ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

BÁO CÁO TỔNG KẾT
ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP TRƯỜNG

XÂY DỰNG VIDEO BÀI GIẢNG HỌC PHẦN ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Mã số: T2022-VD20

Chủ nhiệm đề tài: ThS. Phạm Thị Minh Hạnh

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2023

TRƯỜNG ĐẠI HỌC
KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP
Đơn vị: Khoa KHCB&ƯD

THÔNG TIN KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

1. Thông tin chung:

- Tên đề tài: **Xây dựng video bài giảng học phần Đại số tuyến tính**
- Mã số: **T2022-VD20**
- Chủ nhiệm: ThS. Phạm Thị Minh Hạnh
- Cơ quan chủ trì: Đại học Kỹ thuật Công nghiệp
- Thời gian thực hiện: 04/2022 – 10/2023

2. Mục tiêu:

+ Xây dựng 30 video bài giảng lý thuyết cho học phần Đại số tuyến tính.
+ Cung cấp các video bài giảng học phần Đại số tuyến tính dùng làm tài liệu học tập cho sinh viên trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp Thái Nguyên.

3. Kết quả nghiên cứu:

Đề tài đã hoàn thành việc quay 30 video giảng dạy học phần Đại số tuyến tính dùng làm tư liệu tự học, tự nghiên cứu cho sinh viên trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp Thái Nguyên.

4. Sản phẩm.

- Sản phẩm đào tạo: *không*
- Sản phẩm khoa học: *không*
- Sản phẩm ứng dụng: Ngân hàng gồm 30 video bài giảng học phần Đại số tuyến tính

5. Hiệu quả và khả năng áp dụng

Kết quả nghiên cứu đã đáp ứng được mục tiêu nghiên cứu của đề tài: Cung cấp các video gồm 30 video bài giảng học phần Đại số tuyến tính dùng làm tài liệu học tập cho sinh viên trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp Thái Nguyên.

6. Khả năng áp dụng và phương thức chuyển giao kết quả nghiên cứu

Kết quả của đề tài có thể dùng làm tài liệu học tập học phần Đại số tuyến tính cho giảng viên và sinh viên trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp – Đại học Thái Nguyên, giúp sinh viên có thể tự học trước bài học hoặc tự nghiên cứu, đào sâu kiến thức sau giờ học trên lớp, qua đó giúp các em hiểu và yêu thích môn học cũng như đạt kết quả tốt ở môn học này.

Ngày 5 tháng 10 năm 2023

Cơ quan chủ trì	**Chủ nhiệm đề tài**
KT.HIỆU TRƯỞNG	
PHÓ HIỆU TRƯỞNG	
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN	
PGS.TS. Vũ Ngọc Pi	**Phạm Thị Minh Hạnh**

THAI NGUYEN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Faculty of Fundamental Science

INFORMATION ON RESEARCH RESULTS

1. General information:

Project title: Making the video lectures for the course Linear Algebra.

Projection code: T2022 – VD20.

Coordinator: M.Sc. Phạm Thị Minh Hạnh

Implementing Institution: Thai Nguyen University of Technology.

Duration: from April 2022 to October 2023.

2. Objectives:

+ Making a series of 30 video lectures for the course Linear Algebra. This resourses is used as the useful learning materials for students at Thai Nguyen University of Technology.

+ Each lecture includes examples and exercises to illustrate the subject in each section. Therefore, the students has chance to review each lecture contents by themselves and to understand the lecture deeply.

3. Research results:

The project has completed 30 video lectures of the course Linear Algebra to be used as self-study materials for students at Thai Nguyen University of Technology.

4. Products:

- Application products: a series of the video lectures for the course of Linear Algebra has been made as a reference resourse for the students in TNUT as well as the learners across the country who are using the internet.

5. Effects:

The results of research satisfy the objective of project: the series of video lectures for the course Linear Algebra made include useful and well organized sections basing on the curriculums for students in Engineering, Economic majors at Thai Nguyen University of Technology. This open resources can be used as the learning materials for students in TNUT as well as users across the country so that it provides the chance to promote the trademark of Thai Nguyen University of Technology.

6. Applicability and Transferred Method of the research results

The results of the scientific project can be used as an open resourses of the course Linear Algebra for students at Thai Nguyen University of Technology, helping students to learn by themselves before the lesson taken place or to review on their own after class time. Thereby, it can help them to understand deeply the subject as well as achieve good results in this course.

This useful and well designed resource also provides promising materials for students who come from different part of the country to learn about this course. Therefore, the trademark of the university can be spreaded out through the country.

MỤC LỤC

I. MỞ ĐẦU

1. TỔNG QUAN VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU

Hiện nay với sự phát triển của internet, người học có thể dễ dàng tìm kiếm được những video bài giảng về học phần Đại số tuyến tính trên các ứng dụng phần mềm và các nền tảng mạng xã hội, tuy nhiên bên cạnh những kênh bài giảng chất lượng thì cũng có nhiều kênh chưa được kiểm chứng về độ uy tín và chính xác. Hơn nữa, các video bài giảng mà người học dễ dàng tìm kiếm được trên mạng thường chỉ là các video đơn lẻ với các phần nội dung không liền mạch và không trùng khớp với nội dung kiến thức theo đề cương học phần Đại số tuyến tính đang được giảng dạy tại trường Đại học Kỹ thuật Công Nghiệp – Đại học Thái Nguyên.

2. TÍNH CẤP THIẾT CỦA VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU

TÍNH CẤP THIẾT CỦA ĐỀ TÀI

Đại số tuyến tính là học phần toán bắt buộc thuộc khối kiến thức giáo dục đại cương được giảng dạy cho tất cả sinh viên năm thứ nhất ở trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp – Đại học Thái Nguyên. Học phần được giảng dạy trong thời lượng 2 tín chỉ nhưng với khối lượng kiến thức khá nhiều. Chúng tôi nhận thấy để nâng cao chất lượng giảng dạy và học tập cho học phần Đại số tuyến tính tại trường Đại học Kỹ thuật Công Nghiệp trong tình hình dịch Covid – 19 như hiện nay cần xây dựng một kênh tự học để hỗ trợ sinh viên có thể dễ dàng tự tìm hiểu và nghiên cứu các nội dung kiến thức ở ngoài giờ lên lớp. Vì vậy chúng tôi đề xuất đề tài: "*Xây dựng video bài giảng học phần Đại số tuyến tính*". Các video bài giảng được thiết kế logic và hệ thống, có nội dung bám sát đề cương môn học. Đây sẽ là nguồn tài liệu hữu ích phục vụ nhu cầu tự học của sinh viên đồng thời cũng hỗ trợ công tác giảng dạy trực tiếp cũng như trực tuyến của giảng viên bộ môn Toán. Sử dụng các video bài giảng sẽ giúp giảng viên và sinh viên có thêm thời gian thảo luận, trao đổi và tìm hiểu sâu hơn các nội dung kiến thức trong các giờ lên lớp góp phần nâng cao hiệu quả và chất lượng giờ học.

II. NỘI DUNG

1. TÓM TẮT ĐỀ TÀI

Đề tài hướng đến mục tiêu là xây dựng ngân hàng gồm 30 video bài giảng lý thuyết của học phần Đại số tuyến tính để dùng làm tài liệu học tập trực quan cho sinh viên trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp – Đại học Thái Nguyên.

- Đề tài gồm các mục nội dung cụ thể như sau:

Chương 1. Ma trận – Định thức – Hệ phương trình tuyến tính.

Chương 2. Không gian véc tơ – Không gian Euclid.

Chương 3. Ánh xạ tuyến tính.

Chương 4. Trị riêng và véc tơ riêng

2. CHƯƠNG 1. MA TRẬN – ĐỊNH THỨC – HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Theo đề cương môn học Đại số tuyến tính, nội dung của Chương 1 được chia thành các mục sau:

1.1. Ma trận

1.2. Định thức

1.3. Ma trận nghịch đảo

1.4. Hệ phương trình tuyến tính

1.5. Hạng của ma trận – Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Với các mục nội dung như trên, nhóm tác giả đã chia Chương 1 thành 14 video, với nội dung của các video như sau:

1.1.Ma trận. (Video 1,2)

1.2. Định thức. (Video 3,4,5,6)

1.3. Ma trận nghịch đảo. (Video 7,8)

1.4. Hệ phương trình tuyến tính. (Video 9,10,11,12)

1.5. Hạng của ma trận – Hệ phương trình tuyến tính tổng quát. (Video 13,14)

3. CHƯƠNG 2. KHÔNG GIAN VÉC TƠ – KHÔNG GIAN EUCLID

Theo đề cương môn học Đại số tuyến tính, nội dung của Chương 2 được chia thành các mục sau:

2.1. Không gian véc tơ.

2.2. Không gian con và hệ sinh.

2.3. Họ véc tơ độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính.

2.4. Không gian hữu hạn chiều và cơ sở của nó.

2.5. Tích vô hướng và không gian có tích vô hướng.

2.6. Tọa độ trong không gian n chiều.

Với các mục nội dung như trên, nhóm tác giả đã chia chương 2 thành 7 video, với nội dung của các video như sau:

2.1. Không gian véc tơ. (Video 15)

2.2. Không gian con và hệ sinh. (Video 16)

2.3. Họ véc tơ độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính. (Video 17)

2.4. Không gian hữu hạn chiều và cơ sở của nó. (Video 18)

2.5. Tích vô hướng và không gian có tích vô hướng. (Video 19,20)

2.6. Tọa độ trong không gian n chiều. (Video 21)

4. CHƯƠNG 3. ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Theo đề cương học phần Đại số tuyến tính, nội dung của Chương 3 được chia thành các mục sau:

3.1. Khái niệm ánh xạ tuyến tính.

3.2. Các tính chất của ánh xạ tuyến tính – Hạt nhân và ảnh.

3.3. Ma trận của ánh xạ tuyến tính.

3.4. Sự đồng dạng.

Với các mục nội dung như trên, nhóm tác giả đã chia chương 3 thành 3 video, với nội dung của các video như sau:

3.1. Khái niệm ánh xạ tuyến tính. (Video 22)

3.2. Các tính chất của ánh xạ tuyến tính – Hạt nhân và ảnh. (Video 23)

3.3. Ma trận của ánh xạ tuyến tính. (Video 24)

3.4. Sự đồng dạng. (Video 24)

5. CHƯƠNG 4. TRỊ RIÊNG VÀ VÉC TƠ RIÊNG

Theo đề cương học phần Đại số tuyến tính, nội dung của Chương 4 được chia thành các mục sau:

4.1. Trị riêng và véc tơ riêng.

4.2. Chéo hóa ma trận.

4.3. Chéo hóa trực giao.

Với các mục nội dung như trên, nhóm tác giả đã chia chương 4 thành 6 video, với nội dung của các video như sau:

4.1. Trị riêng và véc tơ riêng. (Video 25,26)

4.2. Chéo hóa ma trận. (Video 27,28)

4.3. Chéo hóa trực giao. (Video 29,30)

Nội dung của từng video được trình bày trên bài giảng powerpoint như sau:

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

BÀI GIẢNG ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

CHƯƠNG 1

Ma trận – Định thức – Hệ phương trình tuyến tính

1.1.1. Định nghĩa và các dạng ma trận

Định nghĩa. Ma trận cỡ m × n là một bảng số hình chữ nhật gồm m hàng và n cột.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

+ a_{ij} là phần tử hàng i, cột j của ma trận A

+ Kí hiệu: $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

Ví dụ:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ (A là ma trận cỡ 2 × 3)

$\Rightarrow a_{11} = 1 \quad a_{12} = 2 \quad a_{13} = 3$

$a_{21} = -1; \quad a_{22} = 0; \quad a_{23} = 1$

+ Khi m = n thì A gọi là ma trận vuông cấp n.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Các phần tử a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} gọi là các phần tử chéo.

