta \Pi_P^h = \delta \mathbf{x}^T \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{f}_P^e, \tag{45}$$

where

$$\mathbf{f}_P^e := \int_{\Omega_0^e} \mathbf{g}_P \, dA_e. \tag{46}$$

In Equation (46), \mathbf{g}_P is to be defined for a given type of cam. The linearization can be expressed as

$$\Delta \delta \Pi_P = \delta \mathbf{x}^T \mathbf{k}_P \Delta \mathbf{x}, \tag{47}$$

where \mathbf{k}_P is the tangent matrix. It can be written as

$$\mathbf{k}_P = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{k}_P^e. \tag{48}$$

5.3. Discretized Stabilization Terms

The weak form of the stabilization equation is discretized. The formula as shown in Equation (26) can be expressed as

$$\delta \Pi_{\text{stab}} \approx \delta \Pi_{\text{stab}}^h = \delta \mathbf{x}^T \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{f}_{\text{stab}}^e, \tag{49}$$

where

$$\mathbf{f}_{\text{stab}}^e := \int_{\Omega_0^e} \mathbf{g}_{\text{stab}} \, dA_e. \tag{50}$$

The linearization of the stabilization functional can be expressed as

$$\Delta\delta\Pi_{\text{stab}} = \delta\mathbf{x}^T \mathbf{k}_{\text{stab}} \Delta\mathbf{x}, \tag{51}$$

where the tangent matrix can be written by

$$\mathbf{k}_{\text{stab}} := \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{k}_{\text{stab}}^e. \tag{52}$$

6. Finite Element Solution

6.1. Solution Procedure

The discretized weak form as shown in Equations (45) and (49) of the governing equation and the stabilization equation can be written as

$$\delta\mathbf{x}^T [\mathbf{f}_p + \mathbf{f}_{\text{stab}}] = 0 \quad \forall \delta\mathbf{x}, \tag{53}$$

where

$$\mathbf{f}_p := \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{f}_p^e; \mathbf{f}_{\text{stab}} := \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{f}_{\text{stab}}^e. \tag{54}$$

The nonlinear in Equation (53) can be solved by numerical methods. The Newton-Raphson method is used to solve this equation. Equation (53) can be described as

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) := \mathbf{f}_p + \mathbf{f}_{\text{stab}} = 0. \tag{55}$$

At iteration i , an approximation solution of cam profile can be sought and denoted by \mathbf{x}^i . The method can be described by Gouri Dhatt, et al. [32]

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^i) := \mathbf{f}(\mathbf{x}^{i-1} + \Delta\mathbf{x}^i) \approx 0, \tag{56}$$

The algorithm is obtained by developing this residual into a Taylor series in the vicinity of \mathbf{x}^{i-1}

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^{i-1} + \Delta\mathbf{x}^i) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{i-1}) + \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{i-1}} \Delta\mathbf{x}^i + \dots = 0, \tag{57}$$

and

$$\mathbf{x}^i = \mathbf{x}^{i-1} + \Delta\mathbf{x}^i, \tag{58}$$

By ignoring terms greater than one, we get

$$\mathbf{K} \Delta\mathbf{x}^i = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{i-1}), \tag{59}$$

where

$$\mathbf{K} := \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{k}_p + \mathbf{k}_{\text{stab}} \tag{60}$$

is the tangent matrix.

6.2. Numerical Quadrature

For finite element computations, the integral for the weak form and the tangent matrices must be evaluated. These integrations can be performed on the element level. Since the integration is carried out in the finite element analysis of the reference configuration, the parameter domain coordinate $\xi^\alpha \in [-1, +1]$ must be transformed to this configuration (see Figure 3).

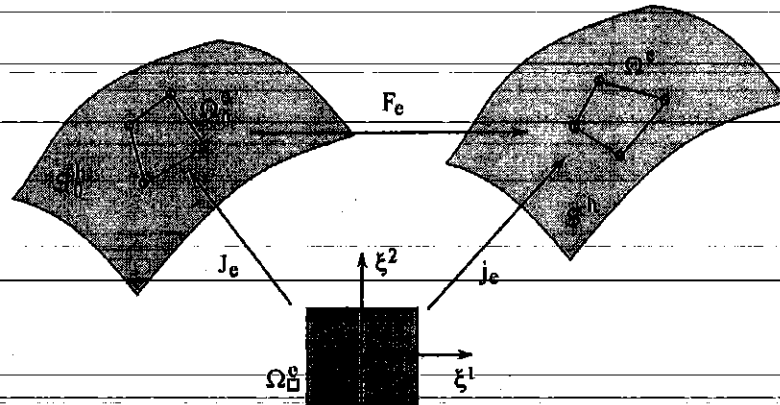


Figure 3. Mapping Gaussian integration between element Ω^e of parameter domain P , element Ω_0^e of discretized reference configuration S_0^h and element Ω^e of the discretized current configuration S^h .

