MỤC LỤC

TRƯỜNG ĐẠI HỌC
KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP
Đơn vị: Khoa KHCB &ƯD

THÔNG TIN KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

1. Thông tin chung:

- Tên đề tài: Xây dựng video bài giảng cho học phần Phương pháp tính.
- Mã số: T2022-VD22
- Chủ nhiệm: ThS. Phan Thị Vân Huyền
- Cơ quan chủ trì: Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp
- Thời gian thực hiện: 4/2022 – 5/2023

2. Mục tiêu:

- Nghiên cứu tìm hiểu cách xây dựng và biên tập video bài giảng.
- Xây dựng các video tóm tắt được các nội dung cơ bản của học phần Phương pháp tính giúp cho sinh viên học tập tốt hơn học phần này.

3. Kết quả nghiên cứu:

Xây dựng được 18 video bài giảng của học phần Phương pháp tính.

4. Sản phẩm:

Sản phẩm ứng dụng: 18 video bài giảng của học phần Phương pháp tính.

5. Hiệu quả:

6. Khả năng áp dụng và phương thức chuyển giao kết quả nghiên cứu:

Áp dụng trong giảng dạy và học tập môn Phương pháp tính tại trường Đại học kỹ Thuật Công nghiệp – Đại học Thái Nguyên.

Ngày tháng 5 năm 2023

Cơ quan chủ trì	**Chủ nhiệm đề tài**
KT.HIỆU TRƯỞNG	
PHÓ HIỆU TRƯỞNG	
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP	
PGS.TS. Vũ Ngọc Pi	**ThS. Phan Thị Vân Huyền**

INFORMATION ON RESEARCH RESULTS

1. General information:

Project title: Creating video lectures of the Calculation method module.

Code number: T2022-VD22

Coordinator: Phan Thi Van Huyen

Implementing institution: Thai Nguyen University of Technology

Duration: from 4/2022 to 5/2023

2. Objective(s):

- Learning how to create and edit video lectures.

- Creating videos that summarize the main contents of the Calculation method module to help students learn it better.

3. Research results:

Creating 18 video lectures of the Calculation method module.

4. Products:

Application products: Created 18 video lectures of the Calculation method module.

5. Effects:

6. Transfer alternatives of reserach results andapplic ability:

Able to apply in teaching and learning the Calculation method module at Thai Nguyen University of Technology.

MỞ ĐẦU

1. Tính cấp thiết của đề tài

- Học tập trực tuyến đã không còn xa lạ và đang bùng nổ mạnh mẽ trên thế giới cũng như ở Việt Nam. Hệ thống các video bài giảng của lĩnh vực Toán học nói chung đang phát triển mạnh mẽ và rất được quan tâm trong giai đoạn hiện nay. Người học có thể dễ dàng tìm kiếm các video bài giảng từ các nguồn khác nhau của internet.
- Các video bài giảng về các nội dung kiến thức toán ứng dụng cho kỹ thuật cũng ang được quan tâm trong giai đoạn hiện nay tuy nhiên số lượng video bài giảng về lĩnh vực này chưa được nhiều và phong phú như các lĩnh vực khác của Toán học.
- Học phần Phương pháp tính là một học phần được giảng dạy cho sinh viên một số ngành của trường ĐH KTCN. Nội dung kiến thức của học phần này được sử dụng nhiều trong các môn học chuyên ngành của sinh viên trong những năm học tiếp theo. Tuy vậy hiện tại chỉ có các sinh viên khối ngành cơ điện tử được học học phần này.
- Với mong muốn nâng cao chất lượng học tập cho sinh viên trường ĐH KTCN trong giai đoạn học online cũng như sau này. Đồng thời giúp các sinh viên không được học học phần Phương pháp tính trong khung chương trình của mình vẫn có thể tiếp cận với môn học này, nhóm nghiên cứu đề xuất đề tài: *"Xây dựng Video bài giảng cho học phần Phương pháp tính"* để sinh viên có thể tiếp thu kiến thức tốt hơn khi xem các video bài giảng trước và sau mỗi buổi học cũng như ôn tập cuối kỳ.

2. Mục tiêu nghiên cứu

- Nghiên cứu tìm hiểu cách xây dựng và biên tập video bài giảng.

- Xây dựng các video tóm tắt được các nội dung cơ bản của học phần Phương pháp tính giúp cho sinh viên học tập tốt hơn học phần này..

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

3.1. Đối tượng nghiên cứu: Xây dựng video bài giảng các nội dung cơ bản của học phần Phương pháp tính.

3.2. Phạm vi nghiên cứu: Các nội dung dạy và học học phần Phương pháp tính tại trường ĐH Kỹ thuật Công nghiệp.

4. Cách tiếp cận, phương pháp nghiên cứu

4.1. Cách tiếp cận: Thu thập thông tin – Luận cứ lý thuyết, thực tiễn – Phân tích, thảo luận – Kết luận, đề nghị.

4.2. Phương pháp nghiên cứu:

- Phương pháp nghiên cứu lý thuyết.
- Phương pháp thực nghiệm sư phạm

5. Kết quả nghiên cứu

Ngoài phần mở đầu, mục lục, danh mục tài liệu tham khảo, phục lục đề tài nghiên cứu đã xây dựng được 18 video bài giảng về các nội dung chính của học phần Phương pháp tính. Thời lượng mỗi video từ 15-20 phút.

NỘI DUNG

Các Video được đặt tên và xây dựng theo các nội dung chính của môn học Phương pháp tính nhằm giúp sinh viên dễ dàng trong việc lựa chọn tìm kiếm video về các phần kiến thức mình cần học một cách dễ dàng hơn.

Đề tài đã xây dựng được 18 video, cụ thể:

Video 1: Sai số

Video 2 + Video 3: Phương pháp chia đôi giải gần đúng phương trình.

Video 4: Phương pháp lặp giải gần đúng phương trình.

Video 5: Hệ phương trình Đại số tuyến tính và chuẩn của ma trận.

Video 6 + Video 7: Phương pháp lặp đơn (Jacobi) giải gần đúng Hệ phương trình.

Video 8: Phương pháp lặp Gauss-Seidel giải gần đúng Hệ phương trình.

Video 9: Đa thức nội suy Lagrang.

Video 10: Đa thức nội suy Newton không cách đều.

Video 11: Đa thức nội suy Newton cách đều.

Video 12: Phương pháp bình phương tối thiểu dạng $y = ax + b$

Video 13: Phương pháp bình phương tối thiểu tổng quát.

Video 14: Tính gần đúng đạo hàm.

Video 15: Công thức hình thang tính gần đúng tích phân.

Video 16: Công thức Simson tính gần đúng tích phân.

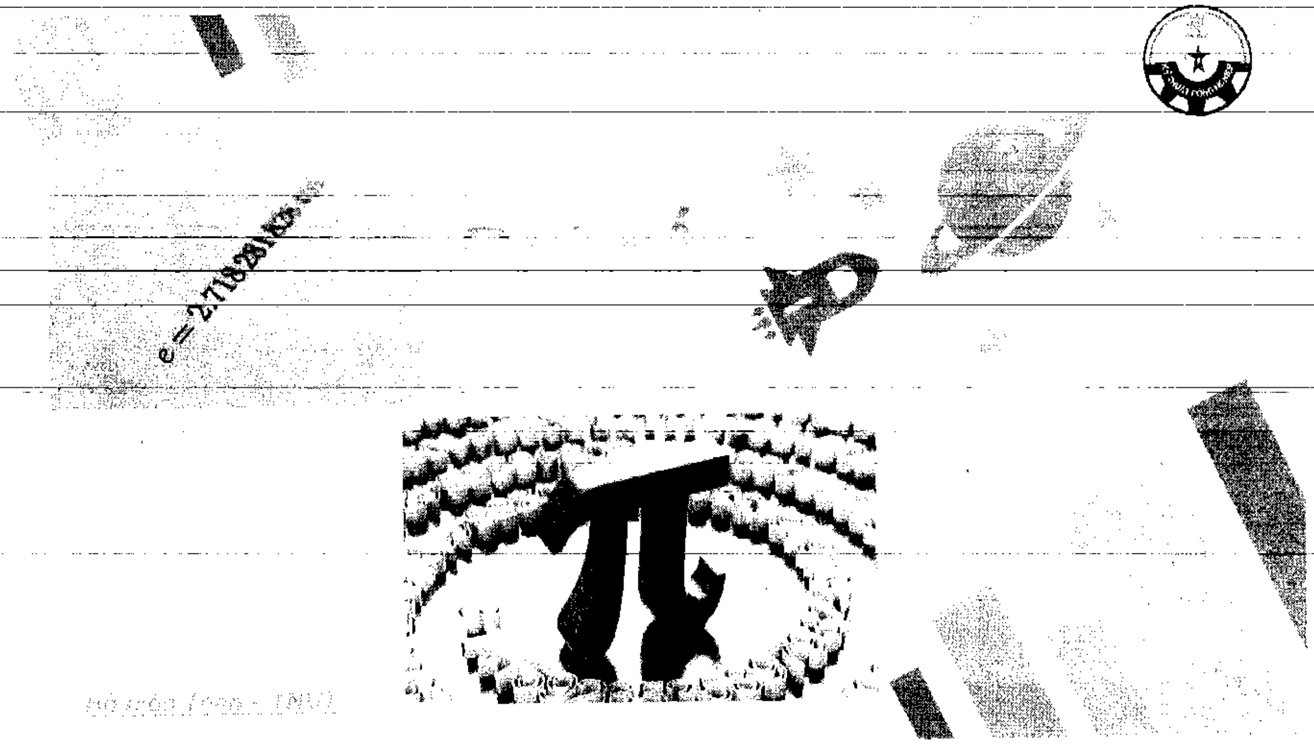
Video 17: Phương pháp Euler giải gần đúng phương trình vi phân.

Video 18: Phương pháp Euler giải gần đúng hệ phương trình vi phân.

SỐ XẤP XỈ
&
SAI SỐ

NỘI DUNG

- 1. Số xấp xỉ, sai số tuyệt đối và sai số tương đối
- 2. Cách viết số xấp xỉ
- 3. Sai số của hàm số



1. Số xấp xỉ và sai số

*Số a được gọi là **số xấp xỉ** của số đúng A nếu a khác A không đáng kể và được dùng thay A trong tính toán. Kí hiệu: $a \approx A$.*

$\Delta a = A - a$

$\Delta a = a - A$

được gọi là sai số của số xấp xỉ a.

$\Delta = |\Delta a| = |A - a|$

được gọi là sai số tuyệt đối của số xấp xỉ a.

$\delta = \dfrac{\Delta}{|A|} = \dfrac{|A - a|}{|A|}$

được gọi là <u>sai số tương đối</u> của số xấp xỉ a.

$$\boxed{\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}}$$

$|\Delta a| \leq \Delta_a$

Δ_a gọi là sai số tuyệt đối giới hạn của a.

$\delta \leq \delta_a$

δ_a gọi là sai số tương đối giới hạn của a.

2. Cách viết số xấp xỉ

2.1. Chữ số có nghĩa

Những chữ số có nghĩa của một số là tất cả những chữ số tính từ chữ số khác không đầu tiên kể từ trái sang phải.

Ví dụ: Số 0.010234 có các chữ số có nghĩa là: 1, 0, 2, 3, 4.

1.2.2 Chữ số đáng tin

Cho a là số xấp xỉ của A với sai số tuyệt đối giới hạn là Δ_a

Mọi số thực a đều biểu diễn được dưới dạng: $a = \pm\left(a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + \ldots + a_s 10^s + \ldots\right)$

Chữ số a_s là chữ số đáng tin nếu: $\Delta_a \le \frac{1}{2}.10^s$ ngược lại thì gọi là chữ số nghi ngờ.

2. Cách viết số xấp xỉ

Ví dụ:

Cho a = 12,456 và Δ_a= 0,006. Xác định các chữ số đáng tin và nghi ngờ của số a.

Lời giải: Ta có: $a = 1.10^1 + 2.10^0 + 4.10^{-1} + 5.10^{-2} + 6.10^{-3}$

Theo định nghĩa ta có: a_s là chữ số đáng tin nếu: $\Delta_a \le \frac{1}{2}.10^s$

$0,5.10^{-2} < \Delta_a = 0,6.10^{-2} < 0,5.10^{-1}$

Vậy: Các chữ số đáng tin là 1,2,4; nghi ngờ là 5,6.

Chú ý:

Nếu a_k là chữ số đáng tin thì những chữ số ở bên trái của nó cũng đáng tin và chữ số a_k là nghi ngờ thì những chữ số ở bên phải của nó cũng nghi ngờ.

2. Cách viết số xấp xỉ

Cách viết số xấp xỉ

Cách 1: Viết a kèm theo sai số tuyệt đối giới hạn

$$a \pm \Delta_a$$

Cách 2: Viết theo quy ước: mọi chữ số có nghĩa đều đáng tin

(Tức là: sai số tuyệt đối không lớn hơn một nửa đơn vị của chữ số cuối cùng bên phải.)