Đường thẳng đi qua các phần tử chéo gọi là đường chéo chính

1.1. Ma trận

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Ví dụ: Cho các ma trận sau

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}4&3&2&1\\0&3&1&0\\0&0&2&5\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

- Ma trận vuông trong các ma trận trên là: A; B; D
- Ma trận tam giác trong các ma trận trên là: B; A; D
- Ma trận chéo trong các ma trận trên là: A; D
- Ma trận đơn vị trong các ma trận trên là: D

http://tnut.edu.vn

1.1. Ma trận

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Hai ma trận bằng nhau

Cho hai ma trận $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ và $B=[b_{ij}]_{m\times n}$

Khi đó: $A=B \Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}\ \forall i,\ \forall j$

Ví dụ:

$$\begin{bmatrix}1&2\\a&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\3&b\end{bmatrix}\quad\Rightarrow a=3, b=5$$

http://tnut.edu.vn

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

BÀI GIẢNG ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

CHƯƠNG 1

Ma trận – Định thức – Hệ phương trình tuyến tính

http://tnut.edu.vn

1.1. Ma trận

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

1.1.2. Phép cộng 2 ma trận

Định nghĩa

Cho 2 ma trận cùng cấp $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ và $B=[b_{ij}]_{m\times n}$

Tổng A + B là ma trận cấp m × n được xác định bởi:

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$$

Ví dụ: $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}7&8&9\\-1&2&0\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A+B=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7&8&9\\-1&2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&10&12\\3&7&6\end{bmatrix}$$

http://tnut.edu.vn

1.1. Ma trận

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Một số tính chất:

Cho A; B; C là các ma trận cùng cấp. Khi đó:

A + B = B + A (tính chất giao hoán)

(A + B) + C = A + (B + C) (tính chất kết hợp)

$A+\theta=A$

Với mỗi ma trận $A=[a_{ij}]$ luôn tồn tại một ma trận đối,

kí hiệu $-A=[-a_{ij}]$

$A+(-A)=\theta$

http://tnut.edu.vn

1.1. Ma trận

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

1.1.3. Nhân ma trận với một số

Định nghĩa :

Cho $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $k\in\mathbb{R}$

Tích kA là một ma trận xác định bởi:

$$kA=[k.a_{ij}]_{m\times n}$$

Ví dụ:

$$A=\begin{bmatrix}3&4\\7&-2\end{bmatrix}\Rightarrow 2A=2.\begin{bmatrix}3&4\\7&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.3&2.4\\2.7&2.(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&8\\14&-4\end{bmatrix}$$

http://tnut.edu.vn

1.1. Ma trận — HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

1.1.6. Ma trận chuyển vị

Định nghĩa: Cho $A = [a_{ij}]_{m\times n}$

Ma trận chuyển vị của A, kí hiệu A^t được xác định bởi

$$A^t = [b_{ij}]_{n\times m} \quad (b_{ij} = a_{ji})$$

Ví dụ:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Định lý: $(A+B)^t = A^t + B^t \qquad (AB)^t = B^t A^t$

http://tnut.edu.vn

---

http://tnut.edu.vn

1.2. Định thức — HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

1.2.1. Định nghĩa

Cho $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, ma trận con ứng với phần tử a_{ij}, kí hiệu M_{ij}, là ma trận vuông cấp (n – 1) thu được từ A bằng cách bỏ đi hàng thứ i và cột thứ j.

Ví dụ : Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Tìm M_{13}, M_{32}

$$M_{13} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{32} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

http://tnut.edu.vn

1.2. Định thức — HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Định nghĩa 1.2.1.

Định thức của ma trận vuông A, kí hiệu là det(A) hay |A|, được định nghĩa đệ quy như sau:

Với n = 1, $A = [a_{11}]$ thì det(A) = a_{11}

Với n = 2; $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

thì det(A) = a_{11}.det(M_{11}) – a_{12}det(M_{12}) $= a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$

Tổng quát: Khi A là ma trận cấp n thì

det(A) = $(-1)^{1+1}a_{11}$det(M_{11})+ $(-1)^{1+2}a_{12}$det(M_{12})+......+$(-1)^{1+n}a_{1n}$det(M_{1n})

http://tnut.edu.vn

1.2. Định thức — HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Ví dụ: Tính định thức của ma trận $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

det(A) = a_{11} det(M_{11}) - a_{12} det(M_{12}) + a_{13} det(M_{13})

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

det(A) = $(-1)^{1+1}a_{11}$det(M_{11})+ $(-1)^{1+2}a_{12}$det(M_{12})+......+$(-1)^{1+n}a_{1n}$det(M_{1n})

http://tnut.edu.vn

1.2. Định thức — HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

$$A = \left[\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right]\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \qquad A = \left[\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right]\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$A = \left[\begin{matrix} 2 & 4 & -6 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{matrix}\right]\begin{matrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{matrix}$$

Ví dụ: Tính định thức của $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

det(A) = 2.5.(-2) + 4.0.1 + (-6).3.3 - 1.5.(-6) – 3.0.2 – (-2).3.4

= -20

http://tnut.edu.vn

Tính chất 3: Một định thức có hai hàng (cột) giống nhau thì bằng 0.

Ví dụ. Tính

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -5 \\ 6 & a & a & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -5 \\ 6 & a & a & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Tính chất 4: Một định thức có một hàng (cột) toàn số 0 thì bằng 0.

Ví dụ. Tính

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Tính chất 5: Khi nhân các phần tử của một hàng (cột) với cùng một số k thì được một định thức mới bằng định thức cũ nhân với k.

Hệ quả 1: Khi các phần tử của một hàng (cột) có một thừa số chung thì có thể đưa thừa số chung ra ngoài định thức.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Hệ quả 2: Nếu A là ma trận vuông cấp n thì $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ví dụ. Chứng minh định thức chia hết cho 17

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 172 & 98 & 34 \\ 186 & 73 & -51 \\ 87 & -107 & -102 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 172 & 98 & 17.2 \\ 186 & 73 & 17.(-3) \\ 87 & -107 & 17.(-6) \end{vmatrix} = 17 \begin{vmatrix} 172 & 98 & 2 \\ 186 & 73 & -3 \\ 87 & -107 & -6 \end{vmatrix}$$

Vậy $\det(A)$ chia hết cho 17

CHƯƠNG 1

Ma trận – Định thức – Hệ phương trình tuyến tính

Tính chất 6: Một định thức có hai hàng (cột) tỷ lệ thì bằng 0.

Ví dụ. Tính định thức $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -6 & 3 \\ 3 & -18 & 9 \end{vmatrix}$ $\qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -6 & 3 \\ 3 & -18 & 9 \end{vmatrix} = 0$

Tính chất 7: Khi tất cả các phần tử của một hàng (cột) có dạng tổng của hai số hạng thì định thức có thể phân tích thành tổng của hai định thức.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a+b & c+d & e+f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a & c & e \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b & d & f \end{vmatrix}$$

Ví dụ. Chứng minh $\begin{vmatrix} 1 & a & a(a+1) \\ 1 & b & b(b+1) \\ 1 & c & c(c+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a(a+1) \\ 1 & b & b(b+1) \\ 1 & c & c(c+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2+a \\ 1 & b & b^2+b \\ 1 & c & c^2+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & b & b \\ 1 & c & c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

1.2. Định thức

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Ví dụ: Tính định thức bằng phép biến đổi sơ cấp $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} \underset{=}{L_3 + (-1)L_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} \underset{=-}{L_2 <-> L_3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\underset{=-}{\frac{L_3 + (-3)L_2}{L_4 + (-4)L_2}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & -7 \\ 0 & 0 & 13 & -3 \end{vmatrix} \underset{=-}{L4 + \left(-\frac{13}{10}\right)L_3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{61}{10} \end{vmatrix} = -61$$

http://tnut.edu.vn

1.2. Định thức

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

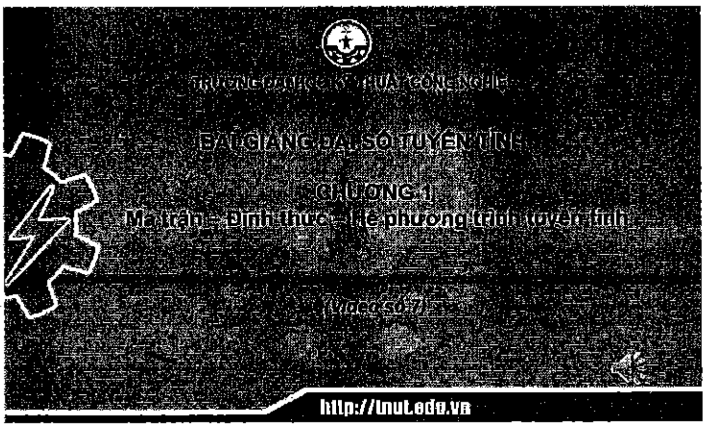
Ví dụ: Giải phương trình $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \dots & & & & \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix} = 0$

Lấy hàng 1 nhân với (-1) rồi cộng vào các hàng còn lại

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots. & 0 \\ 0 & x-1 & 0 & \dots. & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots. & x-(n-1) \end{vmatrix} = 0$$

$(x-1)(x-2)\dots(x-(n-1)) = 0 \quad x = 1, x = 2, \dots, x = n-1$

http://tnut.edu.vn



Chương 1: Ma trận – Định thức – Hệ phương trình tuyến tính

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

1.1. Ma trận

1.2. Định thức

1.3. Ma trận nghịch đảo

http://tnut.edu.vn

1.3. Ma trận nghịch đảo

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Ma trận đơn vị

Ma trận đơn vị cấp n, kí hiệu E_n (hay I_n) là ma trận chéo có các phần tử chéo bằng 1.

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

http://tnut.edu.vn

1.3. Ma trận nghịch đảo

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Ví dụ: - Ma trận đơn vị cấp 2: $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Ma trận đơn vị cấp 3: $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Tính chất: Với mọi ma trận A vuông cấp n thì:

$AE_n = E_nA = A$

http://tnut.edu.vn

1.3. Ma trận nghịch đảo

Định lý:

Cho A là ma trận vuông cấp n. Nếu det(A) $\neq$ 0 thì tồn tại ma trận nghịch đảo A^{-1} và được xác định bởi công thức sau:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}C'=\frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

(C là ma trận phụ đại số của A)

1.3. Ma trận nghịch đảo

Ví dụ: Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau:

$$a)\ A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b)\ B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Giải:

$$a)\ A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ta có:

$$\det A = 2 \neq 0 \Rightarrow \exists! A^{-1}=\frac{1}{\det A}.C'=\frac{1}{2}C'$$

1.3. Ma trận nghịch đảo

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_{11}=(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1 \quad c_{12}=(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \quad c_{13}=(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1$$

$$c_{21}=(-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-1 \quad c_{22}=(-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2 \quad c_{23}=(-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=3$$

$$c_{31}=(-1)^{3+1}.\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=1 \quad c_{32}=(-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0 \quad c_{33}=(-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$$

1.3. Ma trận nghịch đảo

$$\Rightarrow C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow C'=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

1.3. Ma trận nghịch đảo

$$b)\ B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Ta có: $\det B = 1.2.3.4 = 24 \neq 0$

$$\Rightarrow \exists! B^{-1}=\frac{1}{\det B}.C'=\frac{1}{24}C'$$

$$c_{11}=(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=24 \quad c_{12}=-\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=0 \quad c_{13}=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=0 \quad c_{14}=0$$

1.3. Ma trận nghịch đảo

Tương tự:

$c_{21}=0; c_{22}=1.3.4=12; c_{23}=0; c_{24}=0$

$c_{31}=0; c_{32}=0; c_{33}=1.2.4=8; c_{34}=0$

$c_{41}=0; c_{42}=0; c_{43}=0; c_{44}=1.2.3=6$

$$B^{-1}=\frac{1}{24}.\begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}^T \qquad B^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

1.3. Ma trận nghịch đảo

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

i. Ma trận A khả đảo thì A^{-1} cũng khả đảo và $(A^{-1})^{-1} = A$

Ta có: A^{-1} là ma trận nghịch đảo của A

$\Leftrightarrow A^{-1}.A = A.A^{-1} = E$

$\Leftrightarrow$ A cũng là ma trận nghịch đảo của A^{-1}

Vậy: $(A^{-1})^{-1} = A$

http://tnut.edu.vn

1.3. Ma trận nghịch đảo

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

ii. A khả đảo thì A^m cũng khả đảo và $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$ (2)

(Ta chứng minh khẳng định(2) đúng bằng phương pháp quy nạp)

Với m =1 ta thấy khẳng định (2) là đúng.