The Jacobian can be calculated as follows [30]:

$$\begin{aligned}
 J_e &= \frac{\partial X}{\partial \xi} \approx \sum_A^n X_A \otimes \frac{\partial N_A}{\partial \xi}, \\
 j_e &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \approx \sum_A^n x_A \otimes \frac{\partial N_A}{\partial \xi}, \\
 F_e &= j_e J_e^{-1}.
 \end{aligned}
 \tag{61}$$

The integration form is then carried out with the standard Gaussian quadrature on the parameter domain. Thus, from Equations (46) and (50), the governing equation of each element can be written as

$$\int_{\Omega_e} g \, dA_e = \int_{\Omega_e} g_p \, dA_e + \int_{\Omega_e} g_{stab} \, dA_e
 \tag{62}$$

The integration in Equation (62) is computed by

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_e} g \, dA_e &:= \int_{\Omega} g_p(\xi) \det J_e \, d\xi + \int_{\Omega} g_{stab}(\xi) \det J_e \, d\xi \\
 &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} g_p(\xi^\alpha) \det J_e \, d\xi^1 d\xi^2 + \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} g_{stab}(\xi^\alpha) \det J_e \, d\xi^1 d\xi^2.
 \end{aligned}
 \tag{63}$$

The integration will be done numerically. n_{gp} is representative for the number of Gauss points. Hence, the integral in Equation (63) will be approximated by

$$\int_{\Omega_e} g \, dA_e \approx \sum_{gp=1}^{n_{gp}} g_p(\xi_{gp}) \det J_e W_p + \sum_{gp=1}^{n_{gp}} g_{stab}(\xi^\alpha) \det J_e W_p.
 \tag{64}$$

Here, W_p is weighting factors and ξ_{gp} denotes the coordinates of the evaluation points. The integration for the whole system can be computed as follows:

$$\sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} g \, dA_e \approx \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{gp=1}^{n_{gp}} g_p(\xi_{gp}) \det J_e W_p + \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{gp=1}^{n_{gp}} g_{stab}(\xi^\alpha) \det J_e W_p.
 \tag{65}$$

6.3. Computational Algorithm

This section presents a computational to solve a cam profile. With the above-discussed framework, the computational algorithm of a cam profile that satisfies a prescribed displacement of the follower is given in Table 1.

Table 1. The computational algorithm.

1. Defined the initial configuration
2. Step loop
<ul style="list-style-type: none"> Given parameters: tolerances for the reduced penalty parameter μ, and augmented Lagrangian; penalty parameter ϵ; parameter λ
2.1. Newton iteration:
<ul style="list-style-type: none"> Compute $k_p, k_{stab}, f_p, f_{stab}$, as shown in Equations (48), (52), and (54) respectively Apply boundary conditions Step 1: Load step for penalty method Step 2: Reduce parameter μ Step 3: Update new parameter λ of Augmented Lagrangian method following as equation $\lambda_{new} = \epsilon g + \lambda_{old}$ Solve $K \Delta x^i = -f(x^{i-1})$ and update $x^i = x^{i-1} + \Delta x^i$
<ul style="list-style-type: none"> Update reference configuration

7. Case Study

This section presents a case study to demonstrate the procedure of this work. We consider the cam mechanism with a flat-face follower for illustration. The finite element is therefore reduced to line elements. With the general designing framework discussed above, an explicit expression for the follower displacement is required. The expression is, however, generally dependent on the type of cam. The cam curves resulted from the proposed framework are compared with the analytical solution.

7.1. Computation of Cam Flat-Face Follower

With the flat-face follower, as shown in Figure 4, the function of the follower displacement s_0 can be written as follows:

$$s_0 = f(\varphi), \tag{66}$$

where φ is the angle of the camshaft, and the displacement function $f(\varphi)$ is shown in Appendix A.