3. Sai số của hàm số

Xét hàm 2 biến $f = f(x,y)$ khả vi; x, y lần lượt là giá trị gần đúng của X. Y; $f = f(x,y)$ là giá trị gần đúng của $F = f(X,Y)$. Khi đó ta có:

$$|F - f| = |f(X,Y) - f(x,y)| \approx \left|\frac{\partial f}{\partial x}\Delta_x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta_y\right| \le \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta_x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta_y = \Delta_f$$

Tổng quát: Cho $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là hàm n biến khả vi với sai số của các đối số lần lượt là: Δ_{x_i}, khi đó:

Sai số tuyệt đối giới hạn của f

$$\Delta_f = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|.\Delta_{x_i}$$

Sai số tương đối giới hạn của f

$$\delta_f = \frac{\Delta_f}{|f|}$$

3. Sai số của hàm số

Ví dụ

Tìm Sai số tuyệt đối giới hạn và sai số tương đối giới hạn khi tính chu vi và diện tích hình tròn bán kính R? Biết $R = 1.8 \pm 0.0015\ (cm)$ và $\pi \approx 3.14$.

Bài giải:

Ta có: $R = 1.8 \pm 0.0015 \ \rightarrow\ \Delta_R = 0.0015$

$\pi = 3.14 \ \rightarrow\ \Delta_\pi = 0.005$

- **Chu vi**: $C = 2\pi R \ \rightarrow C'_\pi = 2R; \quad C'_R = 2\pi$

$$\rightarrow\ \Delta_C = |C'_\pi|.\Delta_\pi + |C'_R|.\Delta_R = 2R.\Delta_\pi + 2\pi.\Delta_R$$
$$= 2 \times 1.8 \times 0.005 + 2 \times 3.14 \times 0.0015$$
$$= 0.02742$$
$$\rightarrow\ \delta_C = \frac{\Delta_C}{|C|} = \frac{0.02742}{2 \times 3.14 \times 1.8} = 0.002469 \approx 0.0025$$

Phương pháp chia đôi

[illegible]

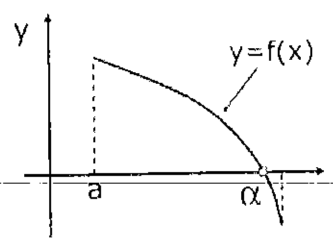
NỘI DUNG

1. Khoảng phân ly nghiệm
2. Phương pháp chia đôi
3. Ví dụ
4. Sử dụng Matlab

1. Khoảng phân ly nghiệm

*** Định nghĩa**

(a,b) gọi là khoảng phân ly nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ nếu :



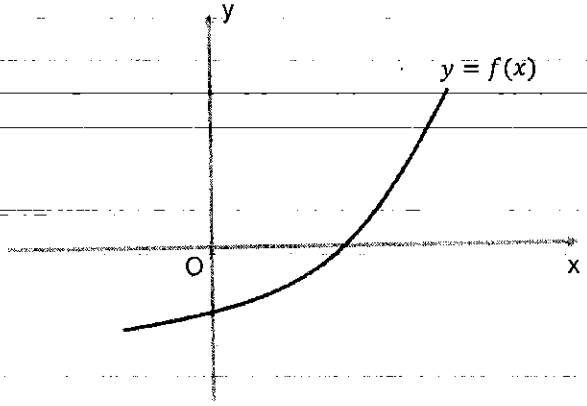
+ $f(a).f(b) < 0$

+ $f'(x)$ không đổi dấu trên [a,b]

*** Phương pháp tìm khoảng phân ly nghiệm**

Khảo sát sơ bộ hàm $y = f(x)$ trên miền xác định và dự đoán khoảng phân ly

2. Phương pháp chia đôi



2. Phương pháp chia đôi

a. Nội dung phương pháp

Giả sử (a,b) là khoảng phân ly nghiệm của PT f(x) = 0

Chia đôi (a,b) bởi trung điểm $c = \dfrac{a+b}{2}$

- Nếu f(c) = 0 thì c là nghiệm phương trình f(x) = 0
- Nếu f(c) ≠ 0 thì ta xác định khoảng phân ly mới của pt là một trong hai khoảng (a,c) hoặc (c,b) và tiếp tục quá trình chia đôi khoảng đó.

b. Đánh giá sai số của nghiệm gần đúng

Gọi ξ là nghiệm đúng của phương trình f(x) = 0.

Nếu quá trình chia đôi dừng ở bước thứ n thì:

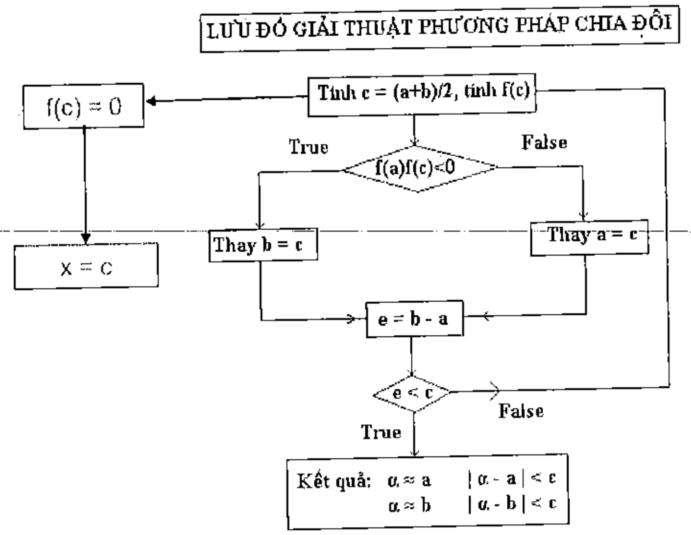
+ Nếu chọn nghiệm gần đúng là a_n hoặc b_n thì:

$$\varepsilon = |a_n - \xi| \le \frac{b-a}{2^n} \qquad \varepsilon = |b_n - \xi| \le \frac{b-a}{2^n}$$

+ Nếu chọn nghiệm gần đúng là $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ thì:

$$\varepsilon = |c_n - \xi| \le \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

Phương pháp chia đôi để tìm gần đúng nghiệm của PT với sai số không vượt quá ε cho trước.



Phương pháp chia đôi
tìm gần đúng nghiệm thực của phương trình đại số và siêu việt
(phần 2)

NỘI DUNG

- ~~1. Khoảng phân ly nghiệm~~
- 2. Phương pháp chia đôi
- 3. Ví dụ
- 4. Sử dụng Matlab

3. Ví dụ

Ví dụ 1:

Tính gần đúng nghiệm thực của phương trình

$$f(x) = 5x^3 - 20x + 3 = 0$$

trên (0; 1) bằng phương pháp chia đôi. Dừng ở bước thứ 5 và đánh giá sai số.

Giải:

$f(x) = 5x^3 - 20x + 3 = 0 \rightarrow f(0) = 3;\ \ f(1) = -12$

Dữ liệu tính toán được thể hiện trong bảng dưới đây.

n	*a*	*b*	*c*	*f(c)*
0	0	1	0.5	-6.3750
1	0	0.5	0.25	-1.9219
2	0	0.25	0.125	0.5098
3	0.125	0.25	0.1875	-0.7170
4	0.125	0.1875	0.1563	-0.1069
5	0.125	0.1563	0.1407	0.1999

Nghiệm gần đúng của phương trình là: $x \approx 0.1407$

Đánh giá sai số: $\varepsilon \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^6} = 0.015625$

Ví dụ 2:

Tính gần đúng nghiệm thực của phương trình

$$4x - 5\ln x - 5 = 0,$$

trên khoảng phân ly nghiệm là (2 ; 2.5) bằng phương pháp chia đôi với độ chính xác $\varepsilon = 0.01$

Giải:

$4x - 5\ln x - 5 = 0, \rightarrow f(2) = -0{,}4657;\ \ f(2.5) = 0.4185$

- Chọn c_n là nghiệm gần đúng của PT, khi đó với sai số $\varepsilon \le 0.01$ ta có:

$\frac{b-a}{2^{n+1}} \le \varepsilon \rightarrow \frac{2.5-2}{2^{n+1}} \le 0.01 \leftrightarrow 2^{n+1} \ge \frac{0.5}{0.01} = 50 \rightarrow n \ge \log_2 50 = 5.6$

- Dữ liệu tính toán được thể hiện trong bảng dưới đây.

n	a	b	c	f(c)
0	2	2.5	2.25	-0.0547
1	2.25	2.5	2.375	0.1750
2	2.25	2.375	2.3125	0.0584
3	2.25	2.3125	2.28125	0.0014
4	2.25	2.28125	2.265625	-0.0268
5	2.265625	2.28125	2.2734375	-0.0127
6	2.2734375	2.28125	**2.27734375**	-0.0057

4. Sử dụng Matlab

Viết đoạn mã lệnh sau vào tệp **bisection.m**. Biểu thức của hàm f(x) sẽ được truyền cho biến **Exp** tại lời gọi. Khoảng phân ly là [a, b] và sai số là **tol** (*tolerance*).

```
function c = bisection(Exp,a,b,tol) % Hàm có bốn tham số
     fa = subs(Exp,a);           % Giá trị của hàm tại mút a
     stop = 0;                   % Biến stop để ngừng vòng lặp
     tol = 2*tol;                % Sẽ lấy nghiệm là trung điểm
     while (stop == 0) && (b-a >= tol)
          c = (a + b)/2;         % Tính trung điểm c
          fc = subs(Exp,c);      % Giá trị hàm tại trung điểm c
          if fc == 0
               stop = 1;         % Thoát khỏi vòng lặp
          elseif fa*fc > 0       % Nếu F(c) cùng dấu F(a)
               a = c;            % Gán a bằng c
          else                   % Nếu F(c) trái dấu F(a)
               b = c;            % Gán b bằng c
          end
     end
end
```

Tại cửa sổ Command của MATLAB, nhập lệnh như sau:

```
>>bisection('5*x^3-20*x+3',0,1,0.0001)
   ans =
       0.1508
```

Phương pháp giải gần đúng phương trình đại số và siêu việt

NỘI DUNG

- 1. Phương pháp lặp
- 2. Ví dụ

1. Phương pháp lặp

a. Nội dung phương pháp

Giả sử (a,b) là khoảng phân ly nghiệm của pt f(x) = 0 (1)

Biến đổi ptrình (1) về dạng tương đương: $x = \varphi(x)$ (2)

với $|\varphi'(x)| \le q < 1,\ x \in [a,b],\ q \in \mathbb{R}^+$

Chọn $x_0 \in [a,b]$ bất kỳ làm nghiệm gần đúng ban đầu

và thực hiện quá trình lặp theo công thức: $x_{n+1} = \varphi(x_n)$

Khi đó ta thu được dãy các nghiệm gần đúng $\{x_n\}$.

Nếu $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \xi$ thì ξ là nghiệm đúng của phương trình.

b. Đánh giá sai số của nghiệm gần đúng

Giả sử ξ là nghiệm đúng và x_n là nghiệm gần đúng của phương trình f(x) = 0 trên (a,b).

Khi đó công thức đánh giá sai số là:

$$|x_n - \xi| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$$

Nếu cho trước sai số ε thì điều kiện dừng lặp là:

$$\frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$$

2. Ví dụ

Tính gần đúng nghiệm thực của phương trình $\mathbf{5x^3 - 20x + 3 = 0}$ trên [0; 1] bằng phương pháp lặp với sai số không quá 10^{-4}.