Giả sử (2) đã đúng với m – 1 $\Rightarrow \left(A^{m-1}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{m-1}$

Ta có: $A^m = A^{m-1}.A \Rightarrow \left(A^m\right)^{-1} = \left(A^{m-1}.A\right)^{-1} = A^{-1}.\left(A^{m-1}\right)^{-1}$

$$= A^{-1}.\left(A^{-1}\right)^{m-1} = \left(A^{-1}\right)^m$$

Vậy $\left(A^m\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^m$

http://tnut.edu.vn

1.3. Ma trận nghịch đảo

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

iii. A khả đảo thì kA cũng khả đảo và $(k.A)^{-1} = \dfrac{1}{k}A^{-1}$

$$k.A = \begin{bmatrix} k.a_{11} & k.a_{12} & \dots & k.a_{1n} \\ k.a_{21} & k.a_{22} & \dots & k.a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k.a_{n1} & k.a_{n2} & \dots & k.a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

http://tnut.edu.vn

1.3. Ma trận nghịch đảo

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

$$\Rightarrow (k.A)^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} k^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k^{-1} \end{bmatrix}$$

http://tnut.edu.vn

1.3. Ma trận nghịch đảo

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

$$\Rightarrow (k.A)^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} .k^{-1}. \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= k^{-1} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = k^{-1}.A^{-1}.E$$

$$= k^{-1}.A^{-1}$$

http://tnut.edu.vn

1.3. Ma trận nghịch đảo

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Ví dụ 1: Tìm ma trận A biết

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ta có:

$$A = \left(A^{-1}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \qquad \det A^{-1} = 2.3 - 1.5 = 1 \neq 0$$

$$A = \left(A^{-1}\right)^{-1} = \frac{1}{\det A^{-1}}.C' = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}^{t} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

http://tnut.edu.vn

1.4.1. Dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa: Hệ phương trình tuyến tính là một hệ gồm m phương trình đại số bậc nhất với n ẩn số.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + K + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + K + a_{2n}x_n = b_2 \\ K \quad K \quad K \quad K \quad K \quad K \quad K \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + K + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Trong đó:

$x_1; x_2; ...; x_n$ là các ẩn của hpt

$a_{ij}; b_i$ là các hằng số

1.4.2. Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính

Đặt: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$ (A là ma trận hệ số của hệ pt)

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}$ (x ma trận ẩn) $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{bmatrix}$ (b là ma trận vế phải)

Ta xét:

$$A.x = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + K + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + K + a_{2n}x_n = b_2 \\ K \quad K \quad K \quad K \quad K \quad K \quad K \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + K + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Ta gọi pt: $A.x = b$ là dạng ma trận của hệ pt tuyến tính.

Ví dụ: Cho hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = -1 \\ -x \quad -3z = 2 \\ \quad y - 5z = 5 \end{cases}$$ (Hệ phương trình tuyến tính gồm 3 pt và 3 ẩn)

Khi đó: Dạng ma trận của hệ pt: $A.x = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

Chú ý:

- Nghiệm của hệ pt tuyến tính là các ma trận ẩn x thỏa mãn

$$A.x = b$$

- Giải hệ pt tuyến tính là tìm tập hợp các nghiệm của hệ pt.

Tương tự:
$$A_2=\begin{bmatrix}1&1&1\\-2&2&-1\\2&1&2\end{bmatrix}\Rightarrow|A_2|=1\Rightarrow x_2=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{1}{1}=1$$

$$A_3=\begin{bmatrix}1&0&1\\-2&2&2\\2&-1&1\end{bmatrix}\Rightarrow|A_3|=2\Rightarrow x_3=\frac{|A_3|}{|A|}=\frac{2}{1}=2$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $\begin{cases}x_1=-1\\x_2=1\\x_3=2\end{cases}$

b. Hệ phương trình thuần nhất:

Hệ pt tuyến tính thuần nhất là hệ pt có dạng:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=0 \quad (i=1,\ldots,n)$$

Khi đó dạng ma trận của hệ là: Ax = 0

Ví dụ:

$$\begin{cases}x-y+z=0\\2x+y-3z=0\\3y+2z=0\end{cases}$$ (Hệ thuần nhất 3 pt, 3 ẩn)

Nhận xét:

Hệ thuần nhất A.x = 0 luôn có nghiệm tầm thường: $x=\begin{bmatrix}0\\0\\\ldots\\0\end{bmatrix}$

Định lý: Hệ thuần nhất có nghiệm không tầm thường

[redacted]

- Nếu $\det(A)\neq 0\Rightarrow$ Hệ pt thuần nhất A.x = 0 có nghiệm duy nhất

$\Rightarrow$ Hệ pt có nghiệm duy nhất là nghiệm tầm thường $x=\theta$

- Nếu $\det(A)=0\Rightarrow$ Hệ pt thuần nhất A.x = 0 có vô số nghiệm

$\Rightarrow$ Hệ pt có nghiệm không tầm thường

Ví dụ: Tìm m để hệ phương trình sau có vô số nghiệm

$$\begin{cases}x-3y+z=0\\2x+y-z=0\\3y+mz=0\end{cases}$$

Giải:

Hệ thuần nhất có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \det A=0$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}1&-3&1\\2&1&-1\\0&3&m\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 7m+9=0\Leftrightarrow m=\frac{-9}{7}$$

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

BÀI GIẢNG ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

CHƯƠNG 1

Ma trận – Định thức – Hệ phương trình tuyến tính

1.4. Hệ phương trình tuyến tính

Chú ý: Trong hệ phương trình mới ta vẫn sử dụng các ký hiệu $a_{ij}; b_i$ mặc dù giá trị của chúng đã thay đổi sau mỗi phép biến đổi sơ cấp

Từ phương trình cuối của hệ
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + K + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + K + a_{2n}x_n = b_2 \\ K \quad K \quad K \quad K \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

ta có thể dễ dàng tìm được ẩn x_n (nếu hệ có nghiệm)

1.4. Hệ phương trình tuyến tính

Sau đó thế ẩn x_n tìm được vào phương trình thứ n -1 ta tìm được ẩn x_{n-1}

Cứ như vậy, lần lượt thế các ẩn tìm được vào các phương trình liền trước đó ta tìm được nghiệm của hệ phương trình (nếu có).

1.4. Hệ phương trình tuyến tính

Ví dụ: Giải hệ pt tuyến tính sau bằng phương pháp Gauss

$$\begin{cases} x - y + z - 2t = 4 \\ 3x - y + z = 4 \\ 2y - 3z - t = -2 \\ -x + y - 2z + 2t = -5 \end{cases}$$

Giải:

Ta có: $\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 & -5 \end{bmatrix}$

1.4. Hệ phương trình tuyến tính

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} (h_2 = -3.h_1 + h_2) \\ (h_4 = h_1 + h_4) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & -8 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (h_3 = -h_2 + h_3)$$

1.4. Hệ phương trình tuyến tính

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (h_4 = -h_3 + h_4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -7 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z - 2t = 4 \\ 2y - 2z + 6t = -8 \\ -z - 7t = 6 \\ 7t = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \\ t = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ pt có nghiệm duy nhất $(x;y;z;t) = (1;0;1;-1)$

1.4. Hệ phương trình tuyến tính

Ví dụ : Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss

$$\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ x + 2y - z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

Giải:

Ta có: $\overline{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

B3: Dựa vào kết quả biến đổi ở B2 để kết luận nghiệm của hệ phương trình

$$\overline{A} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 \\ \dots \\ x_n = b_n \end{cases}$$

Ví dụ: Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss - Jordan

$$\begin{cases} x - y + z - 2t = -1 \\ 3x - y + z = 3 \\ 2y - 3z - t = -2 \\ -x + y - 2z + 2t = 0 \end{cases}$$

Ta có:

$$\overline{A} = [A, b] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} (h_2 = -3.h_1 + h_2) \\ \\ (h_4 = h_1 + h_4) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & -8 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} (h_3 = -h_2 + h_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} (h_4 = -h_3 + h_4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -7 \end{bmatrix} \begin{matrix} h_2 = \frac{1}{2}h_2 \\ h_3 = -h_3 \\ h_4 = \frac{1}{7}h_4 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} h_1 = 2h_4 + h_1 \\ h_2 = -3h_4 + h_2 \\ h_3 = -7h_4 + h_3 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} h_1 = -2h_3 + h_1 \\ h_2 = h_3 + h_2 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} h_1 = h_2 + h_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \\ t = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ pt có nghiệm duy nhất $(x;y;z;t) = (1;0;1;-1)$

1.4. Hệ phương trình tuyến tính

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Phương pháp Gauss-Jordan tính ma trận nghịch đảo

Gọi ma trận nghịch đảo cần tìm là

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

http://tnut.edu.vn

1.4. Hệ phương trình tuyến tính

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Ta có $A.A^{-1}=I$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

http://tnut.edu.vn

1.4. Hệ phương trình tuyến tính

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Đặt:

$$X_1=\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \dots \\ x_{n1} \end{bmatrix} \quad X_2=\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \dots \\ x_{n2} \end{bmatrix} \quad \dots\dots X_n=\begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \dots \\ x_{nn} \end{bmatrix}$$

$$b_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad b_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots b_n=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

http://tnut.edu.vn

1.4. Hệ phương trình tuyến tính

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Khi đó:

X_1 là nghiệm của hệ pt tuyến tính $A.x=b_1$

Áp dụng phương pháp Gauss – Jordan để giải hệ, ta được

$$\overline{A}=\left[A|b_1\right]=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & x_{11} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_{21} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_{n1} \end{array}\right]$$

http://tnut.edu.vn

1.4. Hệ phương trình tuyến tính

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Tương tự ta cũng có thể tìm được $X_2;X_3;\dots;X_n$

Sau đó ghép các cột X_i theo đúng thứ tự ta được ma trận nghịch đảo A^{-1} cần tìm.

Nhận xét:

Để cho đơn giản và nhanh gọn hơn ta có thể ghép n hệ phương trình tuyến tính cần giải thành một hệ để giải chung 1 lần như sau

http://tnut.edu.vn

1.4. Hệ phương trình tuyến tính

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{array}\right]$$

http://tnut.edu.vn

1.4. Hệ phương trình tuyến tính

Cách 2: (Tìm ma trận X bằng cách giải hệ pt)

Ta có A.X = B Mà A là ma trận cỡ 3×3

B là ma trận cỡ 3×2

Suy ra X là ma trận cỡ 3×2

1.4. Hệ phương trình tuyến tính

Giả sử $X=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}$ Đặt $x_1=\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$ $x_2=\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$

Khi đó $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Giải hệ pt tuyến tính trên ta được $x_1=\begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$

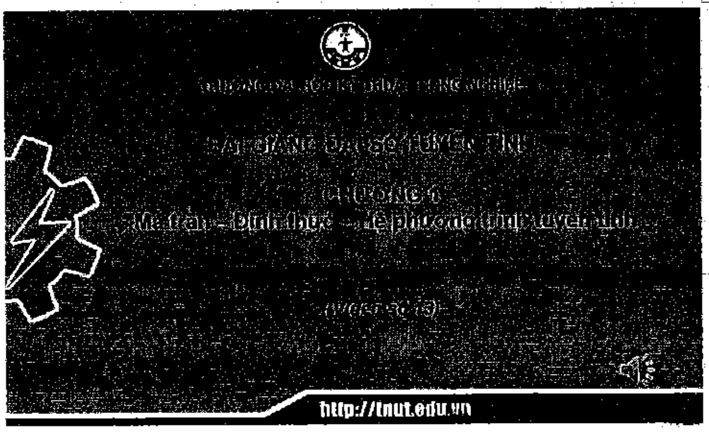
1.4. Hệ phương trình tuyến tính

Tương tự ta cũng tìm được

$$x_2=\begin{bmatrix} -23 \\ -13 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vậy:

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix} 0 & -23 \\ -5 & -13 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$



Chương 1: Ma trận – Định thức – Hệ phương trình tuyến tính

1.5. Hạng của ma trận - Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

1.5.1. Định nghĩa và cách tính hạng của ma trận

Ma trận vuông con của một ma trận

Cho A = $[a_{ij}]_{m\times n}$, một ma trận vuông cấp p suy từ A bằng cách bỏ đi (m – p) hàng và (n – p) cột gọi là ma trận con cấp p của A.

Định thức của ma trận con đó được gọi là định thức con cấp p của A.

Vì tất cả các ma trận con cấp 3 của A đều có định thức bằng 0

Nên hạng của ma trận A phải bé hơn 3.

Tiếp tục kiểm tra với các định thức con cấp 2

$$A=\begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{-2} & \cancel{0} & \cancel{3} \\ -2 & & 1 & 2 \\ -1 & & 1 & 5 \end{bmatrix}_{3\times4} \Rightarrow B_1=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}_{2\times2} \Rightarrow \det(B_1)=3\neq 0$$

Suy ra: rank A = 2

Cách tính hạng của ma trận bằng phép biến đổi sơ cấp

Ma trận bậc thang: Là ma trận có tính chất:

+ Các hàng khác không luôn ở trên các hàng không

+ Trên hai hàng khác không thì phần tử khác không đầu tiên của hàng dưới ở bên phải cột chứa phần tử khác không đầu tiên ở hàng trên.

Ví dụ:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(A Là ma trận bậc thang)

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

(B;C không phải là ma trận bậc thang)

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nhìn vào bảng ma trận A ta thấy các ma trận con cấp 4 đều có định thức bằng 0 và ít nhất một định thức con cấp 3 góc trên cùng bên trái của A có giá trị khác 0

Vậy: rank A = 3

Phương pháp tính hạng của ma trận:

Dùng các phép biến đổi sơ cấp về hàng đưa ma trận đã cho về ma trận bậc thang, số hàng khác không của ma trận này là hạng của ma trận đã cho.