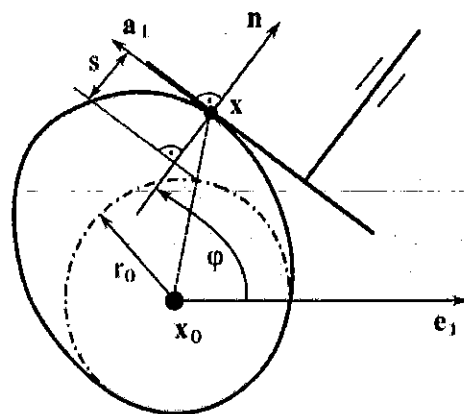


Figure 4. Calculation parameters of cam flat-face follower.

For cam plate, we can describe the tangent vector and others with $\alpha = 1$ and $\beta = 1$. ξ^1 is denoted by ξ . From the variation of the stabilized equation (see Equation (26)), f_{stab}^e can be computed as follows:

$$f_{stab}^e = \int_{\Omega_0^e} \mu (A^{11} - a^{11}) N_{,\xi}^T a_1 dA_e. \tag{67}$$

Likewise, the tangent matrix is calculated by

$$k_{stab}^e = (k_{stab1}^e + k_{stab2}^e), \tag{68}$$

where

$$\begin{aligned} k_{stab1}^e &= \int_{\Omega_0^e} 2\mu a^{11} N_{,\xi}^T a_1 a_1 N_{,\xi}^T dA_e, \\ k_{stab2}^e &= \int_{\Omega_0^e} \mu (A^{11} - a^{11}) N_{,\xi}^T N_{,\xi} dA_e. \end{aligned} \tag{69}$$

As shown in Figure 4, the displacement of the follower can be computed as

$$s := x \cdot n - r_0. \tag{70}$$

Taking the variation of the current displacement in Equation (70) is presented by

$$\delta s = \delta x \cdot n + x \cdot \delta n. \tag{71}$$

The angle of the camshaft can be written as (see Figure 4)

$$\varphi = \arccos(n \cdot e_1). \tag{72}$$

The variation of s_0 can be also computed by

$$\delta s_0 = -d_c e_1 \cdot \delta n. \tag{73}$$

In Equation (73), d_c is calculated in Appendix A.

From the calculation above, f_p^e can be simply obtained by

$$f_p^e = \int_{\Omega_0^e} (N^T n + N_{,\xi}^T R_A^T b) dA_e, \tag{74}$$

where, $R_A := R_A^1$. The tangent matrix is

$$k_p^e = k_{p1}^e + k_{p2}^e. \tag{75}$$

Here

$$\begin{aligned} k_{p1}^e &= \int_{\Omega_0^e} \epsilon (n \otimes n N + n \otimes b R_A N_{,\xi}) dA_e \\ &+ \int_{\Omega_0^e} \epsilon N_{,\xi}^T R_A^T (b \otimes n N + b \otimes b R_A N_{,\xi}) dA_e, \end{aligned} \tag{76}$$

and

$$k_{p2}^e = \int_{\Omega_0^e} (N^T R_A N_{,\xi} + N_{,\xi}^T R_A^T G_1 - N_{,\xi}^T G_2 N_{,\xi}) dA_e. \tag{77}$$

Tensor b in Equation (76) and tensors G_1, G_2 in Equation (77) are defined in Appendix A.

In the example, the cycloid function for the displacement of the follower as shown in Equations (A1) and (A2) in Appendix A is used for the design of the cam profile. The types of motion programs are rise, fall, and dwell. These motions are defined by the angle of segments, i.e., $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 120^\circ$ and the lift $L = 5$ mm. By using the computational algorithm in Section 6.3, the cam profile is shown in Figure 5a and the kinematic characteristics of the follower including displacement, velocity, and acceleration are presented in Figure 5b–d. The finite element solution of the cam profile is compared with the analytical solution as shown in Figure 5. From this figure, it can be seen that there are very small differences between the FE solution and the analysis solution.