Giải

Bước 1: Xác định hàm lặp $\varphi(x)$ từ phương trình: $5x^3 - 20x + 3 = 0$

~~Lấy $\varphi_1(x) = 5x^3 - 19x + 3$. Vì $\varphi_1'(x) = 15x^2 - 19$ nên $4 < |\varphi_1'(x)| < 19\ \forall x \in (0, 1)$.~~ → *loại*

Lấy $\varphi(x) = \dfrac{5x^3 + 3}{20}$. Vì $\varphi'(x) = \dfrac{3}{4}x^2$ nên $|\varphi'(x)| < q = \dfrac{3}{4} < 1\ \forall x \in (0, 1)$. → *chọn*

Bước 2: Xác định điều kiện dừng lặp: Với sai số $\varepsilon \le 10^{-4}$ tính lặp đến khi thỏa mãn đ.k:

$$\frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \le 10^{-4} \to |x_n - x_{n-1}| \le \frac{1-q}{q}.10^{-4} = 3.10^{-5}$$

2. Ví dụ

Bước 3: Chọn $x_0 = 0.75$ và tính lặp theo công thức: $x_{n+1} = \frac{5x_n^3+3}{20}$

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	0.75	
1	0.25547	0.49453
2	0.15417	0.10130
3	0.15092	0.00325
4	0.15086	0.00006
5	0.15086	0

Nghiệm gần đúng của phương trình là: $x_5 = 0.15086$

PHƯƠNG PHÁP LẶP [illegible]
GIẢI GẦN ĐÚNG HỆ [illegible]
[illegible]

22

3. Phương pháp lặp đơn (lặp Jacobi)

Cho hệ phương trình tuyến tính hệ số hằng số với số phương trình bằng số ẩn:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Dạng ma trận của hệ phương trình trên là: A.x = b

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

3. Phương pháp lặp đơn (lặp Jacobi)

CÁC BƯỚC GIẢI GẦN ĐÚNG HPT BẰNG PP LẶP ĐƠN (JACOBI)

Bước 1 : Biến đổi HPT về dạng: $x = \alpha x + \beta$, với ma trận α t/m $\|\alpha\|_\infty < 1$

Bước 2 : Chọn nghiệm xấp xỉ đầu $x^{(0)} = \beta$

Bước 3 : Tính lặp theo công thức : $x^{(k+1)} = \alpha x^{(k)} + \beta$ n lần

Bước 4 : Kết luận nghiệm gần đúng của hệ là $x^{(n)}$ và đánh giá sai số theo CT:

$$\left\|x^{(n)} - x^*\right\|_\infty \leq \frac{\|\alpha\|_\infty}{1-\|\alpha\|_\infty}\left\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right\|_\infty$$

4. Ví dụ

* Dạng 1: Biết trước số lần lặp

Ví du 1:

Tính gần đúng nghiệm của hệ ptrình bằng phương pháp lặp đơn. Dừng lại ở bước thứ 3 và đánh giá sai số

$$\begin{cases} 4x_1 + 0.24x_2 - 0.08x_3 = 8 \\ 0.09x_1 + 3x_2 - 0.15x_3 = 9 \\ 0.04x_1 - 0.08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

Bước 1: Biến đổi HPT về dạng: $x = \alpha x + \beta$, với ma trận α t/m $\|\alpha\|_\infty < 1$

$$\begin{cases} 4x_1 + 0.24x_2 - 0.08x_3 = 8 \\ 0.09x_1 + 3x_2 - 0.15x_3 = 9 \\ 0.04x_1 - 0.08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -0.06x_2 + 0.02x_3 + 2 \\ x_2 = -0.03x_1 + 0.05x_3 + 3 \\ x_3 = -0.01x_1 + 0.02x_2 + 5 \end{cases}$$

(Chú ý: Với HPT trên thì $\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{bmatrix} \to \|\alpha\|_\infty = 0.08 < 1$, *thỏa mãn)*

Bước 2: Chọn nghiệm xấp xỉ đầu $x^{(0)} = \beta$, tức chọn $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \to \begin{cases} x_1^{(0)} = 2 \\ x_2^{(0)} = 3 \\ x_3^{(0)} = 5 \end{cases}$

24

Bước 3 : Tính các nghiệm xấp xỉ tiếp theo theo công thức lặp : $x^{(k+1)} = \alpha x^{(k)} + \beta$

Các kết quả tính lặp thể hiện vào trong bảng sau:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	2	3	5
1	1.92	3.19	5.04
2	1.9094	3.1944	5.0446
3	1.9092	3.1949	5.0448

Nghiệm gần đúng của HPT là:

$$\begin{cases} x_1 = 1.9092 \\ x_2 = 3.1949 \\ x_3 = 5.0448 \end{cases}$$

Bước 4 : Đánh giá sai số theo công thức: $\|x^{(n)} - x^*\|_\infty \le \dfrac{\|\alpha\|_\infty}{1 - \|\alpha\|_\infty} \|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|_\infty$

Ta có: $\|\alpha\|_\infty = 0.08$; $x^{(3)} - x^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.0002 \\ 0.0005 \\ 0.0002 \end{bmatrix} \to \|x^{(3)} - x^{(2)}\|_\infty = 0.0005$

Do đó: $\varepsilon = \|x^{(3)} - x^*\|_\infty \le \dfrac{0.08}{1 - 0.08} . 0.0005 = 4.3.10^{-5}$

$$\begin{cases} x_1 = -0.06x_2 + 0.02x_3 + 2 \\ x_2 = -0.03x_1 + 0.05x_3 + 3 \\ x_3 = -0.01x_1 + 0.02x_2 + 5 \end{cases}$$

(phần 2)

* Dạng 2: Cho trước sai số ε

Ví du:

Tính gần đúng nghiệm của hệ ptrình bằng phương pháp lặp đơn với sai số không quá $1,3.10^{-2}$

$$\begin{cases} 10,03x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

Bước 1 : Biến đổi HPT về dạng: $x = \alpha x + \beta$, với ma trận α t/m $\|\alpha\|_\infty < 1$

Bước 2 : Xác định điều kiện dừng lặp: $\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|_\infty \leq \frac{1-\|\alpha\|_\infty}{\|\alpha\|_\infty}.\varepsilon$

Bước 3 : Chọn nghiệm xấp xỉ đầu $x^{(0)} = \beta$

Bước 4 : Tính lặp theo công thức : $x^{(k+1)} = \alpha x^{(k)} + \beta$ đến khi thỏa mãn đ.k trong bước 2.

Giải:
$$\begin{cases} 10,03x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -0.003x_1 - 0.1x_2 - 0.1x_3 + 1.2 \\ x_2 = -0.2x_1 - 0.1x_3 + 1.3 \\ x_3 = -0.2x_1 - 0.2x_2 + 1.4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \begin{bmatrix} -0.003 & -0.1 & -0.1 \\ -0.2 & 0 & -0.1 \\ -0.2 & -0.2 & 0 \end{bmatrix} \to \|\alpha\|_\infty = 0.4$$

- Với sai số không quá $1,3.10^{-2}$ thì điều kiện dừng lặp là:

$$\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|_\infty \le \frac{1-0.4}{0.4}.0.013 \approx 0.0195$$

- Chọn $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.3 \\ 1.4 \end{bmatrix}$

- Tính lặp theo công thức : $\boldsymbol{x^{(n+1)} = \alpha x^{(n)} + \beta}$ đến khi thỏa mãn điều kiện.

$$\Rightarrow x^{(n+1)} = \begin{bmatrix} -0.003 & -0.1 & -0.1 \\ -0.2 & 0 & -0.1 \\ -0.2 & -0.2 & 0 \end{bmatrix} x^{(n)} + \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.3 \\ 1.4 \end{bmatrix}$$

Các kết quả tính lặp thể hiện vào trong bảng sau:

n	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$x_3^{(n)}$	$\|x^{(n+1)} - x^{(n)}\|$
0	1.2	1.3	1.4	
1	0.9264	0.92	0.9	
2	1.0152	1.0247	1.0307	[illegible]
3	0.9914	0.9939	0.9920	[illegible]
4	**0.9984**	**1.0025**	**1.0029**	[illegible]
5				

Dừng lặp

Vậy nghiệm gần đúng của HPT là:
$$\begin{cases} x_1 = 0.9984 \\ x_2 = 1.0025 \\ x_3 = 1.0029 \end{cases}$$

PHƯƠNG PHÁP LẶP GAUSS - SEIDEL GIẢI GẦN ĐÚNG HỆ PHƯƠNG TRÌNH

NỘI DUNG

- 1. Phương pháp lặp Gauss - Seidel
- 2. Ví dụ

1. Phương pháp lặp Gauss – Seidel

Cho hệ phương trình Ax = b (1)

Bước 1 : Biến đổi HPT về dạng: $x = \alpha x + \beta$, với ma trận α t/m $||\alpha||_\infty < 1$

Bước 2 : Chọn nghiệm xấp xỉ đầu $x^{(0)} = \beta$

Bước 3 : Tính lặp theo công thức: $x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)} + \beta_i$

đến khi thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

2. Ví dụ

<u>Ví du :</u>

Tính gần đúng nghiệm của hệ ptrình bằng phương pháp lặp Gauss - Seidel. Dừng lại ở bước thứ 3 và đánh giá sai số.

$$\begin{cases} 4x_1 + 0.24x_2 - 0.08x_3 = 8 \\ 0.09x_1 + 3x_2 - 0.15x_3 = 9 \\ 0.04x_1 - 0.08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}$$

Giải :

Bước 1: Biến đổi HPT về dạng: $x = \alpha x + \beta$, với ma trận α t/m $||\alpha||_\infty < 1$

$$\begin{cases} 4x_1 + 0.24x_2 - 0.08x_3 = 8 \\ 0.09x_1 + 3x_2 - 0.15x_3 = 9 \\ 0.04x_1 - 0.08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -0.06x_2 + 0.02x_3 + 2 \\ x_2 = -0.03x_1 + 0.05x_3 + 3 \\ x_3 = -0.01x_1 + 0.02x_2 + 5 \end{cases}$$

(Chú ý: Với HPT trên thì $\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{bmatrix} \to ||\alpha||_\infty = 0.08 < 1$, *thỏa mãn)*

Bước 2: Chọn nghiệm xấp xỉ đầu $x^{(0)} = \beta$, tức chọn $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \to \begin{cases} x_1^{(0)} = 2 \\ x_2^{(0)} = 3 \\ x_3^{(0)} = 5 \end{cases}$

Bước 3 : Tính lặp

Từ: $\begin{cases} x_1 = -0.06x_2 + 0.02x_3 + 2 \\ x_2 = -0.03x_1 + 0.05x_3 + 3 \\ x_3 = -0.01x_1 + 0.02x_2 + 5 \end{cases}$ ➡ CT lặp: $\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.06x_2^{(k)} + 0.02x_3^{(k)} + 2 \\ x_2^{(k+1)} = -0.03x_1^{(k+1)} + 0.05x_3^{(k)} + 3 \\ x_3^{(k+1)} = -0.01x_1^{(k+1)} + 0.02x_2^{(k+1)} + 5 \end{cases}$

➡ $\begin{cases} x_1^{(1)} = -0.06 \times 3 + 0.02 \times 5 + 2 = \\ x_2^{(1)} = -0.03 \times \quad + 0.05 \times 5 + 3 = \mathbf{3.1924} \\ x_3^{(1)} = -0.01 \times \mathbf{1.92} + 0.02 \times \mathbf{3.1924} + 5 = 5.0446 \end{cases}$

...

Các kết quả tính lặp thể hiện trong bảng sau:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	2	3	5
1	1.92	3.1924	5.0446
2	1.9093	3.1949	5.0448
3	1.9092	3.1950	5.0448

Nghiệm gần đúng của HPT là:

$$\begin{cases} x_1 = 1.9092 \\ x_2 = 3.1950 \\ x_3 = 5.0448 \end{cases}$$

ĐA THỨC NỘI SUY LAGRANGE

Bộ môn Toán – TNUT

NỘI DUNG

- 1. Tổng quát về đa thức nội suy
- 2. Đa thức nội suy Lagrange
- 3. Một số ví dụ

1. Tổng quát về đa thức nội suy

➢ ***Đặt vấn đề:*** Hàm số $y = f(x)$ không biết biểu thức giải tích cụ thể của quy luật f, chỉ biết các giá trị $y_k = f(x_k)$,

x	x_0	x_1	x_2	... x_n
y	y_0	y_1	y_2	... y_n

$x_k \in [a, b], (k = 0...n)$

nhưng ta lại cần biết giá trị của hàm tại những điểm khác x_k

➢ Xây dựng đa thức : $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ thoả mãn

$$P_n(x_k) = f(x_k) = y_k, (k = 0, 1, ..., n).$$

✓ *$P_n(x)$ được gọi là đa thức nội suy của hàm $f(x)$.*

✓ *Các điểm x_k được gọi là các mốc nội suy (hay các nút nội suy).*

Bộ môn Toán - TNUT

2. Đa thức nội suy Lagrange

Giả sử trên [a, b] cho n + 1 nút nội suy (x_i, y_i)

x	x_0	x_1	x_2	....	x_n
y	y_0	y_1	y_2	....	y_n

➢ Đa thức nội suy Lagrange có dạng:

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

Trong đó, $L_i(x)$ được gọi là các đa thức Lagrange cơ bản và được tính theo công thức:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Bộ môn Toán - TNUT

3. Ví dụ

Ví dụ Xây dựng đa thức nội suy Lagrange từ các nút nội suy sau đây:

x	1	5	2	9
y	3	4	0	8

Hướng dẫn: *B1: Xây dựng các đa thức Lagrange cơ bản theo CT:* $L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$

$$L_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-5)(x-2)(x-9)}{(1-5)(1-2)(1-9)}$$

; Tương tự tính: L_2; L_3

$$L_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-9)}{(5-1)(5-2)(5-9)}$$

B2: Xây dựng đa thức nội suy Lagrang theo CT: $L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$

$$L(x) = y_0.L_0 + y_1.L_1 + y_2.L_2 + y_3.L_3 = 3.L_0 + 4.L_1 + 0.L_2 + 8.L_3 = \ldots$$

4. Tìm đa thức nội suy Lagrange trong Matlab

Sử dụng hàm có sẵn trong Matlab

```
>> x = [ ]; y = [ ];
>> p = polyfit(x,y,n);
>> simplify(p);
>> polyval(p,c)
```

Tạo hàm trong Matlab

```
x = input('[illegible]');
y = input('[illegible]');
n = length(x);
L = zeros(n,n);
for i=1:n
    v = 1;
    for j=1:n
        if i~=j
            v =
conv(v,poly(x(j)))/(x(i)-x(j));
        end
    end
    L(i,:) = v*y(i);
end
L
P = sum(L)
```

ĐA THỨC NỘI SUY NEWTON VỚI CÁC NÚT KHÔNG CÁCH ĐỀU

NỘI DUNG

- 1. Khái niệm tỷ hiệu
- 2. Đa thức nội suy Newton
- 3. Một số ví dụ

1. Khái niệm tỷ hiệu

Giả sử cho bảng n + 1 nút nội suy của hàm $y_k = f(x_k)$, k = 0...n.

i	0	1	2	......	n
x	x_0	x_1	x_2	......	x_n
y	y_0	y_1	y_2	......	y_n

+ Tỷ hiệu cấp 1 của hàm f(x) tại x_k là: $f[x_k, x_{k+1}] = \dfrac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}$

+ Tỷ hiệu cấp 2 của hàm f(x) tại x_k là: $f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \dfrac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k}$

...