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{rr} & \dots & a_{rn} & b_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_m \end{array}\right] \quad \begin{pmatrix} a_{kk}\neq 0 \\ \forall k=\overline{1;r} \end{pmatrix}$$

(Ta vẫn sử dụng các ký hiệu $a_{ij};b_i$ mặc dù giá trị của chúng đã thay đổi sau mỗi phép biến đổi)

Nhận xét: $rank(\overline{A})\geq rank(A)$

- Nếu $rank(\overline{A})>rank(A)$ thì dựa vào phương trình thứ r+1, ta suy ra hệ vô nghiệm.
- Nếu $rank(\overline{A})=rank(A)=n$ thì hệ có nghiệm duy nhất.
- Nếu $rank(\overline{A})=rank(A)<n$ thì hệ có vô số nghiệm.

Định lý : (Kronechker – Capeli)

Hệ phương trình tuyến tính tổng quát Ax = b có nghiệm khi và chỉ khi rank(A) = rank ($\overline{A}$)

Ví dụ: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x_1+2x_2+ax_3=3 \\ 3x_1-x_2-ax_3=2 \\ 2x_1+x_2+3x_3=b \end{cases}$

Biện luận theo a;b số nghiệm của hệ phương trình.

Giải:

Ta có
$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 3 \\ 3 & -1 & -a & 2 \\ 2 & 1 & 3 & b \end{array}\right] \xrightarrow[h_3=-2h_1+h_3]{h_2=-3h_1+h_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 3 \\ 0 & -7 & -4a & -4 \\ 0 & -3 & -2a+3 & -6+b \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 3 \\ 0 & -7 & -4a & -4 \\ 0 & -3 & -2a+3 & -6+b \end{array}\right] \xrightarrow{h_3=3h_2-7h_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 3 \\ 0 & -7 & -4a & -4 \\ 0 & 0 & 2a-21 & 21-7b \end{array}\right]$$

+) Nếu $a=\dfrac{21}{2};b=3$ thì $\overline{A}\leftrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 21/2 & 3 \\ 0 & -7 & -42 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$\Rightarrow rank\overline{A}=rankA=2<3$

Khi đó hệ phương trình có vô số nghiệm.

+) Nếu $a=\dfrac{21}{2};b\neq 3$ thì $\overline{A}\leftrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 21/2 & 3 \\ 0 & -7 & -42 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 21-7b \end{array}\right]$

$\Rightarrow rank\overline{A}=3 \quad rankA=2$

$\Rightarrow rank\overline{A}\neq rankA$

Khi đó hệ phương trình vô nghiệm.

1.5. Hạng của ma trận – Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2\left(\dfrac{-3}{5}b + \dfrac{2}{5}a\right) - b + a \\ x_2 = \dfrac{-3}{5}b + \dfrac{2}{5}a \\ x_3 = b \\ x_4 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{5}b + \dfrac{1}{5}a \\ x_2 = \dfrac{-3}{5}b + \dfrac{2}{5}a \\ x_3 = b \\ x_4 = a \end{cases}$$

Tập nghiệm của hệ $S = \left\{\left(\dfrac{1}{5}b + \dfrac{1}{5}a; \dfrac{-3}{5}b + \dfrac{2}{5}a; b; a\right) \middle| a; b \in R\right\}$

http://tnut.edu.vn

http://tnut.edu.vn

2.2. Không gian con và hệ sinh

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Ví dụ 2. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có dạng ma trận là $Ax = \theta$ là một không gian con của $\mathbb{R}^n$.

Gọi W là tập nghiệm của hệ, thế thì $W \subset \mathbb{R}^n$.

Cho $x, y \in W$ thì $Ax = 0$, $Ay = 0$.

\+ $A(x + y) = Ax + Ay = 0$.

\+ $A(kx) = k\,Ax = 0$.

Vậy W đóng kín với hai phép toán nên là không gian con của $\mathbb{R}^n$.

http://tnut.edu.vn

2.1. Không gian vectơ

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

2.1.1. Định nghĩa không gian vectơ

Cho tập $V \neq \varnothing$, mỗi phần tử được gọi là một véc tơ.

Phép cộng hai véc tơ $+: V \times V \to V$

$(x, y) \mapsto (x + y)$

Phép nhân một véctơ với một số thực $. : \mathbb{R} \times V \to V$

$(k, x) \mapsto kx$

Nếu V cùng hai phép toán thoả mãn 10 yêu cầu sau với mọi $x, y, z \in V$, $\forall k, l \in \mathbb{R}$ thì V được gọi là một không gian véc tơ trên $\mathbb{R}$

http://tnut.edu.vn

2.1. Không gian vectơ

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

1. $x + y \in V$ (tính đóng kín với phép cộng)
2. $x + y = y + x$ (tính giao hoán của phép cộng)
3. $x + (y+z) = (x+y)+z$ (tính kết hợp của phép cộng)
4. $\exists\ \theta \in V$ sao cho $\theta + x = x\ \forall\ x \in V$ (θ được gọi là phần tử trung hoà của phép cộng)
5. $\forall\ x \in V\ \exists\ (-x) \in V$ thoả mãn $x + (-x) = (-x) + x = \theta$
6. $kx \in V$ (tính đóng kín với phép nhân vô hướng)
7. $k(x + y) = kx + ky$
8. $(k + l)x = kx + lx$
9. $k(lx) = (kl)x$
10. $1.x = x$

http://tnut.edu.vn

2.1. Không gian vectơ

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Ví dụ. Đặt $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) / x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \ldots, n\}$

Xét hai phần tử $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$

$kx = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n)\ \forall k \in \mathbb{R}$.

Phần tử trung hoà:

$(0, 0, \ldots, 0)$

Phần tử đối của x:

$-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$

$\mathbb{R}^n$ cùng hai phép toán trên là một không gian véc tơ

1. $x + y \in V$
2. $x + y = y + x$
3. $x + (y+z) = (x+y)+z$
4. $\exists\ \theta \in V$ sao cho $\theta + x = x\ \forall\ x \in V$
5. $\forall\ x \in V\ \exists\ (-x) \in V$: $x + (-x) = \theta$
6. $kx \in V$
7. $k(x + y) = kx + ky$
8. $(k + l)x = kx + lx$
9. $k(lx) = (kl)x$
10. $1.x = x$

http://tnut.edu.vn

2.2. Không gian con và hệ sinh

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

2.2.3. Tổ hợp tuyến tính của một họ vectơ

Cho S= {$u_1, u_2, \ldots, u_n$}$\subset$V, V là một không gian vectơ.

Định nghĩa: Biểu thức có dạng

$u = c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_nu_n$ xác định một vectơ thuộc V, được gọi là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ của họ S.

http://tnut.edu.vn

2.2. Không gian con và hệ sinh

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Ví dụ: Hãy biểu diễn vectơ u = (0, 4, 7) thành tổ hợp tuyến tính của u_1= (1,0,1), u_2= (-1,2,0), u_3=(0,2,3)

$u = c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_nu_n$

Xét $u = c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3$

(0, 4, 7) = c_1(1, 0, 1) + c_2 (-1, 2, 0) + c_3(0, 2, 3)

$$\begin{cases} c_1 - c_2 = 0 \\ 2c_2 + 2c_3 = 4 \\ c_1 + 3c_3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{1}{2} \\ c_2 = -\frac{1}{2} \\ c_3 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Vậy có biểu diễn

$$u = -\frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2 + \frac{5}{2}u_3$$

http://tnut.edu.vn

2.2. Không gian con và hệ sinh

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

2.2.4. Không gian con sinh bởi một họ vectơ

Định nghĩa: Tập tất cả những tổ hợp tuyến tính của các vectơ của S được gọi là bao tuyến tính của S, kí hiệu là Span(S)

Định lý: Span(S) là một không gian con tuyến tính của V

2.2.5. Hệ sinh của một không gian vectơ

Định nghĩa: Nếu Span(S) = V thì họ S được gọi là một hệ sinh của V (S sinh ra V).

http://tnut.edu.vn

2.2. Không gian con và hệ sinh

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Ví dụ: Họ S = {u_1= (1,0,1), u_2= (-1, 2, 0), u_3 = (0, 2, 3)} có là hệ sinh của $\mathbb{R}^3$ không?

Span(S) = V

Xét u (x, y, z) $\in \mathbb{R}^3$, giả sử $u = c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3$

(x, y, z) = c_1(1, 0, 1) + c_2 (-1, 2, 0) + c_3(0, 2, 3)

$$\begin{cases} c_1 - c_2 = x \\ 2c_2 + 2c_3 = y \\ c_1 + 3c_3 = z \end{cases} \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$$

Hệ luôn có nghiệm với mọi x, y, z. Vậy $\mathbb{R}^3$ = Span(S)

S là hệ sinh của $\mathbb{R}^3$

http://tnut.edu.vn

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

BÀI GIẢNG ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

CHƯƠNG 2

Không gian véc tơ – Không gian Euclid

(Video số 17)

http://tnut.edu.vn

2.3. Họ vectơ độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Họ S được gọi là độc lập tuyến tính nếu từ điều kiện $c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_nu_n = \theta$ kéo theo $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.

Họ S được gọi là phụ thuộc tuyến tính nếu S không độc lập tuyến tính.

Ví dụ: Xét tính độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của các họ véctơ sau:

1) S_1 = {u_1= (2, -4, 6), u_2= (5, -10, 15) }

Xét $c_1u_1 + c_2u_2 = \theta$, c_1(2, -4, 6) + c_2(5, -10, 15) =(0, 0, 0)

$$\begin{cases} 2c_1 + 5c_2 = 0 \\ -4c_1 - 10c_2 = 0 \\ 6c_1 + 15c_2 = 0 \end{cases} \quad 2c_1 + 5c_2 = 0$$

Hệ vô số nghiệm $c_1 = -\frac{5}{2}c_2, c_2$ tuỳ ý.

Vậy họ véc tơ phụ thuộc tuyến tính

http://tnut.edu.vn

2.4. Không gian hữu hạn chiều và cơ sở của nó

Định nghĩa. Cơ sở chính tắc trong không gian R^n là họ gồm n véc tơ $\langle e_1, e_2, \ldots, e_n\rangle$ với e_k (k = 1..n) là véc tơ có thành phần thứ k bằng 1, còn lại đều bằng 0.

Ví dụ: Cơ sở chính tắc của R^3 là B= $\langle e_1, e_2, e_3\rangle$ với e_1=(1, 0,0); e_2 = (0, 1,0); e_3 = (0, 0,1).

Ví dụ: $P_n(x)$ là không gian các đa thức của x có bậc không quá n.

$P_n(x) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n : a_k \in R, k = 0, 2, \ldots, n\}$.

S = {1, x, x^2, ..., x^n} được gọi là cơ sở chính tắc của $P_n(x)$

2.4. Không gian hữu hạn chiều và cơ sở của nó

Định lý: Trong không gian véc tơ, một véc tơ bất kỳ được biểu diễn duy nhất dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các véc tơ của một họ S khi và chỉ khi họ S là cơ sở của không gian

Định lý: Trong không gian véc tơ n chiều, cho họ S = {$s_1, s_2, \ldots, s_n$} và ma trận A = [$s_1, s_2, \ldots, s_n$] (mỗi cột là một véc tơ của S).

Họ S là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi det(A) ≠ 0.

Ví dụ. Chứng minh rằng S = {v_1, v_2, v_3} với v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (2, 9, 0), v_3 = (3, 3, 4) là một cơ sở trong R^3.

Có det(A) = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$

Vậy S là một cơ sở trong R^3.

2.4. Không gian hữu hạn chiều và cơ sở của nó

2.4.4. Hạng của họ véc tơ

Định nghĩa. Số tối đa các véc tơ độc lập tuyến tính của họ vectơ S được gọi là hạng của nó và kí hiệu là rank(S).

2.4.5. Cách tính hạng của họ véc tơ bằng các phép biến đổi sơ cấp

+ Thành lập ma trận A có mỗi hàng là một véc tơ của S.
+ Đưa A về dạng bậc thang, rank(S)= rank(A).

2.4. Không gian hữu hạn chiều và cơ sở của nó

2.4.5. Số chiều và cơ sở của không gian con sinh bởi một họ véc tơ

Định lý

Trong không gian véc tơ V, cho S ⊂ V. Khi đó W = span(S) là không gian con của V, dim(W) = rank(S), và bất kỳ số cực đại véc tơ độc lập tuyến tính trong S đều là cơ sở của W.

Định lý

Trong không gian véc tơ n chiều V, một họ véc tơ bất kỳ gồm n vectơ sinh ra V đều là cơ sở của V.

2.4. Không gian hữu hạn chiều và cơ sở của nó

Ví dụ: Tìm một cơ sở và số chiều của không gian con sinh bởi họ vectơ S.