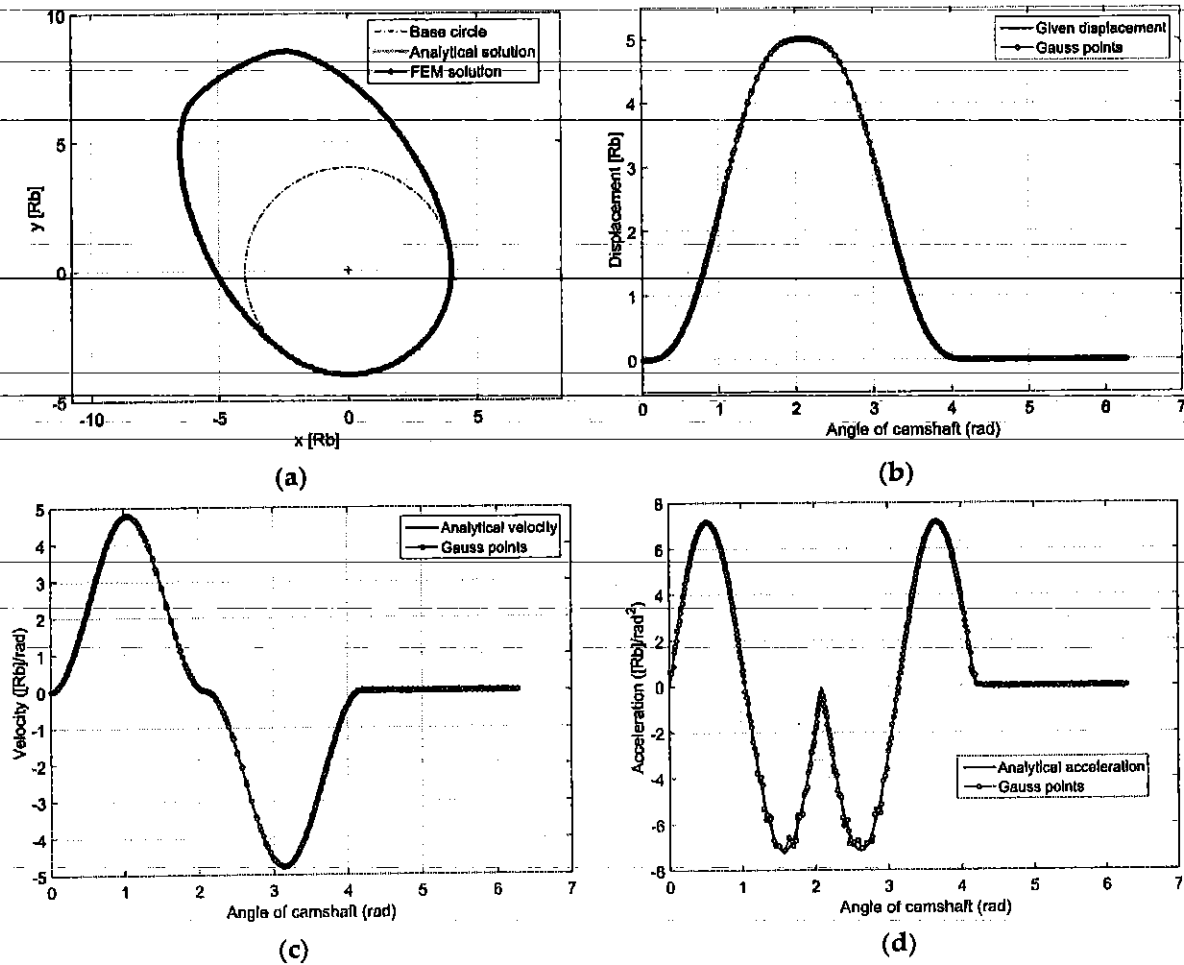


Figure 5. Compare between FE solution with 128 elements and analytical solution (a) comparison of cam profile; (b) comparison of displacement; (c) comparison of velocity; (d) comparison of acceleration.

In this example, 128 elements are used to compute the cam profile. In the penalty step, the maximum difference between the FE displacement and the input displacement is small, i.e., $\epsilon = 1.9 \times 10^{-3}$. For the second step, the stabilization parameter μ is reduced from 100 to 25, which increases the accuracy in the displacement to $\epsilon = 7.0282 \times 10^{-5}$. For the augmented step, the accuracy is further improved with $\epsilon = 2.6133 \times 10^{-5}$.

Next, the size of the cam is considered in the cam design process since it decides the cost of the cam follower. The cam size is influenced by the base circle r_0 . Usually, a minimum base circle, denoted by $r_{0_{min}}$, can be defined by (see Robert L. Norton [23])

$$r_{0_{min}} > \rho_{min} - s_{@a_{min}} - a_{min}, \tag{78}$$

where ρ_{min} , a_{min} , $s_{@a_{min}}$ are the minimum radius of curvature, minimum acceleration, and the displacement value at a_{min} , respectively.