+ Tỷ hiệu cấp n của hàm f(x) tại x_k là: $f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n}] = \dfrac{f[x_{k+1}, \dots, x_{k+n}] - f[x_k, \dots, x_{k+n-1}]}{x_{k+n} - x_k}$

- **NX:** Các tỷ hiệu là các hàm đối xứng của các đối số, tỷ hiệu tiến tại x_k bằng tỷ hiệu lùi tại x_{k+1}.

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{y_k - y_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} = f[x_{k+1}, x_k]$$

2. Xây dựng đa thức nội suy Newton

- *Đa thức nội suy Newton tiến xuất phát từ x_0 là:*

$$\boxed{\begin{aligned} P(x) &= y_0 + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] \\ &+ \dots + (x - x_0)\dots(x - x_{n-1}) f[x_0, x_1, \dots, x_n] \end{aligned}}$$

- *Đa thức nội suy Newton lùi xuất phát từ x_n là:*

$$\boxed{\begin{aligned} P(x) &= y_n + (x - x_n) f[x_n, x_{n-1}] \\ &+ (x - x_n)(x - x_{n-1}) f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] + \\ &+ \dots\dots + (x - x_n)\dots(x - x_1) f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0] \end{aligned}}$$

CÁC BƯỚC XÂY DỰNG ĐTNS NEWTON

(Xét trường hợp có 4 nút nội suy, các trường hợp có nhiều hơn hoặc ít hơn tương tự.)

Bước 1. Lập bảng tỷ hiệu

x	y	Tỷ hiệu cấp 1	Tỷ hiệu cấp 2	Tỷ hiệu cấp 3
x_0	y_0	$a_0 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$	$b_0 = \dfrac{a_1 - a_0}{x_2 - x_0}$	$c_0 = \dfrac{b_1 - b_0}{x_3 - x_0}$
x_1	y_1	$a_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$b_1 = \dfrac{a_2 - a_1}{x_3 - x_1}$	
x_2	y_2	$a_2 = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$		
x_3	y_3			

- **ĐTNS Newton tiến xuất phát từ nút x_0:**

$$P(x) = y_0 + a_0(x - x_0) + b_0(x - x_0)(x - x_1) + c_0(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

- **ĐTNS Newton lùi xuất phát từ nút x_3:**

$$P(x) = y_3 + a_2(x - x_3) + b_1(x - x_3)(x - x_2) + c_0(x - x_3)(x - x_2)(x - x_1)$$

3. Ví dụ

Ví du 1 Cho bảng các giá trị của hàm số y = f(x)

x	0	1	2	4	5
y	7	4	15	247	612

1. XD đa thức nội suy Newton
2. Tính gần đúng f(4.7).

36

BẢNG TỶ HIỆU

x	y	Tỷ hiệu cấp 1	Tỷ hiệu cấp 2	Tỷ hiệu cấp 3	Tỷ hiệu cấp 4
0	7	$\frac{4-7}{1-0}=-3$	$\frac{11-(-3)}{2-0}=7$	$\frac{35-7}{4-0}=7$	$\frac{13-7}{5-0}=1$
1	4	$\frac{15-4}{2-1}=11$	$\frac{116-11}{4-1}=35$	$\frac{83-35}{5-1}=12$	
2	15	$\frac{247-15}{4-2}=116$	$\frac{365-116}{5-2}=83$		
4	247	$\frac{612-247}{5-4}=365$			
5	612				

- ĐTNS Newton tiến xuất phát từ x_0:

$$P(x) = 7 + (-3)(x-0) + 7(x-0)(x-1) + 7(x-0)(x-1)(x-2) + 1(x-0)(x-1)(x-2)(x-4) = \dots$$

- ĐTNS Newton lùi xuất phát từ x_4:

$$P(x) = 612 + 365(x-5) + 83(x-5)(x-4) + 12(x-5)(x-4)(x-2) + 1(x-5)(x-4)(x-2)(x-1) = \dots$$

- ĐTNS Newton lùi xuất phát từ x_4:

$$P(x) = 612 + 365(x-5) + 83(x-5)(x-4) + 12(x-5)(x-4)(x-2) + 1(x-5)(x-4)(x-2)(x-1)$$

$\rightarrow f(4.7) \approx P(4.7) = 476.1681$

4. Sử dụng Matlab

- Xây dựng hàm newton:

```
function out = newton(xps,yps)
    n = length(xps);A = zeros(n);
    A(1,:) = yps;
    for k = 2:n
        A(k,1:n-k+1)=(A(k-1,2:n-k+2)-A(k-1,1:n-k+1))...
                            ./(xps(k:n) - xps(1:n-k+1));
    end
    X = sym(ones(1,n)); syms x;
    for k = 2:n
        X(k:n) = X(k:n)*(x - xps(k-1));
    end
    out = X*A(:,1);
```

- Để sử dụng, ta nhập các lệnh sau tại cửa sổ Command.

```
>> xps =[   ]; yps =[   ];
>> p = newton(xps,yps)
```

Muốn rút gọn, ta gọi hàm `simplify`,

```
>> simplify(p)
```

VỚI CÁC NÚT CÁCH

NỘI DUNG

- 1. Khái niệm hiệu hữu hạn
- 2. Xây dựng đa thức nội suy Newton
- 3. Một số ví dụ

1. Khái niệm hiệu hữu hạn

Giả sử cho n + 1 nút nội suy $(x_t, y_t), t = 0..n$ cách đều nhau,

tức là $x_t = x_0 + t.h$ với $h \in N$ không đổi, $y_t = f(x_t)$

Số h gọi là bước nhảy.

+ Hiệu hữu hạn tiến của f(x) tại x_t :

Cấp 1: $\Delta^1_{y_t} = y_{t+1} - y_t$

Cấp 2: $\Delta^2_{y_t} = \Delta\left(\Delta^1_{y_t}\right) = \Delta^1_{y_{t+1}} - \Delta^1_{y_t}$

....

Cấp n: $\Delta^n_{y_t} = \Delta\left(\Delta^{n-1}_{y_t}\right) = \Delta^{n-1}_{y_{t+1}} - \Delta^{n-1}_{y_t}$

+ Hiệu hữu hạn lùi của f(x) tại x_t :

Cấp 1: $\nabla^{1}_{y_t} = y_t - y_{t-1}$

Cấp 2: $\nabla^{2}_{y_t} = \nabla\left(\nabla^{1}_{y_t}\right) = \nabla^{1}_{y_t} - \nabla^{1}_{y_{t-1}}$

....

Cấp n: $\nabla^{n}_{y_t} = \nabla\left(\nabla^{n-1}_{y_t}\right) = \nabla^{n-1}_{y_t} - \nabla^{n-1}_{y_{t-1}}$

*** Nhận xét**

Với một bảng gồm n + 1 nút nội suy cách đều nhau, ta chỉ có thể xây dựng đến các hiệu hữu hạn cấp n .

2. XÂY DỰNG ĐTNS NEWTON VỚI CÁC NÚT CÁCH ĐỀU

(Xét trường hợp có 5 nút nội suy, các trường hợp có nhiều hơn hoặc ít hơn hoàn toàn tương tự.)

1. Lập bảng hiệu hữu hạn.

0	x_0	y_0	$y_1 - y_0$	$\Delta^1_{y_1} - \Delta^1_{y_0}$	$\Delta^2_{y_1} - \Delta^2_{y_0}$	$\Delta^3_{y_1} - \Delta^3_{y_0}$
1	x_1	y_1	$y_2 - y_1$	$\Delta^1_{y_2} - \Delta^1_{y_1}$	$\Delta^2_{y_2} - \Delta^2_{y_1}$.	
2	x_2	y_2	$y_3 - y_2$	$\Delta^1_{y_3} - \Delta^1_{y_2}$		
3	x_3	y_3	$y_4 - y_3$			
4	x_4	y_4				

Bước 2. Xây dựng ĐTNS Newton tiến (đặt $x = x_0 + ht$) hoặc lùi (đặt $x = x_n + ht$) theo CT:

- Tiến: $\boxed{P(x_0 + ht) = y_0 + \frac{t}{1!}\Delta_{y_0} + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2_{y_0} + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3_{y_0} + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\Delta^4_{y_0}}$
- Lùi: $\boxed{P(x_n + ht) = y_4 + \frac{t}{1!}\nabla_{y_4} + \frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2_{y_4} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\nabla^3_{y_4} + \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{4!}\nabla^4_{y_4}}$

<u>Chú ý:</u> $\nabla_{y_4} = \Delta_{y_3}$; $\nabla^2_{y_4} = \Delta^2_{y_2}$; $\nabla^3_{y_4} = \Delta^3_{y_1}$; $\nabla^4_{y_4} = \Delta^4_{y_0}$

Tổng quát:

Trường hợp có n + 1 nút nội suy $(x_t, y_t), t = 0..n$ cách đều nhau với bước nhảy là h.

- Đa thức nội suy Newton tiến xuất phát từ x_0 được xây dựng như sau:

Đặt: $x = x_0 + t.h$ ta có

$$P(x_0+ht) = y_0 + \frac{t}{1!}.\Delta^1_{y_0} + \frac{t(t-1)}{2!}.\Delta^2_{y_0} + \ldots\ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-(n-1))}{n!}.\Delta^n_{y_0}$$

- Đa thức nội suy Newton lùi xuất phát từ x_n được xây dựng như sau:

Đặt: $x = x_n + t.h$ ta có

$$P(t) = y_n + \frac{t}{1!}.\nabla^1_{y_n} + \frac{t(t+1)}{2!}.\nabla^2_{y_n} + \ldots\ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+(n-1))}{n!}.\nabla^n_{y_n}$$

3. Ví dụ

Ví du 1

Cho bảng các giá trị của hàm số y = f(x)

x	0	3	6	9	12
y	-2	5	12	17	25

Dùng đa thức nội suy Newton tính gần đúng f(0.6)?

k	y_k	Δ_{y_k}	$\Delta^2_{y_k}$	$\Delta^3_{y_k}$	$\Delta^4_{y_k}$
0	-2	**7**	**0**	**-2**	**7**
1	5	7	-2	5	
2	12	5	3		
3	17	8			
4	25				

- ĐTNS Newton lùi xuất phát từ x_4: Đặt: $x = x_4 + ht = 12 + 3t$

$$P(12+3t) = 25 + 8.\frac{t}{1!} + 3.\frac{t(t+1)}{2!} + 5.\frac{t(t+1)(t+2)}{3!} + 7.\frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{4!} = \cdots$$

- ĐTNS Newton tiến: Đặt $x = x_0 + ht = 0 + 3t$.

$$P(3t) = -2 + 7\frac{t}{1!} + 0.\frac{t(t-1)}{2!} + (-2).\frac{t(t-1)(t-2)}{3!} + 7.\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!} = \frac{7}{24}t^4 - \frac{25}{12}t^3 + \frac{101}{24}t^2 + \frac{55}{12}t - 2$$

Ta có: với $x = 0{,}6$ thì $t = \frac{0{,}6}{3} = 0{,}2$ nên : $f(0.6) \approx P(3t)|_{t=0.2} = \frac{7}{24}0{,}2^4 - \frac{25}{12}0{,}2^3 + \frac{101}{24}0{,}2^2 + \frac{55}{12}0{,}2 - 2 \approx -0{,}9312$

Ta có: $P'(3t) = \frac{7}{6}t^3 - \frac{25}{4}t^2 + \frac{101}{12}t + \frac{55}{12}$; Với $x = 1{,}2 \to t = 0{,}4$. Vậy: $f'(1{,}2) \approx P'(3t)|_{t=0{,}4} \approx 7{,}0247$

4. Sử dụng Matlab

➢ Xây dựng hàm newtoncd:

```
function out = newtoncd(yps)
    n = length(yps);A = zeros(n); A(1,:) = yps;
    for k = 2:n
        A(k,k:n) = (A(k-1,k:n) - A(k-1,k-1:n-1));
    end
    T = sym(ones(1,n)); syms t;
    for k = 2:n
        T(k:n) = T(k:n)*(t+k-2)/(k-1);
    end
    out = T*A(:,n);
```

➢ Để sử dụng, ta nhập các lệnh sau tại cửa sổ Command.

```
>> yps =[    ];
>> p = newtoncd(yps)
```

Muốn rút gọn, ta gọi hàm **simplify**,

```
>> simplify(p)
```

PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU (Dạng: $y = ax + b$)

NỘI DUNG

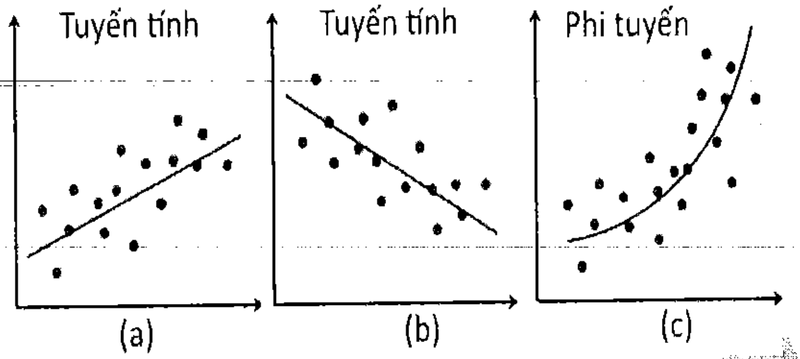
☆ 1. Tổng quát phương pháp bình phương tối thiểu

★ 2. Trường hợp hàm $f(x) = ax + b$

☆ 3. Ví dụ

1. Phương pháp bình phương tối thiểu

Phương pháp bình phương tối thiểu là một dạng phân tích hồi qui toán học được sử dụng để xác định đường biểu diễn phù hợp nhất cho một tập dữ liệu, cung cấp một phép minh họa trực quan về mối quan hệ giữa các điểm dữ liệu trong tập dữ liệu.