$S = \{(2,5,-3,-2), (-2,-3,2,-5), (1,3,-2,2), (-1,-5,3,5)\} \subset \mathbb{R}^4$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[h_4:=2h_4+h_1]{\substack{h_2:=h_2+h_1 \\ h_3:=2h_3-h_1}} \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & -5 & 3 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[h_4:=2h_4+5h_2]{h_3:=2h_3-h_2}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & -19 \end{bmatrix} \xrightarrow{h_4:=h_4+h_3} \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cơ sở: $\{(2,5,-3,-2), (-2,-3,2,-5), (1,3,-2,2)\}$

Số chiều của không gian bằng 3.

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

BÀI GIẢNG ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

CHƯƠNG 2

Không gian véc tơ – Không gian Euclid

(Video Số 19)

2.5. Tích vô hướng và không gian có tích vô hướng

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Ta có $\langle u,u\rangle = x_1^2 + x_2^2 \geq 0$

$\langle u,u\rangle = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u = \theta$

Vậy 5. <u, u> ≥ 0 và <u, u > = 0 ⇔ u = θ

Do đó <u,v> = $x_1.y_1+x_2.y_2$ với u(x_1, x_2), v(y_1, y_2) là một tích vô hướng trên không gian véc tơ R^2

Không gian vec tơ R^2 là không gian Euclid.

http://tnut.edu.vn

2.5. Tích vô hướng và không gian có tích vô hướng

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Tổng quát: <u,v> = $x_1.y_1$+ $x_2.y_2$+…+$x_n.y_n$ với u(x_1, x_2, …, x_n), v(y_1, y_2, …, y_n) là một tích vô hướng trên không gian véc tơ R^n

Không gian vec tơ R^n là không gian Euclid.

http://tnut.edu.vn

2.5. Tích vô hướng và không gian có tích vô hướng

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Các tính chất suy từ tiên đề:

∀u, v, w∈V, ∀λ∈ **R** :

1. <θ, u> = <u, θ> = 0

Ta có

$$\langle \theta,u\rangle = \langle v+(-v),u\rangle = \langle v,u\rangle + \langle -v,u\rangle$$

$$= \langle v,u\rangle - \langle v,u\rangle = 0$$

http://tnut.edu.vn

2.5. Tích vô hướng và không gian có tích vô hướng

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

2. <u, v +w> = <u, v> + <u, w>

Thật vậy $\langle u,v+w\rangle = \langle v+w,u\rangle = \langle v,u\rangle + \langle w,u\rangle$

$$= \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle$$

3. <u, λv> = λ<u, v>

Thật vậy $\langle u,\lambda v\rangle = \langle \lambda v,u\rangle = \lambda\langle v,u\rangle = \lambda\langle u,v\rangle$

http://tnut.edu.vn

2.5. Tích vô hướng và không gian có tích vô hướng

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Ví dụ: Trong R^2 với u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2)

Xét tích vô hướng Euclid : <u, v> = $x_1y_1 + x_2y_2$

Tính $\langle u,v\rangle = ?$ $\langle u,w\rangle = ?$ $\langle v+2w,3u\rangle = ?$

biết $u=(1;2), v=(-2;0); w=(1;-1)$

Giải: $\langle u,v\rangle = 1.(-2)+2.0 = -2$

$\langle u,w\rangle = 1.1+2.(-1) = -1$

http://tnut.edu.vn

2.5. Tích vô hướng và không gian có tích vô hướng

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

$$\langle v+2w,3u\rangle = \langle v,3u\rangle + \langle 2w,3u\rangle$$

$$= 3\langle v,u\rangle + 2\langle w,3u\rangle = 3\langle v,u\rangle + 6\langle w,u\rangle$$

$$= 3\langle u,v\rangle + 6\langle u,w\rangle = 3.(-2)+6.(-1) = -12$$

http://tnut.edu.vn

2.5. Tích vô hướng và không gian có tích vô hướng — HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Ví dụ:

Trong không gian vec tơ R^2, với tích vô hướng Euclid, tính khoảng cách giữa hai véc tơ u và v biết $u=(1;-3), v=(2;0)$

Giải:

$$u(1;-3), v(2;0) \Rightarrow u-v=(-1;-3)$$

$$\Rightarrow d(u,v)=\|u-v\|=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{9}=3$$

http://tnut.edu.vn

2.5. Tích vô hướng và không gian có tích vô hướng — HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Tính chất:

- $d(u, v) \geq 0$, $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$
- $d(u, v) = d(v, u)$
- $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ (bất đẳng thức tam giác)

http://tnut.edu.vn

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

BÀI GIẢNG ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

CHƯƠNG 2

Không gian véc tơ – Không gian Euclid

(Video số 9)

http://tnut.edu.vn

Chương 2. Không gian véc tơ – không gian Euclid — HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

http://tnut.edu.vn

2.5. Tích vô hướng và không gian có tích vô hướng — HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

2.5.1. Tích vô hướng trong không gian véc tơ

Định nghĩa:

Trong không gian véc tơ V

Tích vô hướng của u và v, ký hiệu <u, v>, là một số thực thoả mãn các tiên đề sau:

1. <u, v> xác định với mọi $u, v \in V$
2. <u, v> = <v, u>

http://tnut.edu.vn

2.5. Tích vô hướng và không gian có tích vô hướng — HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

3. <u + v, w> = <u, w> + <v, w> với $\forall w \in V$
4. $\forall \lambda \in R$ có $<\lambda u, v> = \lambda <u, v>$
5. $<u, u> \geq 0$ và $<u, u> = 0 \Leftrightarrow u = \theta$

Không gian véc tơ tồn tại tích vô hướng trên nó được gọi là không gian có tích vô hướng.

Không gian véc tơ hữu hạn chiều và có tích vô hướng được gọi là không gian Euclid.

http://tnut.edu.vn

2.5. Tích vô hướng và không gian có tích vô hướng

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

2. <u, v + w> = <u, v> + <u, w>

Thật vậy $\langle u, v+w\rangle = \langle v+w, u\rangle = \langle v, u\rangle + \langle w, u\rangle$

$= \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$

3. <u, λv> = λ<u, v>

Thật vậy $\langle u, \lambda v\rangle = \langle \lambda v, u\rangle = \lambda\langle v, u\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$

http://tnut.edu.vn

2.5. Tích vô hướng và không gian có tích vô hướng

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Ví dụ: Trong R^2 với u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2)

Xét tích vô hướng Euclid : <u, v> = $x_1y_1 + x_2y_2$

Tính $\langle u, v\rangle = ?$ $\langle u, w\rangle = ?$ $\langle v+2w, 3u\rangle = ?$

biết $u = (1;2), v = (-2;0); w = (1;-1)$

Giải: $\langle u, v\rangle = 1.(-2) + 2.0 = -2$

$\langle u, w\rangle = 1.1 + 2.(-1) = -1$

http://tnut.edu.vn

2.5. Tích vô hướng và không gian có tích vô hướng

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

$\langle v+2w, 3u\rangle = \langle v, 3u\rangle + \langle 2w, 3u\rangle$

$= 3\langle v, u\rangle + 2\langle w, 3u\rangle = 3\langle v, u\rangle + 6\langle w, u\rangle$

$= 3\langle u, v\rangle + 6\langle u, w\rangle = 3.(-2) + 6.(-1) = -12$

http://tnut.edu.vn

2.5. Tích vô hướng và không gian có tích vô hướng

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Chú ý: Trong cùng một không gian véc tơ có thể tồn tại nhiều tích vô hướng khác nhau

Ví dụ: Trong không gian vec tơ R^2 với u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2)

Ta dễ dàng chứng minh :

<u, v> = $x_1y_1 + x_2y_2$ (1) và <u, v>* = $x_1y_1 + 2x_2y_2$ (2)

đều thỏa mãn điều kiện là tích vô hướng của kgvt R^2.

http://tnut.edu.vn

2.5. Tích vô hướng và không gian có tích vô hướng

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

2.5.2. Độ dài của véc tơ

Định nghĩa

Trong không gian có tích vô hướng, độ dài (hay chuẩn) của véc tơ u, kí hiệu là ||u||, là số không âm xác định bởi công thức

$$\|u\| = \sqrt{<u, u>}$$

http://tnut.edu.vn

2.5. Tích vô hướng và không gian có tích vô hướng

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Ví dụ: Trong không gian vec tơ R^2 với tích vô hướng Euclid, tính độ dài của véc tơ u và véc tơ v biết $u = (1;2), v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

Giải: $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$

http://tnut.edu.vn

2.5. Tích vô hướng và không gian có tích vô hướng — HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

2.5.3. Sự trực giao của hai véc tơ.

Định nghĩa:

Trong một không gian có tích vô hướng, hai véc tơ u và v gọi là trực giao nếu <u, v> = 0

Ví dụ: Trong kgvt R^3 với tích vô hướng Euclid, cho hai véc tơ u = (1;0;-1) và v = (0; 2; 0) ta có: $\langle u,v\rangle = 1.0+0.2+(-1).0=0$

Vậy u và v là hai véc tơ trực giao

http://tnut.edu.vn

2.5. Tích vô hướng và không gian có tích vô hướng — HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Chú ý: Sự trực giao của 2 vectơ phụ thuộc vào tích vô hướng được định nghĩa trên kgvt.

Véc tơ trực giao với một họ véc tơ

Nếu u trực giao với mọi véc tơ của một họ S thì ta nói u trực giao với S

http://tnut.edu.vn

2.5. Tích vô hướng và không gian có tích vô hướng — HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

2.5.4. Họ véc tơ trực giao

Định nghĩa

Cho họ vectơ S = {v_1, v_2,..., v_n} trong không gian có tích vô hướng, khi đó:

S là họ véc tơ trực giao $\Leftrightarrow \langle v_i, v_j\rangle = 0$, $\forall i \neq j$, i =1,...,n ; j = 1,...,n

S là họ véc tơ trực chuẩn $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{S trực giao} \\ \|v_i\| = 1\ \forall i=\overline{1,n} \end{cases}$

http://tnut.edu.vn

2.5. Tích vô hướng và không gian có tích vô hướng — HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Ví dụ: Trong không gian véc tơ R^3, với tích vô hướng Euclid

Họ véc tơ $S=\{u_1=(-1;0;1), u_2=(2;0;2), u_3=(0;1;0)\}$

là họ véc tơ trực giao nhưng không là họ véc tơ trực chuẩn vì:

$$\langle u_1,u_2\rangle = -1.2+0.0+1.2=0$$
$$\langle u_1,u_3\rangle = -1.0+0.1+1.0=0$$
$$\langle u_2,u_3\rangle = 2.0+0.1+2.0=0$$
$$\|u_1\| = \sqrt{(-1)^2+0^2+1^2} = \sqrt{2} \neq 1$$

http://tnut.edu.vn

2.5. Tích vô hướng và không gian có tích vô hướng — HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Họ véc tơ $S'=\left\{v_1=(0;1;0), v_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right), v_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$

là họ véc tơ trực chuẩn vì:

$$\langle v_1,v_2\rangle = 0 \qquad \langle v_1,v_3\rangle = 0 \qquad \langle v_2,v_3\rangle = 0$$

$$\|v_1\| = \sqrt{0^2+1^2+0^2} = 1 \qquad \|v_2\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+0^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

$$\|v_3\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+0^2+\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

http://tnut.edu.vn

2.5. Tích vô hướng và không gian có tích vô hướng — HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

2.5.5 Quá trình trực chuẩn hoá Gram – Schmidt

Chuẩn hoá một véc tơ

Cho u là một véc tơ trong không gian có tích vô hướng V.