In order to determine the minimum base circle, the parameters including ρ_{min} , $s_{@a_{min}}$, and a_{min} need to be computed. The minimum radius of curvature ρ_{min} is calculated from Equation (7). Values of $s_{@a_{min}}$ and a_{min} are determined from the displacement and acceleration functions. Substituting values of the parameters into Equation (78), the minimum base circle is 3.9878 mm. In addition, with the cam flat-face follower, the radius of curvature must be positive to maintain the contact between the cam and the follower.

7.2. Influence of Parameters ϵ and μ

Next, the influence of penalty parameters ϵ and μ is discussed in this section. The accuracy of the cam profile is estimated by parameter ϵ as shown in Figure 6a. It is clearly seen that an accurate solution is obtained for a sufficiently large ϵ . However, it should be noted that for the augmented method, a much smaller penalty parameter is already sufficient for the comparative accuracy due to the extra correction loop.

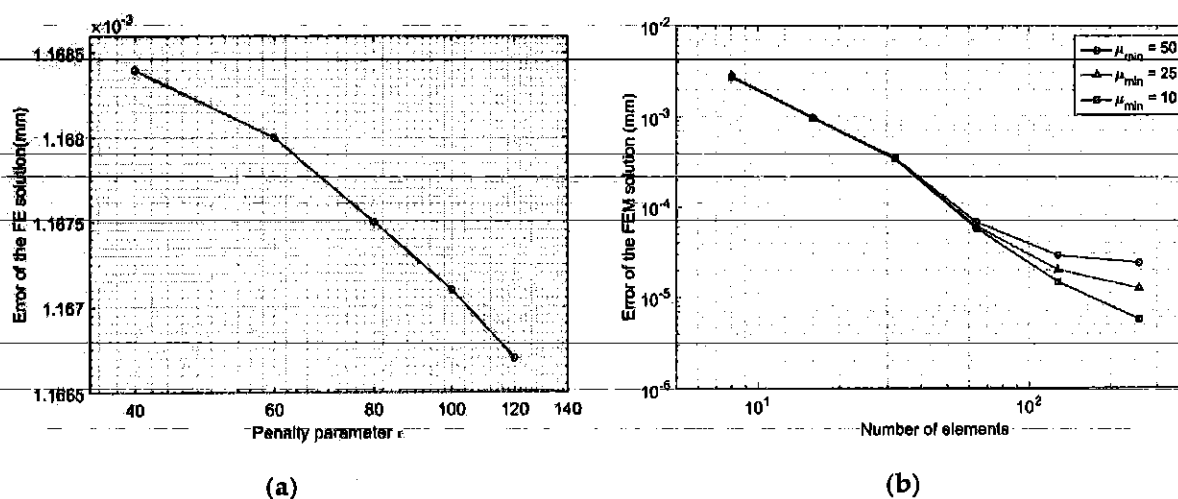


Figure 6. Influence of parameters ϵ and μ : (a) penalty parameter ϵ ; (b) parameter μ .

Figure 6b further shows the convergence of the finite element calculation with mesh refinement for three minimum values of the parameter $\mu = 50, 25,$ and 10 . It is observed from the figure that the rate of convergence increases with decreasing the parameter μ . On the other hand, for the fine meshes, parameter μ affects the convergent rate significantly, i.e., the smaller stabilization parameter, the more accuracy is obtained.

8. Conclusions

This paper presents a new and general computational formulation for the synthesis of cam mechanisms using the finite element method. The formulation is based on a general theoretical description of the cam curve in curvilinear coordinates. The governing equation for the synthesis of cam profile is proposed. The penalty-type functional is proposed for the weak form. The stabilization functional is further added for convexity of the total potential. The discretization of the weak form is derived in the framework of the finite element. The Gaussian quadrature is used to integrate the finite element computation. The cam profile is obtained by solving a nonlinear system of equations resulting from minimizing the total functional.

The case study of the flat-face cam mechanism demonstrates that the formulation is able to handle all aspects accurately, robustly, and efficiently. The proposed framework can be applied for more general cam mechanisms, which is a subject of future work.

Author Contributions: Data curation, V.-S.N.; Formal analysis, T.X.D. and V.-S.N.; Investigation, T.T.N.N.; Methodology, T.T.N.N. and T.X.D.; Resources, T.X.D.; Writing—original draft, T.T.N.N.; Writing—review & editing, T.T.N.N. and T.X.D. All authors have read and agreed to the published version of the manuscript.