Bài toán:

Cho bảng số liệu:

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

Tìm mối liên hệ f(x) thoả mãn $f(x_k) \approx y_k$

Ta cần tìm hàm $f(x)$ sao cho sai số giữa các y_k và $f(x_k)$ là nhỏ nhất với mọi $k = 1, \dots, n$. Điều này xảy ra khi tổng bình phương các sai số này là nhỏ nhất, tức là:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - y_k)^2 \to min}$$

44

2. Trường hợp $f(x) = a + bx$

Đặt: $S = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - y_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (a + bx_k - y_k)^2 \to min$

Bài toán trở thành tìm a, b để S đạt giá trị nhỏ nhất.

Do đó a, b là nghiệm của HPT: $S'_a = S'_b = 0$

$$\begin{cases} 2\sum_{k=1}^{n}(a + bx_k - y_k) = 0 \\ 2\sum_{k=1}^{n} x_k(a + bx_k - y_k) = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a\sum_{k=1}^{n} 1 + b\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} y_k \\ a\sum_{k=1}^{n} x_k + b\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \end{cases}$$

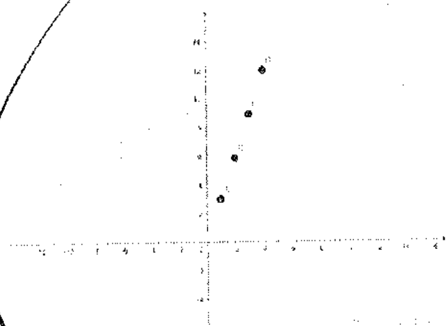
Giải hệ phương trình trên ta tìm được a, b. Từ đó suy ra $f(x)$.

Ví dụ

Để nhận thấy sự phụ thuộc giữa hiệu điện thế và cường độ dòng điện trong một mạch điện, người ta tiến hành đo và thu được bảng số liệu:

I (Ampe)	1	2	3	4
V (Von)	3.02	5.9	8.59	12.01

- Biểu diễn số liệu lên đồ thị:



- Từ đó người ta quyết định xấp xỉ bảng số liệu trên bằng mô hình đường thẳng (mô hình tuyến tính) $y = a + bx$.
- *Dùng phương pháp bình phương tối thiểu xác định a, b ?*

Hướng dẫn:

Bước 1: *Xác định dạng HPT tương ứng với công thức thực nghiệm cần tìm.*
Với $y = a + bx$ thì a, b là nghiệm của HPT:

$$\begin{cases} a\sum_{k=1}^{n} 1 + b\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} y_k \\ a\sum_{k=1}^{n} x_k + b\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \end{cases}$$

Bước 2: *Lập bảng tính các tổng trong HPT*

	x_k	y_k	x_k^2	$x_k y_k$
	1	3.02	1	3.02
	2	5.9	4	11.8
	3	8.59	9	25.77
	4	12.01	16	48.04
Σ	**10**	**29.52**	**30**	**88.63**

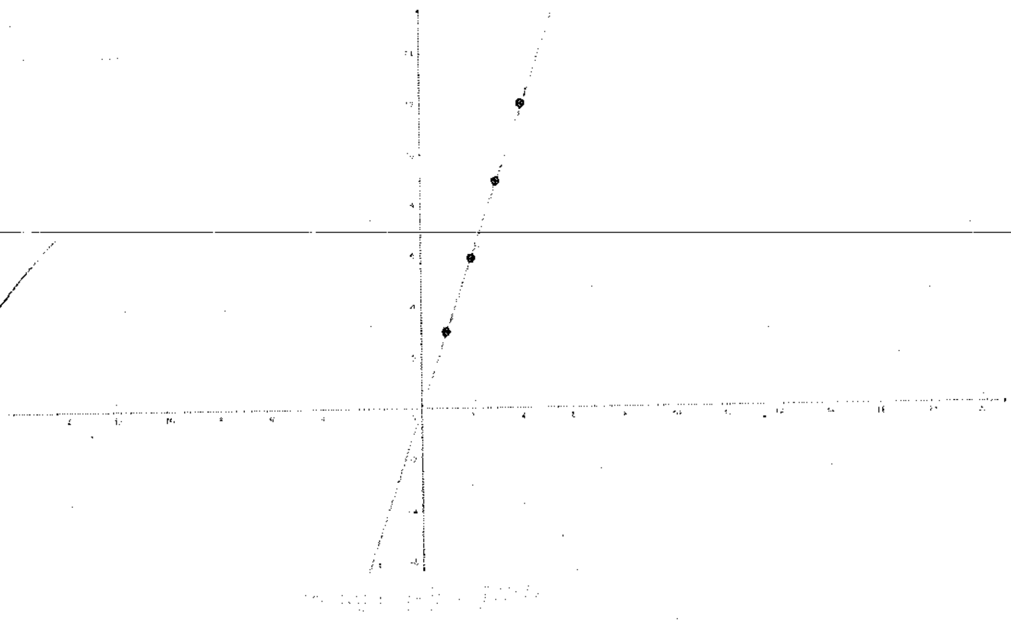
Bước 3: *Thay số liệu vào HPT và giải*

$$\begin{cases} 4a + 10b = 29.52 \\ 10a + 30b = 88.63 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a = -0.035 \\ b = 2.966 \end{cases}$$

KL: Công thức thực nghiệm cần tìm là:

$$f(x) = -0.035 + 2.966x$$

Nhận xét:



PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU (Dạng tổng quát)

NỘI DUNG

- 1. Công thức thực nghiệm dạng tổng quát
- 2. Một số ví dụ
- 3. Sử dụng Matlab

1. Công thức thực nghiệm dạng tổng quát

Giả sử cần tìm mối liên hệ (x_k, y_k), $k = 1, 2, \ldots, n$ dạng:

$$y = f(x) = c_1.f_1(x) + c_2.f_2(x) + \ldots + c_m.f_m(x) \quad (c_i \in \mathbb{R})$$

Trong đó các hàm $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ đã biết trước.

Ta cần xác định các hằng số c_i sao cho biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất:

$$S = \sum_{k=1}^{n} (\varepsilon_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} \left[f(x_k) - y_k \right]^2$$

Đ $S = \sum_{k=1}^{n} \left[f(x_k) - y_k \right]^2 = \sum_{k=1}^{n} \left[c_1 f_1(x_k) + c_2 f_2(x_k) + \ldots + c_m f_m(x_k) - y_k \right]^2$ nhỏ nhất

thì: $c_1, c_2, \ldots, c_n$ là nghiệm của hệ: $S'_{c_1} = S'_{c_2} = \cdots = S'_{c_n} = 0$, cụ thể:

$$\begin{cases}
c_1 \sum_{k=1}^{n} f_1^2(x_k) + c_2 \sum_{k=1}^{n} f_2(x_k) f_1(x_k) + \ldots + c_m \sum_{k=1}^{n} f_m(x_k) f_1(x_k) = \sum_{k=1}^{n} y_k f_1(x_k) & (1) \\
c_1 \sum_{k=1}^{n} f_1(x_k) f_2(x_k) + c_2 \sum_{k=1}^{n} f_2^2(x_k) + \ldots + c_m \sum_{k=1}^{n} f_m(x_k) f_2(x_k) = \sum_{k=1}^{n} y_k f_2(x_k) & (2) \\
\ldots \\
c_1 \sum_{k=1}^{n} f_1(x_k) f_m(x_k) + c_2 \sum_{k=1}^{n} f_2(x_k) f_m(x_k) + \ldots + c_m \sum_{k=1}^{n} f_m^2(x_k) = \sum_{k=1}^{n} y_k f_m(x_k) & (m)
\end{cases}$$

Nhận xét: Từ dạng h/s là $y = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_m f_m$

- Nhân 2 vế với f_1 ta được: $c_1 f_1^2 + c_2 f_2 f_1 + \cdots c_m f_m f_1 = y f_1$ rồi lấy tổng ta đc PT (1) của hệ.
- Tương tự nhân 2 vế với f_2 ta được $c_1 f_1 f_2 + c_2 f_2^2 + \cdots c_m f_m f_1 = y f_2$ rồi lấy tổng ta đc PT (2) của hệ.
- Tiếp tục như vậy ta được các PT còn lại của HPT.

Ví dụ 1: Xây dựng công thức thực nghiệm: $y = ax + bx^2$ từ bảng các giá trị sau:

x	1	3	6	8	11
y	2	5	1	4	9

Giải

- a, b là nghiệm của HPT: $\begin{cases} a\sum_{k=1}^{5} x_k^2 + b\sum_{k=1}^{5} x_k^3 = \sum_{k=1}^{5} x_k y_k \\ a\sum_{k=1}^{5} x_k^3 + b\sum_{k=1}^{5} x_k^4 = \sum_{k=1}^{5} x_k^2 y_k \end{cases}$
- Ta có: $\sum_{k=1}^{5} x_k^2 = 231$; $\sum_{k=1}^{5} x_k^3 = 2087$; $\sum_{k=1}^{5} x_k^4 = 20115$; $\sum_{k=1}^{5} x_k y_k = 154$; $\sum_{k=1}^{5} x_k^2 y_k = 1428$
- Suy ra: $\begin{cases} 231a + 2087b = 154 \\ 2087a + 20115b = 1428 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,4037 \\ b = 0,0291 \end{cases} \Rightarrow y = 0,4037x + 0,0291$

Ví dụ 2: Cho bảng các giá trị sau:

x	1	3	6	8	11
y	2	5	1	4	9

Xây dựng CT thực nghiệm dạng y = a + b.sinx + c.cosx

Giải: *a, b, c* là nghiệm của HPT

$$\begin{cases} a\sum_{k=1}^{5} 1 + b\sum_{k=1}^{5} \sin x_k + c\sum_{k=1}^{5} \cos x_k = \sum_{k=1}^{5} y_k \\ a\sum_{k=1}^{5} \sin x_k + b\sum_{k=1}^{5} \sin^2 x_k + c\sum_{k=1}^{5} \sin x_k \cos x_k = \sum_{k=1}^{5} y_k \sin x_k \\ a\sum_{k=1}^{5} \cos x_k + b\sum_{k=1}^{5} \sin x_k \cos x_k + c\sum_{k=1}^{5} \cos^2 x_k = \sum_{k=1}^{5} y_k \cos x_k \end{cases}$$

x_k	y_k	sinx_k	cosx_k	sin^2 x_k	cos^2 x_k	sinx_k cosx_k	y_k sinx_k	y_k cosx_k
[illegible]	**2.0000**	0.8415	0.5403	0.7081	0.2919	0.4546	1.6829	1.0806
3.0000	5.0000	0.1411	-0.9900	0.0199	0.9801	-0.1397	0.7056	-4.9500
6.0000	1.0000	-0.2794	0.9602	0.0781	0.9219	-0.2683	-0.2794	0.9602
8.0000	4.0000	0.9894	-0.1455	0.9788	0.0212	-0.1440	3.9574	-0.5820
11.0000	9.0000	-1.0000	0.0044	1.0000	0.0000	-0.0044	-8.9999	0.0398
Tong	***21.0000***	***0.6925***	***0.3694***	***2.7849***	***2.2151***	***-0.1017***	***-2.9334***	***-3.4514***

Từ đó ta có:

$$\begin{cases} 5a + 0.6925b + 0.3694c = 21 \\ 0.6925a + 2.7849b - 0.1017c = -2.9334 \\ 0.3694a - 0.1017b + 2.2151c = -3.4514 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4.7010 \\ b = -2.3117 \\ c = -2.4482 \end{cases}$$

Vậy công thức thực nghiệm cần tìm là: $y = 4.7010 - 2.3117 sinx - 2.4482 cosx$

Chú ý: Trường hợp hàm f(x) phi tuyến tính đối với biến x

$$\mathbf{f(x) = a.e^{bx}}$$

Logarit cơ số e hai vế, ta được:

$$\ln(f) = \ln(a.e^{bx}) = \ln(a) + b.x$$

Đặt: F = ln(f) và A = ln(a), ta được CT thực nghiệm dạng

$$F = A + b.x$$

Tìm A,b rồi suy ra a,b cần tìm

* **Chú ý:** Chuyển bảng các giá trị (x_k, y_k) sang dạng bảng các giá trị (x_k, $\ln y_k$) = (x_k, F_k) để tiện tính toán

Ví du 3: Cho bảng các giá trị sau:

x	1	3	6	8
y	2	5	1	4

Hãy tìm công thức thực nghiệm có dạng **y = a.e^{bx}**

Giải: $y = a.e^{bx} \rightarrow lny = ln(ae^{bx}) = lna + bx$

Đặt: $X = x, Y = lny, A = lna$. Khi đó ta có: $Y = A + bX$.