Khi đó

$$v = \frac{u}{\|u\|} \qquad \Rightarrow \|v\| = 1$$

http://tnut.edu.vn

2.5. Tích vô hướng và không gian có tích vô hướng — HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Vậy trực chuẩn hóa Gram – Schmitd họ véc tơ S ta được họ trực chuẩn S' là:

$$S'=\left\{v_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0\right),v_2=\left(\frac{-1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}}\right),v_3=\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{-1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$$

http://tnut.edu.vn

2.5. Tích vô hướng và không gian có tích vô hướng — HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

2.5.6. Tính độc lập tuyến tính của một họ véc tơ trực giao

Định lý:

Trong không gian n chiều có tích vô hướng, mọi họ gồm n véc tơ trực giao không chứa véc tơ θ là họ độc lập tuyến tính và là một cơ sở của không gian đó.

http://tnut.edu.vn

2.5. Tích vô hướng và không gian có tích vô hướng — HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Định nghĩa:

Trong không gian có tích vô hướng V, một cơ sở gồm các véc tơ trực giao được gọi là cơ sở trực giao, thêm vào đó nếu độ dài các véc tơ cùng bằng 1 thì được gọi là cơ sở trực chuẩn.

http://tnut.edu.vn

2.5. Tích vô hướng và không gian có tích vô hướng — HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Ví dụ: Trong R^3 với tích vô hướng Euclid, cho họ véc tơ

$$S'=\left\{v_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0\right),v_2=\left(\frac{-1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}}\right),v_3=\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{-1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$$

Ta có S' là họ véc tơ trực chuẩn gồm 3 véc tơ trong kg R^3 nên S' là một cơ sở trực chuẩn của không gian R^3

http://tnut.edu.vn

2.5. Tích vô hướng và không gian có tích vô hướng — HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Định lý (Sự tồn tại cơ sở trực chuẩn trong kg Euclid)

Trong một không gian Euclid n chiều khác rỗng luôn tồn tại ít nhất một cơ sở trực chuẩn

http://tnut.edu.vn

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

BÀI GIẢNG ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

CHƯƠNG 2

Không gian véc tơ – Không gian Euclid

(Video số 21)

http://tnut.edu.vn

Vì $(v)_S = (2;-2;1) \Rightarrow v = 2.u_1 - 2.u_2 + u_3$

$$\Rightarrow v = 2.(1;1;0) - 2.(0;-1;2) + (2;0;1)$$

$$\Rightarrow v = (2;2;0) - (0;-2;4) + (2;0;1) = (4;4;-3)$$

Vậy $v = (4;4;-3)$

2.6.2. Tọa độ trong không gian Euclid

Giả sử S = {v_1, v_2, ..., v_n} là một cơ sở trực chuẩn trong không gian Euclid n chiều V. Khi đó với mọi u∈V,

Nếu $u = c_1.v_1 + c_2.v_2 + ... + c_n.v_n$

Thì $\langle u;v_k\rangle = \langle c_1.v_1 + c_2.v_2 + ... + c_n.v_n;v_k\rangle$

$$= c_1\langle v_1;v_k\rangle + c_2\langle v_2;v_k\rangle + ... + c_n\langle v_n;v_k\rangle = c_k\langle v_k;v_k\rangle = c_k$$

Do đó: u = <u, v_1>v_1 + <u, v_2>v_2 + ... + <u, v_n>v_n

hay $[u]_S = \begin{bmatrix} \langle u;v_1\rangle \\ \langle u;v_2\rangle \\ ... \\ \langle u;v_n\rangle \end{bmatrix}$

Tức là: Trong cơ sở trực chuẩn để tìm thành phần tọa độ thứ k của véc tơ *u* ta chỉ cần tính tích vô hướng của véc tơ *u* và véc tơ thứ k trong cơ sở đó.

Đặc biệt: Trong cơ sở chính tắc $S = \{e_1;e_2;...;e_n\}$ của không gian véc tơ R^n. Nếu $u = (x_1;x_2;...;x_n)$ thì $(u)_S = (x_1;x_2;...;x_n)$

hay $[u]_S = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}$

Ví dụ:

Trong không gian véc tơ R^3 với cơ sở chính tắc

$$S = \{e_1 = (1;0;0); e_2 = (0;1;0); e_3 = (0;0;1)\}$$

Cho u = (2;1;-3)

Khi đó: $u = 2.(1;0;0) + 1.(0;1;0) - 3.(0;0;1)$

$$\Rightarrow (u)_S = (2;1;-3) \qquad [u]_S = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

2.6.3.Biểu thức của tích vô hướng theo tọa độ trong cơ sở trực chuẩn của không gian Euclid

Trong không gian Euclid n chiều, giả sử S = {u_1, u_2, ..., u_n} là một cơ sở trực chuẩn.

Xét hai véc tơ x và y. Nếu

$$(x)_S = (x_1;x_2;...;x_n) \quad (y)_S = (y_1;y_2;...;y_n)$$

Thì $\langle x,y\rangle = \langle x_1.u_1 + x_2.u_2 + ... + x_n.u_n, y_1.u_1 + y_2.u_2 + ... + y_n.u_n\rangle$

$$= x_1.y_1 + x_2.y_2 + ... + x_n.y_n$$

3.1. Khái niệm ánh xạ tuyến tính
HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Do đó: $T(u+v)=T(u)+T(v)$ (1)

Tương tự: $\lambda u=(\lambda x;\lambda y)$ $(\lambda\in R)$

$\Rightarrow T(\lambda u)=(\lambda x-\lambda y;\lambda x+\lambda y)$

Mà: $T(u)=(x-y;x+y)$

$\Rightarrow \lambda T(u)=(\lambda(x-y);\lambda(x+y))=(\lambda x-\lambda y;\lambda x+\lambda y)$

$\Rightarrow T(\lambda u)=\lambda T(u)$ (2)

3.1. Khái niệm ánh xạ tuyến tính
HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Vậy: Ánh xạ $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ là ánh xạ tuyến tính

$$(x,y)\mapsto(x-y,x+y)$$

Ánh xạ T là ánh xạ tuyến tính giữa không gian véc tơ R^2 và chính nó nên T còn gọi là toán tử tuyến tính trên không gian R^2

3.1. Khái niệm ánh xạ tuyến tính
HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Ví dụ 2: Cho Ánh xạ $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$

$$(x;y;z)\mapsto(x;y)$$

Giả sử: $u=(x;y;z);v=(x';y';z')\in\mathbb{R}^3;\lambda\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow u+v=(x+x';y+y';z+z')$

$\Rightarrow T(u+v)=(x+x';y+y')=(x;y)+(x'+y')=T(u)+T(v)$

Tương tự:

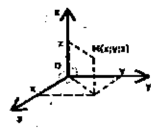
$\lambda u=(\lambda x;\lambda y;\lambda z)\Rightarrow T(\lambda u)=(\lambda x;\lambda y)=\lambda(x;y)=\lambda T(u)$

Vậy ánh xạ T là ánh xạ tuyến tính giữa không gian véc tơ R^3 và R^2.

3.1. Khái niệm ánh xạ tuyến tính
HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Nhận xét: Ánh xạ tuyến tính $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$

$$(x;y;z)\mapsto(x;y)$$



Là phép chiếu vuông góc một điểm trong không gian Oxyz xuống mặt phẳng tọa độ Oxy

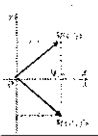
3.1. Khái niệm ánh xạ tuyến tính
HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Ví dụ 3: Xác định quy tắc ánh xạ biểu diễn phép đối xứng một điểm trong mặt phẳng Oxy qua trục Ox, kiểm tra ánh xạ đó có là ánh xạ tuyến tính không?

Giải:

Ta có: $T:R^2\to R^2$

$(x;y)\to(x;-y)$



3.1. Khái niệm ánh xạ tuyến tính
HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Tương tự ta cũng chứng minh được:

Ánh xạ T: $T:R^2\to R^2$

$(x;y)\to(x;-y)$

Thỏa mãn:

$T(u+v)=T(u)+T(v)\quad\forall u,v\in R^2$

$T(\lambda u)=\lambda T(u)\quad\forall\lambda\in R,\forall u\in R^2$

Vậy ánh xạ T là toán tử tuyến tính trong không gian R^2.

3.2. Hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính — *Học để nâng cao cuộc sống*

3.2.1 Định nghĩa:

b) Giả sử T: V→W là ánh xạ tuyến tính giữa hai không gian véc tơ. Ảnh của ánh xạ T, kí hiệu Im(T) hay T(V), là tập hợp tất cả các ảnh của các véc tơ trong không gian V

$$\operatorname{Im}T=\{T(x)\in W,\forall x\in V\}$$

http://tnut.edu.vn

3.2. Hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính — *Học để nâng cao cuộc sống*

Ví dụ 2: Cho $T:R^2\to R^2$ là ánh xạ tuyến tính xác định bởi $T(x)=Ax$ với $A=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&4\end{pmatrix}$. Xác định Im(T)?

Giải: Ta có $T(x)=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ Với $x=(x_1;x_2)\in R^2$

$$\Rightarrow T(x_1,x_2)=(x_1-2x_2;-2x_1+4x_2)$$

Vậy: $\operatorname{Im}T=\{(x_1-2x_2;-2x_1+4x_2)|x_1;x_2\in R\}$

http://tnut.edu.vn

3.2. Hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính — *Học để nâng cao cuộc sống*

Ví dụ 3:Tìm hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính đồng nhất trong không gian véc tơ R^2

Giải: Ánh xạ đồng nhất trong R^2 xác định bởi:

$$T(x,y)=(x;y)\qquad \forall(x;y)\in R^2$$

Do vậy: $\operatorname{Ker}T=\{\theta\}$ $\qquad \operatorname{Im}T=R^2$

http://tnut.edu.vn

3.2. Hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính — *Học để nâng cao cuộc sống*

3.2.2: Tính chất

Nếu *T: V→W* là một ánh xạ tuyến tính thì:

i. *Ker(T)* là một không gian con của V

ii. *Im(T)* là một không gian con của W

http://tnut.edu.vn

3.2. Hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính — *Học để nâng cao cuộc sống*

Ví dụ: Cho ánh xạ tuyến tính $f:R^4\to R^3$ xác định bởi

$$f(x;y;z;t)=(x+2y;y+z;x-t)$$

Hãy xác định cơ sở và số chiều của không gian hạt nhân và không gian ảnh của ánh xạ *f*.

Giải: +) Xác định số chiều và cơ sở của không gian hạt nhân Ker *f*

$$f(x;y;z;t)=0\Leftrightarrow(x+2y;y+z;x-t)=(0;0;0)\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=0\\y+z=0\\x-t=0\end{cases}$$

http://tnut.edu.vn

3.2. Hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính — *Học để nâng cao cuộc sống*

Nghiệm của hệ phương trình là: $\begin{cases}x=t\\y=\dfrac{-t}{2}\\z=\dfrac{t}{2}\\t\in R\end{cases}$

Do vậy: $\operatorname{Ker}f=\left\{\left(t;\dfrac{-t}{2};\dfrac{t}{2};t\right)\middle|t\in R\right\}\subset R^4$

Tập Ker *f* là không gian véc tơ con của không gian R^4

http://tnut.edu.vn

3.2. Hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Ví dụ : Xét ánh xạ tuyến tính $T: R^3 \to R^2$ xác định bởi

$$T(x;y;z) = (x+y+z; x-y-z)$$

Có: $\mathrm{Ker}T = \{(0;-z;z) \in R^3 \mid z \in R\}$

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}T) = 1$

Mà: $\dim R^3 = 3$

Do đó: $\dim(\mathrm{Ker}T) + \dim(\mathrm{Im}T) = 3$

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Im}T) = 3 - 1 = 2$

$\Rightarrow rankT = 2$

http://tnut.edu.vn

http://tnut.edu.vn

CHƯƠNG 3: ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

http://tnut.edu.vn

3.3. Ma trận của ánh xạ tuyến tính

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Định nghĩa:

Cho hai không gian vectơ hữu hạn chiều V, W trong đó

$\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$

Gọi $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $B' = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ là cơ sở của V và W

Ma trận: $A = \left([T(u_1)]_{B'}\;\; [T(u_2)]_{B'}\;\; \cdots\;\; [T(u_n)]_{B'}\right)_{m \times n}$

được gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính T: V→ W ứng với cơ sở B trong V và cơ sở B' trong W.

Khi đó ma trận A thỏa mãn $[T(x)]_{B'} = A.[x]_B \quad \forall x \in V$

http://tnut.edu.vn

3.3: Ma trận của ánh xạ tuyến tính.

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

Ví dụ : Cho ánh xạ tuyến tính

$$T: R^2 \to R^3$$
$$(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_1 - 3x_2, 5x_1)$$

a) Tìm ma trận của ánh xạ T đối với cơ sở B = {$u_1(1, 5)$, $u_2(-1, -4)$} của R^2 và cơ sở B' = {$v_1(1, -1, 0)$, $v_2(2, 2, 0)$, $v_3(0, 0, -3)$} của R^3.

b) Dựa vào ma trận vừa tìm ở ý (a), tính $[T(x)]_{B'}$ biết $[x]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

http://tnut.edu.vn

3.3: Ma trận của ánh xạ tuyến tính

HỌC ĐỂ NÂNG CAO CUỘC SỐNG

a) Ta có: $T: R^2 \to R^3$

$(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_1 - 3x_2, 5x_1)$

$\Rightarrow T(u_1) = T(1;5) = (6;-14;5)$

$\Rightarrow T(u_2) = T(-1;-4) = (-5;11;-5)$

Tìm $[T(u_1)]_{B'}; [T(u_2)]_{B'}$

Giả sử: $T(u_1) = c_1.v_1 + c_2.v_2 + c_3.v_3 \Rightarrow \begin{cases} c_1 + 2c_2 = 6 \\ -c_1 + 2c_2 = -14 \\ -3c_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 10 \\ c_2 = -2 \\ c_3 = -5/3 \end{cases}$

Vậy: $[T(u_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 10 \\ -2 \\ -5/3 \end{bmatrix}$

http://tnut.edu.vn

3.3: Ma trận của ánh xạ tuyến tính

- Ma trận của toán tử tuyến tính

Cho toán tử tuyến tính T: V→ V và $B=\{u_1;u_2;...;u_n\}$ là một cơ sở của không gian V.