Funding: This research received no external funding.

Institutional Review Board Statement: Not applicable.

Informed Consent Statement: Not applicable.

Data Availability Statement: Data are available from the authors upon request.

Acknowledgments: This work is supported by Thai Nguyen University of Technology (TNUIT).

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest. They do not know of any competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

Appendix A

This appendix presents the displacement function of the follower $f(\varphi)$, vector \mathbf{b} and tensors $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$ in Section 7.

The displacement function $f(\varphi)$ for the rise and fall can be expressed as

$$f^{\text{rise}}(\varphi) = L \left(\frac{\varphi}{\beta_1} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi\varphi}{\beta_1} \right), \quad (\text{A1})$$

$$f^{\text{fall}}(\varphi) = L \left(1 - \frac{\varphi}{\beta_2} + \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi\varphi}{\beta_2} \right). \quad (\text{A2})$$

Vector \mathbf{b} is defined by

$$\mathbf{b} := \mathbf{x} + d_c \mathbf{e}_1 \quad (\text{A3})$$

Further, tensors \mathbf{G}_1 and \mathbf{G}_2 are defined by

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{N} + d_{c1} \mathbf{A} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \mathbf{R}_A \mathbf{N}_{\varepsilon_1}, \quad (\text{A4})$$

$$\mathbf{G}_2 = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{b}) \mathbf{B}^{11} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}^1) \mathbf{R}_A \quad (\text{A5})$$

with

$$d_c = f_{,\varphi} c_s, \quad (\text{A6})$$

and

$$d_{c1} = f_{,\varphi\varphi} c_s^2 + f_{,\varphi} c_s \sin \varphi \cos \varphi. \quad (\text{A7})$$

here

$$c_s = \frac{1}{\sqrt{(1 - (\cos \varphi)^2)}}. \quad (\text{A8})$$

References

1. Uicker, J.J.; Pennock, G.R.; Shigley, J.E.; McCarthy, J.M. *Theory of Machines and Mechanisms*, 5th ed.; Oxford University Press: New York, NY, USA, 2003.
2. Mermelstein, S.P.; Acar, M. Optimising cam motion using piecewise polynomials. *Eng. Comput.* **2003**, *19*, 241–254. [CrossRef]
3. Cardona, S.; Zayas, E.; Jordi, L.; Català, P. Synthesis of displacement functions by Bézier curves in constant-breadth cams with parallel flat-faced double translating and oscillating followers. *Mech. Mach. Theory* **2013**, *62*, 51–62. [CrossRef]
4. Sateesh, N.; Rao, C.S.; Reddy, T.A.J. Optimisation of cam-follower motion using B-splines. *Int. J. Comput. Integr. Manuf.* **2009**, *22*, 515–523. [CrossRef]
5. Jiang, J.K.; Iwai, Y.R. Improving the B-Spline Method of Dynamically-Compensated Cam Design by Minimizing or Restricting Vibrations in High-Speed Cam-Follower Systems. *J. Mech. Des.* **2009**, *131*, 041003. [CrossRef]
6. Nguyen, T.T.N.; Nguyen, V.S.; Nguyen, T.B.N.; Vu, T.L. An Evaluation of B-Spline for Synthesis of Cam Motion with a Large Number of Output Conditions. In *Advances in Engineering Research and Application, Proceedings of the International Conference on Engineering Research and Applications, ICERA 2020, Thai Nguyen, Vietnam, 1–2 December 2020*; Nguyen, D.C., Vu, N.P., Long, B.T., Puta, H., Eds.; Springer: Heidelberg, Germany.
7. Müller, M.; Hüsing, M.; Beckermann, A.; Corves, B. Linkage and Cam Design with MechDev Based on Non-Uniform Rational B-Splines. *Machines* **2020**, *8*, 5. [CrossRef]
8. Nguyen, T.T.N.; Kurtenbach, S.; Hüsing, M.; Corves, B. A general framework for motion design of the follower in cam mechanisms by using non-uniform rational B-spline. *Mech. Mach. Theory* **2019**, *137*, 374–385. [CrossRef]
9. Nguyen, T.T.N.; Kurtenbach, S.; Hüsing, M.; Corves, B. Evaluating the Knot Vector to Synthesize the Cam Motion Using NURBS. *Mech. Mach. Sci.* **2018**, *50*, 209–216. [CrossRef]
10. Nguyen, T.T.N.; Kurtenbach, S.; Hüsing, M.; Corves, B. Improving the Kinematics of Motion Curves for Cam Mechanisms Using NURBS. *Mech. Mach. Sci.* **2018**, *52*, 79–88. [CrossRef]