A, b là nghiệm của HPT: $\begin{cases} 4A + b\sum_{k=1}^{4} X_k = \sum_{k=1}^{4} Y_k \\ A\sum_{k=1}^{4} X_k + b\sum_{k=1}^{4} X_k^2 = \sum_{k=1}^{4} X_k Y_k \end{cases}$

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	1	Ln2 = 0.6931	1	0.6931
	3	Ln5 = 1.6094	9	4.8282
	6	Ln1 = 0	36	0
	8	Ln 4 = 1.3863	64	11.0904
Tổng	**18**	**3.6888**	**110**	**16.6117**

Ta có:

$$\begin{cases} 4A + 18b = 3.6888 \\ 18A + 110b = 16.6117 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} A \approx 0.9203 \\ b \approx 0.0004 \end{cases}$$

Vì A = lna → $a = e^A \approx e^{0.9203} \approx 2.5100.$

Vậy công thức cần tìm là: [illegible]

3. Sử dụng Matlab

Trong MATLAB, ma trận F được xác định bởi F = [$f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_m(x)$].

Vì thế chúng ta viết hàm sau đây trên MATLAB

```
function c = leastsquares(x, y, F)
    c = (F'*F)\(F'*y);
end
```

Ví dụ: Dùng hàm **leastsquares** ta tìm công thức thực nghiệm dạng $y = a + bx$

```
x = (0.5:.5:5)';
y = [5.56;6.98;7.92;8.14;7.60;6.41;4.88;3.38;2.27;1.8];
leastsquares(x, y,[x.^0, x])'
 ans =
     8.8433   -1.2179
```

(Tức là y = 8.8433 – 1.2179x)

Tính gần đúng đạo hàm

NỘI DUNG

1. Trường hợp có 2 nút nội suy
2. Trường hợp có n +1 nút nội suy
3. Tính gần đúng đạo hàm tại điểm bất kỳ
4. Ví dụ

Tính gần đúng đạo hàm cấp một

1. Trường hợp 2 nút nội suy

Cho 2 nút nội suy (x_0,y_0) và (x_1,y_1) thoả mãn $y_i = f(x_i)$.

Giả sử $x_0 < x_1$ và đặt $h = x_1 - x_0$. Khi đó:

Với mỗi $x = x_0 + t.h$, ĐTNS Newton tiến xphát từ x_0 là

$$f(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{h^2}{2} f''(c)t(t-1).$$

Đạo hàm 2 vế theo biến x rồi thay $x = x_0$, ta được:

$f'(x_0) \approx \frac{y_1 - y_0}{h}$ với sai số $-\frac{h}{2}M_2$ $f'(x_1) \approx \frac{y_1 - y_0}{h}$ với sai số $\frac{h}{2}M_2$

Trong đó: $M_2 = \max_{[x_0,x_1]}|f''(x)|$

2. Trường hợp n+1 nút nội suy cách đều

Cho n+1 nút nội suy cách đều (x_k, y_k), k=0...n thoả mãn $y_k = f(x_k)$.

Khi đó:

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2) \quad \text{với sai số } \frac{h^2}{3}M_3$$

$$f'(x_k) \approx \frac{1}{2h}(-y_{k-1} + y_{k+1}) \quad \text{với sai số } -\frac{h^2}{6}M_3$$

$$f'(x_n) \approx \frac{1}{2h}(y_{n-2} - 4y_{n-1} + 3y_n) \quad \text{với sai số } \frac{h^2}{3}M_3$$

Trong đó: $M_3 = \max\limits_{[x_0, x_n]}|f'''(x)|$

3. Tính đạo hàm tại điểm bất kỳ

Cho n+1 nút nội suy cách đều (x_k, y_k), k=0...n thoả mãn $y_i = f(x_i)$.

Với $x_0 < x^* < x_n$ tính $f'(x^*)$?

- Áp dụng công thức số gia Lagrange cho hàm y'(x) ta có
  $$y'(x + \Delta x) \approx y'(x) + y''(x)\Delta x.$$
- Xác định điểm x_k gần x^* nhất, khi đó thay $x = x_k$; $\Delta x = x^* - x_k$ ta có:

$$f'(x^*) \approx f'(x_k) + f''(x_k).(x^* - x_k)$$

Trong đó $f''(x_k)$ được xác định thông qua các đạo hàm cấp 1 tại các nút nội suy.

4. Ví dụ

Tính gần đúng y'(52) của hàm số y = lgx dựa vào bảng sau

x	50	55	60
y = lgx	1.6990	1.7404	1.7782

Ta có: h = 5

$$y'(50) \approx \frac{1}{10}[(-3)(1.6990) + (4)(1.7404) - (1.7782)] = 0.00864$$

$$y'(55) \approx \frac{1}{10}[-1.6990 + 1.7782] = 0.00792$$

$$y'(60) = \frac{1}{10}[1.6990 - 4*1.7404 + 3*1.7782] = 0.0072$$

Áp dụng công thức

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2)$$

$$f'(x_k) \approx \frac{1}{2h}(-y_{k-1} + y_{k+1})$$

$$f'(x_n) \approx \frac{1}{2h}(y_{n-2} - 4y_{n-1} + 3y_n)$$

$$y''(50) = \frac{1}{10}[-3y'(50) + 4y'(55) - y'(60)] = -0.000144$$

$$y'(52) \approx y'(50) + y''(50)*2 = 0.0084$$

Công thức hình thang

Tính gần đúng tích phân xác định

NỘI DUNG

- 1. Xây dựng công thức
- 2. Công thức đánh giá sai số
- 3. Ví dụ

1. Xây dựng công thức hình thang

Bài toán: Tính gần đúng $I = \int_a^b f(x).dx$

➤ Chia [a,b] thành n đoạn bằng nhau bởi các điểm chia

$$a \equiv x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n \equiv b$$

⇒ Khoảng cách giữa các điểm chia là: $h = x_{i+1} - x_i = \dfrac{b-a}{n}$

Khi đó: $\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$

➢ Mỗi tích phân ở vế phải được tính như sau:

$$I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \int_{x_k}^{x_{k+1}} P_1(x)dx \qquad k = 0,1,\dots,n-1$$

Trong đó $P_1(x)$ là đa thức nội suy Newton tiến bậc nhất xuất phát từ cận dưới.
Khi đó đặt $y_k = f(x_k)$ ta có:

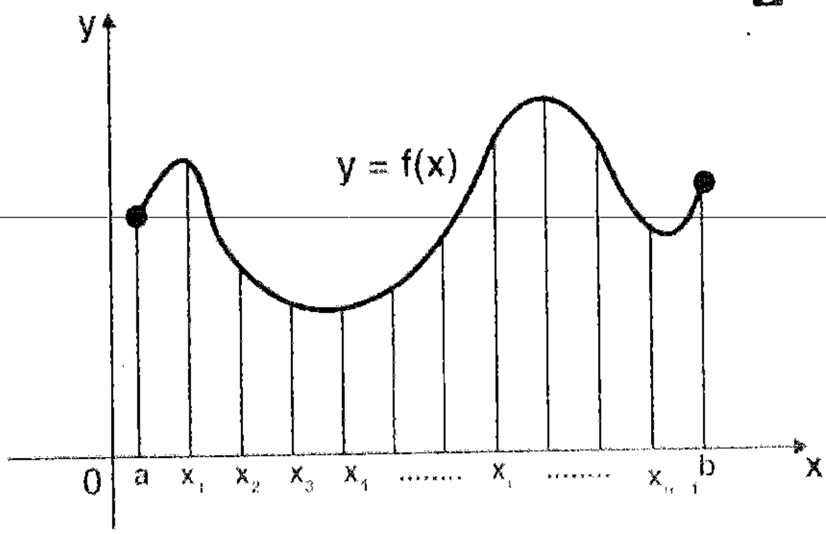
$$I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} P_1(x)dx = \frac{x_{k+1} - x_k}{2}(y_k + y_{k+1}) = \frac{h}{2}(y_k + y_{k+1})$$

➢ Do đó: $I \approx I_0 + I_1 + \dots + I_{n-1} = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \dots + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n)$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_n) + h(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})$$

CÔNG THỨC HÌNH THANG

BYJU'S



2. Công thức đánh giá sai số

Gọi I_t là kết quả tính gần đúng tích phân bằng công thức hình thang, khi đó ta có:

$$\left|I - I_t\right| \le M\frac{h^2}{12}(b-a)$$

Trong đó:

$$M = \max_{[a,b]}\left|f''(x)\right|$$

3. Ví dụ

Dùng công thức hình thang tính $I = \int_0^1 ln\sqrt{1+x}dx$

bằng cách chia [0,1] thành 10 đoạn bằng nhau và đánh giá sai số.

Giải

Ta có: $h = \frac{1-0}{10} = 0{,}1$; $y_k = f(x_k) = ln\sqrt{1+x_k}$; $k = 0,1,\ldots,10$

x_k	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_k	0	0,0477	0,0912	0,1312	0,1682	0,2027	0,2350	0,2653	0,2939	0,3209	0,3466

Áp dụng công thức hình thang ta có: $I \approx I_t = \frac{h}{2}(y_0 + y_{10}) + h(y_1 + y_2 + \cdots + y_9) = \mathbf{0{,}1929}$

Đánh giá sai số: $f(x) = ln\sqrt{x+1} \to f''(x) = -\frac{1}{2(x+1)^2} \to M = \max_{[0,1]}|f''(x)| = \frac{1}{2}$

$$\to |I - I_t| \le M.\frac{h^2(b-a)}{12} = \frac{1}{2}.\frac{0{,}1^2(1-0)}{12} \approx 0{,}0004$$

Công thức Simson

tính gần đúng tích phân xác định

NỘI DUNG

- ☆ 1. Xây dựng công thức
- ★ 2. Công thức đánh giá sai số
- ☆ 3. Ví dụ

1. Xây dựng công thức Simson

Bài toán: Tính gần đúng $I = \int_a^b f(x).dx$

- Chia [a,b] thành 2n đoạn bằng nhau bởi các điểm chia

$$a \equiv x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n} \equiv b$$

$\Rightarrow$ Khoảng cách giữa các điểm chia là: $h = x_{i+1} - x_i = \dfrac{b-a}{2n}$

Khi đó: $\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx$

- Mỗi tích phân ở vế phải được tính như sau:

$$I_k = \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx \approx \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} P_2(x)dx \qquad k = 0,1,\ldots,n-1$$

Trong đó $P_2(x)$ là đa thức nội suy Newton tiến bậc hai xuất phát từ cận dưới.
Khi đó đặt $y_k = f(x_k)$ ta có:

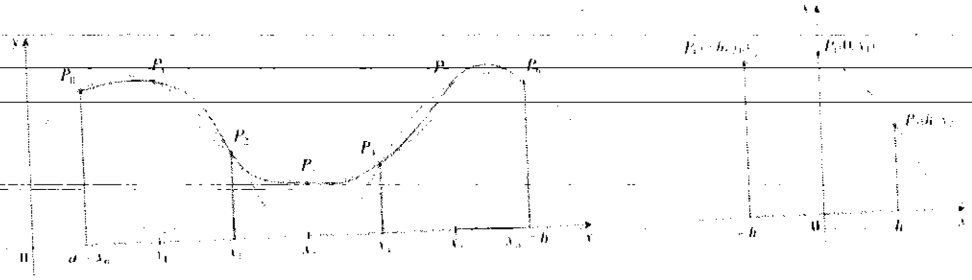
$$I_k = \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} P_2(x)dx = \frac{x_{2k+2} - x_{2k}}{6}(y_{2k} + 4y_{2k+1} + y_{2k+2}) = \frac{h}{3}(y_{2k} + 4y_{2k+1} + y_{2k+2})$$

$$I \approx I_0 + I_1 + \ldots + I_{n-1} = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots + \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2})\right]$$

CÔNG THỨC SIMSON

Công thức Simson



2. Công thức đánh giá sai số

Gọi I_S là kết quả tính gần đúng tích phân bằng công thức Simson, khi đó ta có:

$$\left|I - I_s\right| \le M\frac{h^4}{180}(b-a)$$

Trong đó:

$$M = \max_{[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|$$

3. Ví dụ

Dùng công thức Simson tính $I = \int_0^1 ln\sqrt{1+x}dx$

bằng cách chia [0,1] thành 10 đoạn bằng nhau và đánh giá sai số.