Khi đó: Ma trận $A=\left(\left[T(u_1)\right]_B \quad \left[T(u_2)\right]_B \quad ... \quad \left[T(u_n)\right]_B\right)_{n\times n}$

gọi là ma trận của toán tử tuyến tính T ứng với cơ sở B và

$$\left[T(x)\right]_B = A.\left[x\right]_B \quad \forall x\in V$$

3.3: Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Ví dụ : Cho toán tử tuyến tính $T:R^2 \to R^2$

Tìm T(u) với u = (2; 6) biết ma trận của toán tử tuyến tính ứng với cơ sở B = {u_1(1, -2), u_2(0, 2)} là $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

Giải: A là ma trận của toán tử tuyến tính T ứng với cơ sở B

nên ta có: $\left[T(u)\right]_B = A.\left[u\right]_B$

Giả sử

$$u=c_1.u_1+c_2.u_2 \Rightarrow \begin{cases} c_1=2\\ -2c_1+2c_2=6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=2\\ c_2=5\end{cases} \Rightarrow \left[u\right]_B=\begin{bmatrix}2\\ 5\end{bmatrix}$$

3.3: Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Suy ra:

$$\left[T(u)\right]_B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\ -5\end{bmatrix}$$

Vậy:

$$\Rightarrow T(u)=9.u_1-5.u_2$$

$$\Rightarrow T(u)=(9;-28)$$

3.4. Sự đồng dạng

Ma trận đồng dạng

Định nghĩa: Giả sử A và B là hai ma trận vuông cùng cấp n. Ta nói ma trận A đồng dạng với ma trận B, kí hiệu nếu tồn tại một ma trận khả đảo P cấp n sao cho $A=P^{-1}.B.P$

Nhận xét: $A=P^{-1}.B.P \Leftrightarrow P.A.P^{-1}=P.P^{-1}.B.P.P^{-1} \Leftrightarrow P.A.P^{-1}=B$

$$\Leftrightarrow B=\left(P^{-1}\right)^{-1}.A.P^{-1}$$

Nếu A đồng dạng với B thì B cũng đồng dạng với A

3.4. Sự đồng dạng

Định lý: Giả sử T là một toán tử tuyến tính trong không gian n chiều V. Nếu A và A’ tương ứng là các ma trận của toán tử T ứng với cơ sở B và B’ thì trong đó P là ma trận chuyển cơ sở từ B sang B’

Nhận xét:

Các ma trận của cùng một toán tử tuyến tính T ứng với các cơ sở khác nhau là các ma trận đồng dạng

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

BÀI GIẢNG ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

CHƯƠNG 4: TRỊ RIÊNG VÀ VÉC TƠ RIÊNG

(Video số 25)

4.1.3. Tìm vectơ riêng của ma trận

Định nghĩa: Cho $A \in M_n$, không gian nghiệm của phương trình $(A - \lambda I_n)x = \theta$ được gọi là không gian riêng của A ứng với trị riêng λ.

Số chiều của không gian riêng đó được gọi là số bội hình học của λ.

4.1.3. Tìm vectơ riêng của ma trận

Quá trình tìm véc tơ riêng và cơ sở của không gian riêng

Giải phương trình đặc trưng $\det(A-\lambda E) = 0$, Tìm các trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$

Với mỗi λ_k, tìm nghiệm x khác không từ hệ $(A-\lambda_k E)x = \theta$, và tìm cơ sở của không gian nghiệm của hệ.

Ví dụ 1: Tìm các trị riêng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

Phương trình đặc trưng

$$\det(A-\lambda E) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 3 \\ \lambda = -1 \end{array}\right.$$

Vậy các trị riêng của ma trận A là: $\lambda_1 = 3; \lambda_2 = -1$

Ví dụ 2: Tìm các trị riêng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Ta có:

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) - 4(3-\lambda) - 4(1-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - 4(3-\lambda+1-\lambda) = (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - 8(2-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)(\lambda^2 + 4\lambda - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \lambda = -1 \\ \lambda = 5 \end{array}\right.$$

Vậy các trị riêng của ma trận A là:

$$\lambda_1 = 2; \lambda_2 = -1; \lambda_3 = 5$$

Vậy các trị riêng của ma trận A là: $\lambda_1 = 3; \lambda_2 = -1$

Cơ sở của không gian riêng ứng với $\lambda_1 = 3$ là $u_1(1,2)$

Cơ sở của không gian riêng ứng với $\lambda_2 = -1$ là $u_2(0,1)$

Ví dụ 2: Tìm các cơ sở của không gian riêng của

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Ta có

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) - 4(3-\lambda) - 4(1-\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow (2-\lambda)(\lambda^2 + 4\lambda - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \lambda = -1 \\ \lambda = 5 \end{array}\right.$$

Với $\lambda = 2$ ta có: $(A - \lambda E)x = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \theta$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$$

Nghiệm tổng quát: $(-2t; 2t, t) = t(-2, 2, 1)$

Vậy $u_1 = (-2, 2, 1)$ là cơ sở của không gian riêng ứng với $\lambda = 2$

Với $\lambda = -1$ ta có: $(A - \lambda E)x = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \theta$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

Nghiệm tổng quát:

$$\left(-\frac{1}{2}s, -s, s\right) = -\frac{1}{2}s(1, 2, -2)$$

Vậy $u_2 = (1, 2, -2)$ là cơ sở của không gian riêng ứng với $\lambda = -1$

Với $\lambda = 5$ ta có: $(A - \lambda E)x = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \theta$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 2x_3 = 0 \\ -4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

Nghiệm tổng quát: $\left(t, \frac{1}{2}t, t\right) = \frac{1}{2}t(2, 1, 2)$

Vậy $u_3 = (2, 1, 2)$ là cơ sở của không gian riêng ứng với $\lambda = 5$

Ví dụ 2: Ma trận A có chéo hoá được không

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

Ta có:

$$A-\lambda E=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ -4 & 4-\lambda & 0\\ -2 & 1 & 2-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ -4 & 4-\lambda & 0\\ -2 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(4-\lambda)(2-\lambda)+4(2-\lambda)=0$$

$\Leftrightarrow(2-\lambda)(\lambda-2)^2=0\Leftrightarrow\lambda=2$ nghiệm bội 3

Với $\lambda=2$ ta có:

$$A-\lambda E=\begin{bmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ -4 & 4-\lambda & 0\\ -2 & 1 & 2-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x_1+x_2=0\\ -4x_1+2x_2=0\\ -2x_1+x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=2x_1\\ x_3 \text{ tuỳ ý}\end{cases}$$

Nghiệm tổng quát:

$(t,2t,s)=(t,2t,0)+(0,0,s)=t(1,2,0)+s(0,0,1)$

Vậy A là ma trận vuông cấp 3 chỉ có hai véc tơ riêng độc lập tuyến tính nên ma trận A không chéo hoá được

Ví dụ 3: Ma trận A có chéo hoá được không

$$\begin{bmatrix}3 & -2 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

Ta có:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}3-\lambda & -2 & 0\\ -2 & 3-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 5-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2(5-\lambda)-4(5-\lambda)=0$$

$\Leftrightarrow(5-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+5)=(5-\lambda)^2(1-\lambda)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\lambda=1\\ \lambda=5 \text{ nghiệm bội 2}\end{array}\right.$

Với $\lambda=5$ ta có:

$$A-\lambda E=\begin{bmatrix}3-\lambda & -2 & 0\\ -2 & 3-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 5-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-2 & -2 & 0\\ -2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x_1-2x_2+0x_3=0\\ -2x_1-2x_2+0x_3=0\\ 0x_1+0x_2+0x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-x_2\\ x_3 \text{ tuỳ ý}\end{cases}$$

Nghiệm tổng quát: $(-s,s,t)=s(-1,1,0)+t(0,0,1)$

Vậy $u_1=(-1,1,0),u_2(0,0,1)$ là cơ sở của không gian riêng ứng với $\lambda=5$

Quy trình chéo hoá trực giao các ma trận đối xứng A

Bước 1: Tìm một cơ sở cho mỗi không gian riêng của ma trận đối xứng A.

Bước 2: Áp dụng quá trình trực chuẩn hoá Gram – Smidt vào mỗi cơ sở đó để được một cơ sở trực chuẩn cho mỗi không gian riêng, ta thu được n véc tơ riêng trực chuẩn $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ứng với các giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

Quy trình chéo hoá trực giao các ma trận đối xứng A

Bước 3: Lập ma trận P mà các cột của nó là các vectơ xây dựng ở bước 2, ma trận P này sẽ làm chéo hoá ma trận A, Tức: $A' = P^{-1}AP = P'AP$

Ví dụ 1: Chéo hoá trực giao ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ta có:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^3 + 8 + 8 - 4(1-\lambda) - 4(1-\lambda) - 4(1-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)^3 - 12(1-\lambda) + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-\lambda = -4 \\ 1-\lambda = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 5 \\ \lambda = -1 \end{array}\right.$$

Với $\lambda = -1$ ta có: $(A - \lambda E)x = \theta \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 - x_3$$

Nghiệm tổng quát: $(-t-s, t, s) = (-t, t, 0) + (-s, 0, s) = t(-1,1,0) + s(-1,0,1)$

Vậy $\{u_1 = (-1;1;0); u_2(-1;0;1)\}$ là cơ sở của không gian riêng ứng với $\lambda = -1$

Trực chuẩn hoá Gram – Schmidt vào hệ $\{u_1, u_2\}$

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0), a_2 = u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1 = (-1,0,1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) = \frac{1}{2}(-1,-1,2)$$

$$v_2 = \frac{a_2}{\|a_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)$$

Vậy cơ sở trực chuẩn của không gian riêng ứng với $\lambda =$ Tà!

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0), v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)$$

Ví dụ 1:

Tìm ma trận P làm chéo hoá trực giao A và xác định $P^{-1}AP$

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

Phương trình đặc trưng

$$\det(A-\lambda E)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}3-\lambda & 1\\ 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda=4\\ \lambda=2\end{array}\right.$$

$\lambda=4$

$$\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1=x_2$$

$(x_1,x_2)=(t,t)=t(1,1)$

Vậy $u_1(1,1)$ là cơ sở của không gian riêng ứng với $\lambda=4$

$$v_1=\frac{u_1}{\|u_1\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Với $\lambda=2$ ta có:

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=-x_2\\ x_2=s\end{cases} \Leftrightarrow (x_1,x_2)=(-s,s)=s(-1,1)$$

Vậy $u_2(-1,1)$ là cơ sở của không gian riêng ứng với trị riêng $\lambda=2$

Véc tơ riêng đã trực chuẩn hoá là:

$$v_2=\frac{u_2}{\|u_2\|}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Vậy ma trận P làm chéo hoá trực giao ma trận A là

Ma trận $P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

Ví dụ 2: Tìm ma trận P làm chéo hoá trực giao A và xác định $P^{-1}AP$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Ta có:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 0\\ 1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda)+\lambda=\lambda\left[1-(1-\lambda)^2\right]=\lambda(-\lambda^2+2\lambda)=\lambda^2(2-\lambda)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda=2\\ \lambda=0\end{array}\right.$$ **bội 2**

TỔNG KẾT ĐỀ TÀI

Đề tài đã xây dựng bài giảng lý thuyết của học phần Đại số tuyến tính trên phần mềm Powerpiont, sau đó tiến hành quay 30 video bài giảng làm tài liệu học tập trực quan, sinh động cho sinh viên trường đại học Kỹ thuật Công nghiệp – Đại học Thái Nguyên.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Larson, Edwards, Falvo (2009), Elementary Linear Algebra 6th edition, Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company.

[2] Ôn Ngũ Minh (2012), Bài giảng toán 1, Đại học KTCN Thái Nguyên.

[3] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh (2004), Toán học cao cấp Tập 1- NXB Giáo dục 2004.

[4] Nguyễn Đình Trí , Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh- Bài tập Toán học cao cấp tập 1- NXB Giáo dục, 2004

IV. LỜI CẢM ƠN

Chúng tôi xin chân thành cảm ơn Trường Đại Học Kỹ Thuật Công Nghiệp, ĐH Thái Nguyên đã tài trợ kinh phí cho chúng tôi hoàn thành đề tài này. Xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các thầy cô giáo bộ môn Toán, Khoa Khoa học cơ bản và ứng dụng; các thầy cô giáo bộ môn Khoa học tự nhiên, khoa Quốc Tế và bạn bè đồng nghiệp cũng như các em sinh viên trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp Thái Nguyên đã giúp đỡ chúng tôi trong quá trình hoàn thiện đề tài.