11. Ouyang, T.; Wang, P.; Huang, H.; Zhang, N.; Chen, N. Mathematical modeling and optimization of cam mechanism in delivery system of an offset press. *Mech. Mach. Theory* **2017**, *110*, 100–114. [CrossRef]
12. Qin, W.; Chen, Y. Study on optimal kinematic synthesis of cam profiles for engine valve trains. *Appl. Math. Model.* **2014**, *38*, 4345–4353. [CrossRef]
13. Xia, B.-Z.; Liu, X.-C.; Shang, X.; Ren, S.-Y. Improving cam profile design optimization based on classical splines and dynamic model. *J. Cent. South. Univ.* **2017**, *24*, 1817–1825. [CrossRef]
14. Yu, J.; Huang, K.; Luo, H.; Wu, Y.; Long, X. Manipulate optimal high-order motion parameters to construct high-speed cam curve with optimized dynamic performance. *Appl. Math. Comput.* **2020**, *371*, 124953. [CrossRef]
15. Flores, P. A Computational Approach for Cam Size Optimization of Disc Cam-Follower Mechanisms with Translating Roller Followers. *J. Mech. Robot.* **2013**, *5*, 041010. [CrossRef]
16. Navarro, O.; Wu, C.-J.; Angeles, J. The size-minimization of planar cam mechanisms. *Mech. Mach. Theory* **2001**, *36*, 371–386. [CrossRef]
17. Yu, Q.; Lee, H.P. Size optimization of cam mechanisms with translating roller followers. *Proc. Inst. Mech. Eng. Part C* **1998**, *212*, 381–386. [CrossRef]
18. Rothbart, H.A. *Cam Design Handbook*; McGraw-Hill: New York, NY, USA, 2004.
19. Myszka, D.H. *Machines and Mechanisms: Applied Kinematic Analysis*, 4th ed.; Prentice Hall: Upper Saddle River, NJ, USA, 2012.
20. Gupta, B.V.R. *Theory of Machines: Kinematics and Dynamics*; I.K. international Pvt: New Delhi, India, 2010.
21. Li, F.; Feng, X. The design of parallel combination for cam mechanism. *Procedia Environ. Sci.* **2011**, *10*, 1343–1349.
22. Shala, A.; Likaj, R. Analytical Method for Synthesis of Cam Mechanism. *Int. J. Curr. Eng. Technol.* **2013**, *133*, 432–435.
23. Norton, R. *Design of Machinery*; McGraw-Hill: New York, NY, USA, 2003.
24. Wu, L.-I.; Chang, W.-T.; Liu, C.-H. The design of varying-velocity translating cam mechanisms. *Mech. Mach. Theory* **2007**, *42*, 352–364. [CrossRef]
25. Chen, F.Y. *Mechanics and Design of Cam Mechanisms*; Pergamon Press: New York, NY, USA, 1982.
26. Biswas, A.; Stevens, M.; Kinzel, G.L. A comparison of approximate methods for the analytical determination of profiles for disk cams with roller followers. *Mech. Mach. Theory* **2004**, *39*, 645–656. [CrossRef]
27. Hsieh, J.-F. Design and analysis of cams with three circular-arc profiles. *Mech. Mach. Theory* **2010**, *45*, 955–965. [CrossRef]
28. Hsieh, J.-F. Design and analysis of indexing cam mechanism with parallel axes. *Mech. Mach. Theory* **2014**, *81*, 155–165. [CrossRef]
29. Sauer, R.A.; Duong, T.X.; Corbett, C.J. A computational formulation for constrained solid and liquid membranes considering isogeometric finite elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **2014**, *271*, 48–68. [CrossRef]
30. Swiggers, P. *Computational Contact Mechanics*, 2nd ed.; Springer: Heidelberg, Germany, 2006.
31. Sauer, R.A. A contact theory for surface tension driven systems. *Math. Mech. Solids* **2016**, *21*, 305–325. [CrossRef]
32. Dhatt, G.; Touzot, G.; Lefrançois, E. *Finite Element Method*, 1st ed.; Wiley-ISTE: Hoboken, NJ, USA, 2012.