Giải

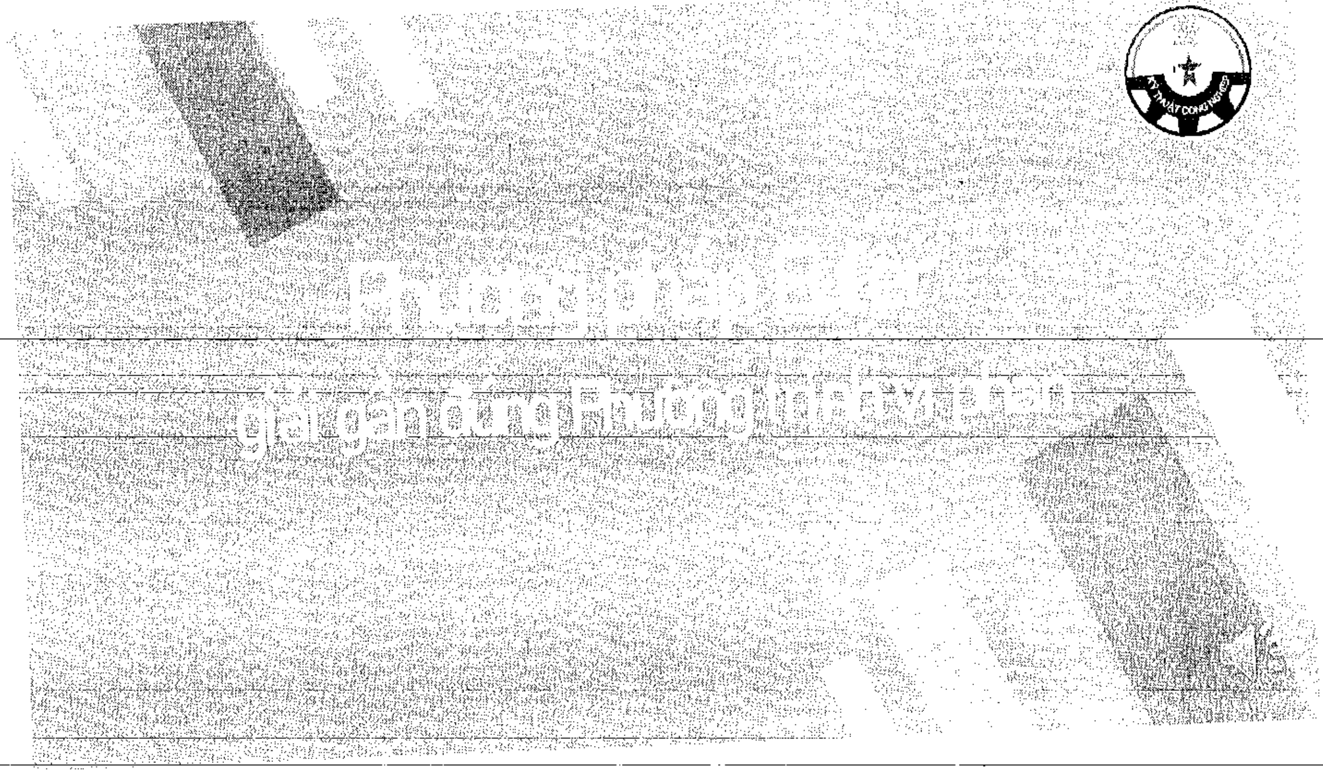
Ta có: $h = \frac{1-0}{10} = 0{,}1$; $f(x_k) = ln\sqrt{1 + x_k}$

x_k	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_k	0	0,0477	0,0912	0,1312	0,1682	0,2027	0,2350	0,2653	0,2939	0,3209	0,3466

ADCT Simson ta có: $I \approx I_S = \frac{h}{3}[(y_0 + y_{10}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_9) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_8)] = 0{,}193147$

Đánh giá sai số: $f(x) = ln\sqrt{x+1} \to f^{(4)}(x) = -\frac{6}{2(x+1)^4} \to M = \max_{[0,1]} |f^{(4)}(x)| = 3$

$$\to |I - I_S| \le M.\frac{h^4(b-a)}{180} = 3.\frac{0{,}1^4(1-0)}{180} \approx 10^{-6}$$



CÁC BƯỚC GIẢI GẦN ĐÚNG PTVP CẤP 1 BẰNG PP EULER

B1. Chia [a,b] thành n đoạn bằng nhau bởi các điểm chia:

$$x_0 \equiv a < x_1 < \dots < x_n \equiv b$$

$$\Rightarrow h = \frac{b-a}{n}$$

B2. Tính các giá trị theo công thức Euler:

$$\begin{cases} y(x_{k+1}) = y_{k+1} = y_k + h.f(x_k, y_k) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}, \ k = 0\dots(n-1)$$

B3. Kết luận nghiệm gần đúng của ptrình ở dạng bảng giá trị (x_k, y_k).

2. Đánh giá sai số

- Sai số của phương pháp Euler tại x_k là $|y_k - y(x_k)| \le Mh$ với M là hằng số. Điều đó chứng tỏ khi h đủ nhỏ thì y_k đủ gần $y(x_k)$.
  Tuy nhiên việc xác định hằng số M rất phức tạp.

- Trong thực hành ta xác định gần đúng sai số bằng cách tính hai lần theo công thức Euler, một lần với h và một lần với $h/2$, tương ứng ta nhận được hai giá trị gần đúng của $y(x)$ là $y_n(h)$ và $y_{2n}(h/2)$. Ta có công thức đánh giá sai số sau

$$\left|y_{2n}\left(\frac{h}{2}\right) - y(x)\right| \approx \left|y_{2n}\left(\frac{h}{2}\right) - y_n(h)\right|$$

3. Ví dụ

Giải gần đúng phương trình vi phân $y' = x^2 + y^2$ trên $[0, 0.4]$ với $y(0) = 1$, bằng cách chia đoạn đó thành 4 đoạn bằng nhau.

Giải

- Ta có: $h = \frac{0.4-0}{4} = 0.1;\quad x_k = x_0 + kh;\ \ với\ x_0 = 0;\ \ k = 0,1,2,3,4;$
- Tính lặp theo CT Euler: $y_{k+1} = y_k + h.f(x_k, y_k) = y_k + 0.1(x_k^2 + y_k^2)$

  với $y_0 = y(x_0) \to y_0 = 1$
- Nghiệm gần đúng của PT là hàm số $y(x)$ xác định bởi: $y_k = y(x_k)$ trong bảng giá trị sau:

x_k	0	0.1	0.2	0.3	0.4
y_k					

Phương pháp

NỘI DUNG

☆ 1. Nội dung phương pháp

☆ 2. Ví dụ

1. Nội dung phương pháp

Xét bài toán Cauchy với hệ gồm 2 phương trình vi phân cấp 1

$$\begin{cases} y' = f(x,y,z) \\ z' = g(x,y,z) \\ y(a) = \lambda_1, z(a) = \lambda_2 \end{cases} , \quad a \le x \le b$$

Phương pháp Euler để tìm gần đúng nghiệm của hệ phương trình trên thực hiện như sau:

Chia [a,b] thành n đoạn bằng nhau bởi các điểm chia

$$x_0 \equiv a < x_1 < \dots < x_n \equiv b$$

$$\Rightarrow h = \frac{b-a}{n}$$

Tính lặp theo công thức

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + h.f(x_k, y_k, z_k) \\ z_{k+1} = z_k + h.g(x_k, y_k, z_k), \quad k = 0\dots(n-1) \\ y_0 = \lambda_1, z_0 = \lambda_2 \end{cases}$$

3. Ví dụ

Ví dụ 1 Giải gần đúng hệ hai phương trình vi phân sau trên [0, 0.4]

$$\begin{cases} y' = x - y^2 + z \\ z' = x^2 + y + z \end{cases} \text{với} \begin{cases} y(0) = 1 \\ z(0) = 2 \end{cases}$$ **với số đoạn chia bằng 8.**

Giải

- Ta có: $h = \frac{0.4-0}{4} = 0.05; \quad x_k = x_0 + kh; \ \text{với}\ x_0 = 0; \ k = 0,1,2,\dots,8;$
- Tính lặp theo CT Euler: $\begin{cases} y_{k+1} = y_k + h.f(x_k, y_k, z_k) = y_k + 0.05(x_k - y_k^2 + z_k) \\ z_{k+1} = z_k + h.g(x_k, y_k, z_k) = z_k + 0.05(x_k^2 + y_k + z_k) \end{cases}$

với $y_0 = y(x_0) = y(0) = 1$ và $z_0 = z(x_0) = z(0) = 2$

- Nghiệm gần đúng của HPT là hàm số $y(x)$ và $z(x)$ xác định bởi bảng giá trị sau:

x_k	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40
y_k	1.00	1.05	1.11	1.17	1.23	1.30	1.37	1.44	1.52
z_k	2.00	2.15	2.31	2.48	2.66	2.86	3.07	3.30	3.54

Ví dụ 2 Giải gần đúng phương trình vi phân cấp 2 sau trên [0, 0.4] với h = 0.05

$$y'' = 2y' - 3y + x^2, \ y(0) = 1, \ y'(0) = 2.$$

Giải

Đặt z = y' ta nhận được hệ $\begin{cases} y' = z \\ z' = 2z - 3y + x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x, y, z) = z \\ g(x, y, z) = 2z - 3y + x^2 \end{cases}$

- Tính lặp theo CT Euler: $\begin{cases} y_{k+1} = y_k + h.f(x_k, y_k, z_k) = y_k + 0.05z_k \\ z_{k+1} = z_k + h.g(x_k, y_k, z_k) = z_k + 0.05(2z_k - 3y_k + x_k^2) \end{cases}$

với $y_0 = y(x_0) = y(0) = 1$ và $z_0 = z(x_0) = y'(0) = 2$. Ta có:

x_k	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40
y_k	1.00	1.10	1.14	1.18	1.22	1.26	1.30	1.34	1.38
z_k	2.00	2.05	2.09	2.13	2.17	2.21	2.25	2.28	2.31

- Kết luận: Nghiệm gần đúng của PT là hàm số $y(x)$ với $y_k = y(x_k)$ trong bảng trên.

KẾT LUẬN

Đề tài "Xây dựng video bài giảng cho học phần Phương pháp tính" đã xây dựng được 18 video, về các nội dung của học phần Phương pháp tính. Mỗi video được trình bày ngắn gọn, khoa học về các khái niệm, phương pháp giải từng dạng bài tập và các ví dụ cụ thể minh hoạ cho các nội dung lý thuyết.

Đề tài có ý nghĩa quan trọng đối với quá trình chuyển đổi số của Nhà trường. Là tài liệu quan trọng thích hợp với đa dạng các chương trình đào tạo như trực tiếp, trực tuyến, từ xa, giảng dạy và học tập học phần Phương pháp tính và các học phần có liên quan trong trường Đại học kỹ thuật Công nghiệp.

DANH MỤC TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] *Bài giảng: Toán ứng dụng (Toán 4)*, bộ môn Toán trường ĐH Kỹ thuật Công nghiệp, 2009.

[2] Dương Thuỷ Vỹ, *Giáo trình phương pháp tính*, NXB Khoa học và kỹ thuật, 2006.

[3] Glyn James, *Advanced Modern Engineering Mathematics*, Pearson

[4] Laurene V, *Applied Numerical Analyis Using MATLAB*, Fausett Univesity of South Carolina Aiken, 1999.