THUYẾT MINH ĐỀ TÀI
KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP TRƯỜNG NĂM 2022

1. TÊN ĐỀ TÀI:	2. MÃ SỐ: T2022-VD20
Xây dựng video bài giảng học phần Đại số tuyến tính	

3. LĨNH VỰC NGHIÊN CỨU

Khoa học Tự nhiên	X	Khoa học Kỹ thuật và Công nghệ	☐
Khoa học Y, dược	☐	Khoa học Nông nghiệp	☐
Khoa học Xã hội	☐	Khoa học Nhân văn	☐

4. LOẠI HÌNH NGHIÊN CỨU

Cơ bản	Ứng dụng	Triển khai
☐	☐	X

5. THỜI GIAN THỰC HIỆN DỰ KIẾN: 12 tháng

Từ tháng 3 năm 2022 đến tháng 3 năm 2023

6. CHỦ NHIỆM ĐỀ TÀI

Họ và tên: Phạm Thị Minh Hạnh — Học vị: Thạc sỹ

Chức danh khoa học: — Năm sinh: 1986

Địa chỉ cơ quan: Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp, đường 3/2, phường Tích Lương, thành phố Thái Nguyên, tỉnh Thái Nguyên

Điện thoại di động: 0977791201

Fax:

Điện thoại cơ quan:

E-mail: phamminhhanh86@gmail.com

7. NHỮNG THÀNH VIÊN THAM GIA NGHIÊN CỨU ĐỀ TÀI

TT	Họ và tên	Đơn vị công tác và lĩnh vực chuyên môn	Nội dung nghiên cứu cụ thể được giao	Chữ ký
1	ThS Nguyễn Thị Phương	Khoa KHCB – Lĩnh vực chuyên môn Toán học	Thiết kế nội dung bài giảng video chương 1,4	
2	ThS Lê Bích Ngọc	Khoa KHCB – Lĩnh vực chuyên môn Toán học	Thiết kế nội dung bài giảng video chương 2,3	
3	ThS Hoàng Thanh Nga	Khoa KHCB – Lĩnh vực chuyên môn Toán học	Thiết kế nội dung bài giảng video chương 4	

8. ĐƠN VỊ PHỐI HỢP CHÍNH

Tên đơn vị trong và ngoài nước	Nội dung phối hợp nghiên cứu	Họ và tên người đại diện đơn vị

9. TỔNG QUAN TÌNH HÌNH NGHIÊN CỨU THUỘC LĨNH VỰC CỦA ĐỀ TÀI Ở TRONG VÀ NGOÀI NƯỚC

9.1. Trong nước *(phân tích, đánh giá tình hình nghiên cứu thuộc lĩnh vực của đề tài ở Việt Nam, liệt kê danh mục các công trình nghiên cứu, tài liệu có liên quan đến đề tài được trích dẫn khi đánh giá tổng quan)*

Trong những năm trở lại đây học tập trực tuyến được quan tâm và phát triển mạnh mẽ trên thế giới cũng như ở Việt Nam. Lượng video bài giảng thuộc lĩnh vực Toán học nói chung và Đại số tuyến tính nói riêng từ các nguồn khác nhau trên internet khá lớn giúp người học dễ dàng tìm hiểu, tham khảo và học tập. Tuy nhiên các video thường được xây dựng nội dung theo từng chủ điểm nên việc tìm được đầy đủ các video bài giảng môn Đại số tuyến tính được thiết kế liền mạch có tính hệ thống và bao trùm toàn bộ nội dung của môn học vẫn còn khó khăn

9.2. Ngoài nước *(phân tích, đánh giá tình hình nghiên cứu thuộc lĩnh vực của đề tài trên thế giới, liệt kê danh mục các công trình nghiên cứu, tài liệu có liên quan đến đề tài được trích dẫn khi đánh giá tổng quan)*

9.3. Danh mục các công trình đã công bố thuộc lĩnh vực của đề tài của chủ nhiệm và những thành viên tham gia nghiên cứu (*họ và tên tác giả; bài báo; ấn phẩm; các yếu tố về xuất bản*)

a) Của chủ nhiệm đề tài

b) Của các thành viên tham gia nghiên cứu

(Những công trình được công bố trong 5 năm gần nhất)

10. TÍNH CẤP THIẾT CỦA ĐỀ TÀI

Đại số tuyến tính là học phần toán bắt buộc thuộc khối kiến thức giáo dục đại cương được giảng dạy cho tất cả sinh viên năm thứ nhất ở trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp. Trước tình hình dịch Covid – 19 như hiện nay đòi hỏi hoạt động giảng dạy và học tập trong nhà trường cần linh hoạt và chủ động tổ chức theo hình thức trực tuyến hay giảng dạy trực tiếp kết hợp trực tuyến. Tuy nhiên thực tiễn hoạt động dạy học trực tuyến đối với các môn học nói chung và đối với môn Đại số tuyến tính nói riêng còn gặp nhiều khó khăn do các yếu tố khách quan. Vì vậy để nâng cao chất lượng dạy và học đối với học phần toán Đại số tuyến tính chúng tôi đề xuất đề tài: *"Xây dựng video bài giảng học phần Đại số tuyến tính"*. Các video bài giảng được thiết kế logic và hệ thống, có nội dung bám sát đề cương môn học. Đây sẽ là nguồn tài liệu phục vụ, hỗ trợ công tác giảng dạy trực tiếp cũng như trực tuyến của giảng viên bộ môn Toán đồng thời cũng là một nguồn tài liệu hữu ích phục vụ cho hoạt động tự học của sinh viên. Ngoài ra sử dụng các video bài giảng sẽ giúp giảng viên và sinh viên có thêm thời gian thảo luận, trao đổi nội dung kiến thức trong các giờ lên lớp góp phần nâng cao hiệu quả và chất lượng giờ học.

11. MỤC TIÊU ĐỀ TÀI

Thiết kế và thực hiện video bài giảng của học phần Đại số tuyến tính

12. ĐỐI TƯỢNG, PHẠM VI NGHIÊN CỨU

12.1. Đối tượng nghiên cứu: Xây dựng video bài giảng của học phần Đại số tuyến tính

12.2. Phạm vi nghiên cứu: Các nội dung dạy và học của học phần Đại số tuyến tính tại trường ĐH Kỹ thuật Công nghiệp.

13. CÁCH TIẾP CẬN, PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

13.1. Cách tiếp cận: Thu thập thông tin – Luận cứ lý thuyết, thực tiễn – Phân tích, thảo luận – Kết luận, đề nghị.

13.2: Phương pháp nghiên cứu:

- Phương pháp nghiên cứu lý thuyết.
- Phương pháp thực nghiệm sư phạm.

14. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU VÀ TIẾN ĐỘ THỰC HIỆN

14.1. Nội dung nghiên cứu (***Mô tả chi tiết những nội dung nghiên cứu của đề tài***)

14.2. Tiến độ thực hiện

STT	Các nội dung, công việc thực hiện	Sản phẩm	Thời gian (bắt đầu-kết thúc)	Người thực hiện
1	Viết thuyết minh đề tài, nghiên cứu tìm hiểu các phần mềm thiết kế xây dựng video bài giảng.	Báo cáo	3/2022 – 4/2022	Phạm Thị Minh Hạnh

2	Xây dựng các video bài giảng chương 1 học phần Đại số tuyến tính	Video bài giảng	5/2022 – 8/2022	Phạm Thị Minh Hạnh; Nguyễn Thị Phương
3	Xây dựng các video bài giảng chương 2,3 học phần Đại số tuyến tính	Video bài giảng	8/2022 – 11/2022	Lê Bích Ngọc; Phạm Thị Minh Hạnh
4	Xây dựng các video bài giảng chương 4 học phần Đại số tuyến tính	Video bài giảng	11/2022 – 2/2023	Nguyễn Thị Phương; Hoàng Thanh Nga

15. SẢN PHẨM

Stt	Tên sản phẩm	Số lượng	Yêu cầu chất lượng sản phẩm *(mô tả chi tiết chất lượng sản phẩm đạt được như nội dung, hình thức, các chỉ tiêu, thông số kỹ thuật,...)*
I	Sản phẩm khoa học (Các công trình khoa học sẽ được công bố: sách, bài báo khoa học, ..)		
1.1			
II	Sản phẩm đào tạo (cử nhân, thạc sĩ, tiến sĩ,...)		
2.1			
III	Sản phẩm ứng dụng		
3.1	Video bài giảng học phần Đại số tuyến tính		

16. PHƯƠNG THỨC CHUYỂN GIAO KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU VÀ ĐỊA CHỈ ỨNG DỤNG

16.1. Phương thức chuyển giao

16.2. Địa chỉ ứng dụng

17. TÁC ĐỘNG VÀ LỢI ÍCH MANG LẠI CỦA KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

17.1. Đối với lĩnh vực giáo dục và đào tạo: tạo ra sản phẩm học thuật có chất lượng và có ý nghĩa thực tiễn trong dạy và học các học phần Toán cho sinh viên khối trường đại học chuyên ngành kỹ thuật.

17.2. Đối với lĩnh vực khoa học và công nghệ có liên quan: Phát triển hướng nghiên cứu đổi mới phương pháp dạy và học tích cực theo định hướng phát triển năng lực người học và đổi mới giáo dục trong thời đại 4.0.

17.3. Đối với phát triển kinh tế-xã hội: Tạo cở sở khoa học cho việc xây dựng và phát triển thương hiệu một trường đại học, cơ sở giáo dục nghề nghiệp cho đất nước trong thời đại công nghiệp hóa ngày nay.

17.4. Đối với tổ chức chủ trì và các cơ sở ứng dụng kết quả nghiên cứu: nâng cao chất lượng dạy và học trong quá trình đào tạo của trường ĐH Kỹ Thuật Công Nghiệp.

18. KINH PHÍ THỰC HIỆN ĐỀ TÀI

Tổng kinh phí: : 3.600.000đ

Bằng chữ: Ba triệu sáu trăm nghìn đồng chẵn.

(Dự toán chi tiết các mục chi đính kèm có xác nhận của các đơn vị liên quan.)

Ngày tháng năm 20

Chủ nhiệm đề tài	**PHÒNG KHCN&HTQT**
ThS. Phạm Thị Minh Hạnh	
HỘI ĐỒNG KHOA KHCB	**KT. HIỆU TRƯỞNG** **PHÓ HIỆU TRƯỞNG**
Nguyễn Văn Trường	**PGS.TS. Vũ Ngọc Pi**

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

ĐVT: VNĐ

DỰ TOÁN KINH PHÍ ĐỀ TÀI KH&CN CẤP TRƯỜNG NĂM 2022

Tên đề tài: Xây dựng video bài giảng học phần Đại số tuyến tính

Chủ nhiệm đề tài: ThS. Phạm Thị Minh Hạnh

Thành viên chính: ThS. Nguyễn Thị Phương; ThS. Lê Bích Ngọc; ThS. Hoàng Thanh Nga

Thành viên:

ĐVT: VNĐ

STT	Nội dung	Dự toán			
1	***Mục chi tiền công lao động tham gia trực tiếp (1)***	**Người thực hiện**	**Số ngày công**	**Hệ số tiền công theo ngày (2)***	**Thành tiền**
1.1	Xây dựng thuyết minh đề tài. Nghiên cứu tìm hiểu các phần mềm thiết kế xây dựng video bài giảng.	Phạm Thị Minh Hạnh	1	0,45	670.500
1.2	Xây dựng video bài giảng chương 1	Nguyễn Thị Phương	1	0,3	447.000
1.3		Phạm Thị Minh Hạnh	1	0,45	670.500
1.4	Xây dựng video bài giảng chương 2,3	Lê Bích Ngọc	1	0,3	447.000
1.5		Phạm Thị Minh Hạnh	1	0,45	670.500
1.6	Xây dựng video bài giảng chương 4	Hoàng Thanh Nga	1	0,3	447.000
1.7		Nguyễn Thị Phương	0,5	0,3	223.500
	Tổng 1		**6,5**		**3.576.000**
2	***Mục chi khác***				
	Phô tô, in ấn				24.000
	Tổng 2				**24.000**
	Tổng (1+2)				**3.600.000**

** 0,45 là hệ số của chủ nhiệm đề tài; 0,3 là hệ số của thành viên chính; 0,15 là hệ số của thành viên*

Cơ quan chủ trì
KT. HIỆU TRƯỞNG
PHÓ HIỆU TRƯỞNG

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

PGS.TS. Vũ Ngọc Pi

TRƯỞNG PHÒNG KHCN&HTQT

CHỦ NHIỆM ĐỀ TÀI

Phạm Thị Minh Hạnh

TRƯỞNG PHÒNG KH-TC