[5] *http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/helpdesk.shtml.*

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

THUYẾT MINH
ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC CẤP TRƯỜNG
NĂM 2022

TÊN ĐỀ TÀI
XÂY DỰNG VIDEO BÀI GIẢNG CHO HỌC PHẦN PHƯƠNG PHÁP TÍNH

MÃ SỐ: T2022-VD22

Chủ nhiệm đề tài: ThS. Phan Thị Vân Huyền

THÁI NGUYÊN, NĂM 2022

THUYẾT MINH ĐỀ TÀI
KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP TRƯỜNG NĂM 2022

1. TÊN ĐỀ TÀI: **Xây dựng Video bài giảng cho học phần Phương pháp tính**	**2. MÃ SỐ: T2022-VD22**
3. LĨNH VỰC NGHIÊN CỨU Khoa học Tự nhiên [x] Khoa học Kỹ thuật và Công nghệ [ ] Khoa học Y, dược [ ] Khoa học Nông nghiệp [ ] Khoa học Xã hội [ ] Khoa học Nhân văn [ ]	**4. LOẠI HÌNH NGHIÊN CỨU** Cơ bản [ ] Ứng dụng [ ] Triển khai [x]

5. THỜI GIAN THỰC HIỆN DỰ KIẾN: 12 tháng

Từ tháng 03 năm 2022 đến tháng 03 năm 2023

6. CHỦ NHIỆM ĐỀ TÀI

Họ và tên: Phan Thị Vân Huyền — Học vị: Thạc sỹ

Chức danh khoa học: — Năm sinh: 1985

Địa chỉ cơ quan: ĐH KTCN — Điện thoại di động: 0916527759

Điện thoại cơ quan: — Fax:

E-mail: phanthivanhuyen@tnut.edu.vn

7. NHỮNG THÀNH VIÊN THAM GIA NGHIÊN CỨU ĐỀ TÀI

TT	Họ và tên	Đơn vị công tác và lĩnh vực chuyên môn	Nội dung nghiên cứu cụ thể được giao	Chữ ký
1	Phạm Thị Thu Hằng	Khoa KHCB – ĐH KTCN. Lĩnh vực chuyên môn: Toán học	Thiết kế bài giảng power point chương 1, 2.	
2	Vũ Hồng Quân	Khoa KHCB – ĐH KTCN. Lĩnh vực chuyên môn: Toán học	Thiết kế bài giảng power point chương 3.	
3	Ngô Thành Trung	Khoa KHCB – ĐH KTCN. Lĩnh vực chuyên môn: Toán học	Thiết kế bài giảng power point chương 4.	

8. ĐƠN VỊ PHỐI HỢP CHÍNH

Tên đơn vị trong và ngoài nước	Nội dung phối hợp nghiên cứu	Họ và tên người đại diện đơn vị

9. TỔNG QUAN TÌNH HÌNH NGHIÊN CỨU THUỘC LĨNH VỰC CỦA ĐỀ TÀI Ở TRONG VÀ NGOÀI NƯỚC

9.1. Trong nước *(phân tích, đánh giá tình hình nghiên cứu thuộc lĩnh vực của đề tài ở Việt Nam, liệt kê danh mục các công trình nghiên cứu, tài liệu có liên quan đến đề tài được trích dẫn khi đánh giá tổng quan)*

- Học tập trực tuyến đã không còn xa lạ và đang bùng nổ mạnh mẽ trên thế giới cũng như ở Việt Nam. Hệ thống các video bài giảng của lĩnh vực Toán học nói chung đang phát triển mạnh mẽ và rất được quan tâm trong giai đoạn hiện nay. Người học có thể dễ dàng tìm kiếm các video bài giảng từ các nguồn khác nhau của internet.

- Các video bài giảng về các nội dung kiến thức toán ứng dụng cho kỹ thuật cũng đang được quan tâm trong giai đoạn hiện nay tuy nhiên số lượng video bài giảng về lĩnh vực này chưa được nhiều và phong phú như các lĩnh vực khác của Toán học.

9.2. Ngoài nước *(phân tích, đánh giá tình hình nghiên cứu thuộc lĩnh vực của đề tài trên thế giới, liệt kê danh mục các công trình nghiên cứu, tài liệu có liên quan đến đề tài được trích dẫn khi đánh giá tổng quan)*

9.3. Danh mục các công trình đã công bố thuộc lĩnh vực của đề tài của chủ nhiệm và những thành viên tham gia nghiên cứu (*họ và tên tác giả; bài báo; ấn phẩm; các yếu tố về xuất bản*)

a) Của chủ nhiệm đề tài

b) Của các thành viên tham gia nghiên cứu

(Những công trình được công bố trong 5 năm gần nhất)

10. TÍNH CẤP THIẾT CỦA ĐỀ TÀI

- Trước tình hình diễn biến phức tạp của dịch bệnh Covid 19, việc học tập và giảng dạy trực tuyến đang là giải pháp phù hợp tại thời điểm hiện nay. Học tập trực tuyến đem lại rất nhiều lợi ích đột phá so với cách học truyền thống nhờ tính tương thích cao, sự linh hoạt và cá nhân hóa. Người học giờ đây đóng vai trò trung tâm và chủ động của quá trình đào tạo, có thể học mọi lúc, mọi nơi, học theo thời gian biểu cá nhân, với nhịp độ tuỳ theo khả năng và có thể chọn các nội dung học,...

- Tuy nhiên, hình thức học tập này chưa thực sự đạt được chất lượng như mong muốn do nhiều yếu tố chủ quan và khách quan như điều kiện về cơ sở vật chất, ý thức học tập của sinh viên, khó khăn trong việc quản lý sinh viên trong giờ học của giáo viên, ...

- Học phần Phương pháp tính là một học phần được giảng dạy cho sinh viên một số ngành của trường ĐH KTCN. Nội dung kiến thức của học phần này được sử dụng nhiều trong các môn học chuyên ngành của sinh viên trong những năm học tiếp theo. Tuy vậy hiện tại chỉ có các sinh viên khối ngành cơ điện tử được học học phần này.

- Với mong muốn nâng cao chất lượng học tập cho sinh viên trường ĐH KTCN trong giai đoạn học online cũng như sau này. Đồng thời giúp các sinh viên không được học học phần Phương pháp tính trong khung chương trình của mình vẫn có thể tiếp cận với môn học này, nhóm nghiên cứu đề xuất đề tài: *"Xây dựng Video bài giảng cho học phần Phương pháp tính"* để sinh viên có thể tiếp thu kiến thức tốt hơn khi xem các video giảng dạy trước và sau mỗi buổi học cũng như ôn tập cuối kỳ.

11. MỤC TIÊU ĐỀ TÀI

- Nghiên cứu tìm hiểu cách xây dựng và biên tập video bài giảng.

- Xây dựng các video tóm tắt được các nội dung cơ bản của học phần Phương pháp tính giúp cho sinh viên học tập tốt hơn học phần này.

12. ĐỐI TƯỢNG, PHẠM VI NGHIÊN CỨU

12.1. Đối tượng nghiên cứu: Xây dựng video bài giảng các nội dung cơ bản của học phần Toán ứng dụng.

12.2. Phạm vi nghiên cứu: Các nội dung dạy và học học phần Phương pháp tính tại trường ĐH Kỹ thuật Công nghiệp.

13. CÁCH TIẾP CẬN, PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

13.1. Cách tiếp cận: Thu thập thông tin – Luận cứ lý thuyết, thực tiễn – Phân tích, thảo luận – Kết luận, đề nghị.

13.2. Phương pháp nghiên cứu: Đề tài sử dụng các phương pháp nghiên cứu:

- Phương pháp nghiên cứu lý thuyết.
- Phương pháp thực nghiệm sư phạm.

14. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU VÀ TIẾN ĐỘ THỰC HIỆN

14.1. Nội dung nghiên cứu (***Mô tả chi tiết những nội dung nghiên cứu của đề tài***)

14.2. Tiến độ thực hiện

STT	Các nội dung, công việc thực hiện	Sản phẩm	Thời gian (bắt đầu-kết thúc)	Người thực hiện
1	Xây dựng thuyết minh đề tài, xây dựng đề cương cho các video bài giảng, nghiên cứu tìm hiểu các phần mềm thiết kế xây dựng video bài giảng.	Báo cáo	03/2022-04/2022	Phan T Vân Huyền
2	Xây dựng hệ thống video bài giảng chương 1, 2, 3, 4	Video bài giảng	04/2022-10/2022	Phan T Vân Huyền; Phạm Thị Thu Hằng; Vũ Hồng Quân
3	Xây dựng hệ thống video bài giảng chương 5, 6, 7	Video bài giảng	10/2022-02/2023	Phan T Vân Huyền; Ngô Thành Trung.
4	Viết báo cáo, nghiệm thu	Báo cáo	02/2022-03/2023	Phan T Vân Huyền

15. SẢN PHẨM			
Stt	Tên sản phẩm	Số lượng	Yêu cầu chất lượng sản phẩm *(mô tả chi tiết chất lượng sản phẩm đạt được như nội dung, hình thức, các chỉ tiêu, thông số kỹ thuật,...)*
I	Sản phẩm khoa học (Các công trình khoa học sẽ được công bố: sách, bài báo khoa học,..)		
1.1			
1.2			
...			
II	Sản phẩm đào tạo (cử nhân, thạc sĩ, tiến sĩ,...)		
2.1			
2.2			
...			
III	Sản phẩm ứng dụng		
3.1	Video bài giảng học phần Phương pháp tính	Video	
3.2			
...			

16. PHƯƠNG THỨC CHUYỂN GIAO KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU VÀ ĐỊA CHỈ ỨNG DỤNG

16.1. Phương thức chuyển giao

16.2. Địa chỉ ứng dụng

17. TÁC ĐỘNG VÀ LỢI ÍCH MANG LẠI CỦA KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

17.1. Đối với lĩnh vực giáo dục và đào tạo: tạo ra sản phẩm học thuật có chất lượng và có ý nghĩa thực tiễn trong dạy và học các học phần Toán cho sinh viên khối trường đại học chuyên ngành kỹ thuật.

17.2. Đối với lĩnh vực khoa học và công nghệ có liên quan: Phát triển hướng nghiên cứu đổi mới phương pháp dạy và học theo định hướng phát triển năng lực người học và đổi mới giáo dục trong thời đại 4.0.

17.3. Đối với phát triển kinh tế-xã hội: Tạo ra cở sở khoa học cho việc xây dựng và phát triển thương hiệu một trường đại học, cơ sở giáo dục nghề nghiệp cho đất nước trong thời đại công nghiệp hóa ngày nay.

17.4. Đối với tổ chức chủ trì và các cơ sở ứng dụng kết quả nghiên cứu: nâng cao chất lượng dạy và học trong quá trình đào tạo của trường ĐH Kỹ Thuật Công Nghiệp, giúp định hướng vai trò truyền thông ngày nay trong công cuộc xây dựng niềm tin của khách hàng vào cơ sở đào tạo nghề nghiệp.

18. KINH PHÍ THỰC HIỆN ĐỀ TÀI

Tổng kinh phí: 3.600.000đ

Bằng chữ: Ba triệu sáu trăm nghìn đồng chẵn.

(Dự toán chi tiết các mục chi đính kèm có xác nhận của các đơn vị liên quan.)

	Ngày tháng năm 20
Chủ nhiệm đề tài	**PHÒNG KHCN&HTQT**
ThS. Phan Thị Vân Huyền	
HỘI ĐỒNG KHOA KHCB	**KT. HIỆU TRƯỞNG** **PHÓ HIỆU TRƯỞNG**
Phạm Minh Tân	**PGS.TS. Vũ Ngọc Pi**

ĐVT: VNĐ

DỰ TOÁN KINH PHÍ ĐỀ TÀI KH&CN CẤP TRƯỜNG NĂM 2022

Tên đề tài: Xây dựng Video bài giảng cho học phần Phương pháp tính

Chủ nhiệm đề tài: ThS. Phan Thị Vân Huyền

Thành viên chính: ThS. Phạm Thị Thu Hằng; ThS. Vũ Hồng Quân; ThS. Ngô Thành Trung

Thành viên:

ĐVT: VNĐ

STT	Nội dung	Dự toán			
		Người thực hiện	**Số ngày công**	**Hệ số tiền công theo ngày (2)***	**Thành tiền**
1	***Mục chi tiền công lao động tham gia trực tiếp (1)***				
1.1	Xây dựng thuyết minh đề tài, xây dựng đề cương cho các video bì giảng. Nghiên cứu tìm hiểu các phần mềm thiết kế xây dựng video bài giảng.	Phan Thị Vân Huyền	0,5	0,45	335.250
1.2	Xây dựng hệ thống video bài giảng chương 1, 2, 3, 4	Phạm Thị Thu Hằng	1	0,3	447.000
1.3		Vũ Hồng Quân	1	0,3	447.000
1.4		Phan Thị Vân Huyền	1	0,45	670.500
1.5	Xây dựng hệ thống video bài giảng chương 5, 6, 7	Ngô Thành Trung	1	0,3	447.000
1.6		Phan Thị Vân Huyền	1	0,45	670.500
1.7	Viết báo cáo nghiệm thu	Phan Thị Vân Huyền	0,5	0,45	335.250
	Tổng 1		**6**		**3.352.500**
2	***Mục chi khác***				
2.1	Phô tô, in ấn				247.500
	Tổng 2				**247.500**
	Tổng 1 + 2				**3.600.000**

Cơ quan chủ trì
KT. HIỆU TRƯỞNG
PHÓ HIỆU TRƯỞNG

PGS.TS. Vũ Ngọc Pi

TRƯỞNG PHÒNG KHCN&HTQT

CHỦ NHIỆM ĐỀ TÀI

Phan Thị Vân Huyền

TRƯỞNG PHÒNG KH-TC