ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

BÁO CÁO TỔNG KẾT
ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP TRƯỜNG

XÂY DỰNG VIDEO BÀI GIẢNG HỌC PHẦN GIẢI TÍCH
Mã số: T2022-VD16

Chủ nhiệm đề tài: ThS. Lê Bích Ngọc

Thái Nguyên - 05/2023

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

BÁO CÁO TỔNG KẾT
ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP TRƯỜNG

XÂY DỰNG VIDEO BÀI GIẢNG HỌC PHẦN GIẢI TÍCH

Mã số: T2022-VD16

Xác nhận của tổ chức chủ trì	Chủ nhiệm đề tài
KT. HIỆU TRƯỞNG	*(ký, họ tên)*
PHÓ HIỆU TRƯỞNG	
PGS.TS. Vũ Ngọc Pi	ThS. Lê Bích Ngọc

Thái Nguyên - 05/2023

MỤC LỤC

TRƯỜNG ĐẠI HỌC
KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP
Đơn vị: Khoa KHCB &ƯD

THÔNG TIN KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

1. Thông tin chung:

- Tên đề tài: Xây dựng video bài giảng học phần Giải tích
- Mã số: T2022-VD16
- Chủ nhiệm: ThS. Lê Bích Ngọc
- Cơ quan chủ trì: Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp
- Thời gian thực hiện: 4/2022 – 10/2023

2. Mục tiêu:

Xây dựng kho học liệu số học phần Giải tích trong trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp.

3. Kết quả nghiên cứu:

Xây dựng được 48 video bài giảng học phần Giải tích.

4. Sản phẩm:

Sản phẩm ứng dụng: 48 video bài giảng học phần Giải tích

5. Hiệu quả:

Kết quả nghiên cứu đã đáp ứng được mục tiêu nghiên cứu của đề tài: Xây dựng được 48 video bài giảng học phần Giải tích dùng làm tài liệu học tập cho sinh viên trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp Thái Nguyên.

6. Khả năng áp dụng và phương thức chuyển giao kết quả nghiên cứu:

Kết quả của đề tài có khả năng áp dụng trong giảng dạy và học tập học phần Giải tích tại trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp Thái Nguyên.

Ngày 25 tháng 05 năm 2023

Cơ quan chủ trì
KT.HIỆU TRƯỞNG
PHÓ HIỆU TRƯỞNG

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

PGS.TS. Vũ Ngọc Pi

Chủ nhiệm đề tài

ThS. Lê Bích Ngọc

INFORMATION ON RESEARCH RESULTS

1. General information:

Project title: Building a video lecture on Calculus

Code number: T2022-VD16

Coordinator: Master Le Bich Ngoc

Implementing institution: Thai Nguyen University of Technology

Duration: from April 2022 to October 2023

2. Objectives:

Building a digital repository of Calculus subjects at the University of Technology and Industry.

3. Research results:

Built 48 videos of lectures on Calculus

4. Products:

Application products: 48 videos of lectures on Calculus

5. Effects:

The results of research sastify the objective of project: Preparing a lecture bank in a subject of Calculus used as learning materials for student at Thai Nguyen University of Technology

6. Transfer alternatives of reserach results andapplic ability:

The results of project apply in teaching and learning Calculus at Thai Nguyen University of Technology.

MỞ ĐẦU

1. Tính cấp thiết của đề tài

Xu thế toàn cầu hóa và hội nhập quốc tế đặt ra những yêu cầu mới cho giáo dục đại học. Cách thức tổ chức và phương pháp giảng dạy tại các trường đại học cần thay đổi. Công nghệ phát triển với chi phí rẻ là điều kiện thuận lợi để các trường đại học đầu tư cơ sở vật chất, các công cụ và phương tiện giảng dạy hiện đại. Bên cạnh hình thức giảng dạy trực tiếp cho người học, các trường cần sử dụng nhiều hơn các hình thức khác như đào tạo online, thiết kế môi trường ảo để người học và người dạy có thể tương tác lẫn nhau và truyền đạt thông tin, tổ chức thực hành tại các phòng thí nghiệm hay phòng mô phỏng ảo…

Việc đưa hệ thống E-learning vào hoạt động tại trường Đại học, tạo ra một kênh học tập khác góp phần nâng cao chất lượng đào tạo. Hiện nay việc sử dụng hệ thống E-learning đã trở thành tự giác đối với hầu hết giảng viên và sinh viên trong Trường vì những lợi ích thiết thực mà hệ thống mang lại. Video là một phương tiện truyền thông phong phú và mạnh mẽ được sử dụng trong elearning. Nó có thể trình bày thông tin một cách hấp dẫn và nhất quán.

Để nâng cao chất lượng đào tạo trong tình hình mới, đáp ứng nhu cầu về nguồn lao động chất lượng cao cho đất nước, Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp đã triển khai xây dựng các bài giảng điện tử. Từ đó, tác giả đăng ký đề tài "Xây dựng video bài giảng học phần Giải tích" để cung cấp thêm nguồn tài liệu cho công tác giảng dạy và học tập của Nhà trường.

2. Mục tiêu nghiên cứu

Xây dựng kho học liệu số học phàn giải tích trong trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp, đồng thời nâng cao kỹ năng ứng dụng công nghệ thông tin trong hoạt động dạy và học.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

3.1. Đối tượng nghiên cứu: Xây dựng video bài giảng các nội dung cơ bản của học phần Giải tích

3.2. Phạm vi nghiên cứu: Các nội dung dạy và học học phần Giải tích tại trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp

4. Cách tiếp cận, phương pháp nghiên cứu

4.1. Cách tiếp cận: Ứng dụng công nghệ thông tin và các phương pháp dạy học tích cực để xây dựng các video bài giảng.

4.2. Phương pháp nghiên cứu:

- Phương pháp nghiên cứu lý thuyết.
- Phương pháp thực nghiệm sư phạm

5. Kết quả nghiên cứu

Ngoài phần mở đầu, mục lục, danh mục tài liệu tham khảo, phục lục đề tài nghiên cứu đã xây dựng được 48 video bài giảng học phần Giải tích. Thời lượng mỗi video từ 15-20 phút.

NỘI DUNG

1. NỘI DUNG CÁC VIDEO 01 - 07: CHƯƠNG 1: GIỚI HẠN VÀ SỰ LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

Video 1: Các cách biểu thị của hàm số

Video 2: Một số tính chất của hàm số

Video 3: Các hàm số cơ bản

Video 4: Dãy số, giới hạn của dãy số

Video 5: Giới hạn của hàm số

Video 6: Quy tắc tìm giới hạn của hàm số

Video 7: Sự liên tục của hàm số

2. NỘI DUNG VIDEO 08 - 19: CHƯƠNG 2: ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

Video 1: Đạo hàm và vi phân

Video 2: Đạo hàm của các hàm số cơ bản

Video 3: Quy tắc tính đạo hàm

Video 4: Đạo hàm cấp cao

Video 5: Quy tắc tính đạo hàm cấp cao

Video 6: Vi phân cấp cao

Video 7: Các định lý về giá trị trung bình

Video 8: Công thức Taylor – Macloranh

Video 9: Quy tắc Lopitan

Video 10: Bài toán cực trị của hàm số

Video 11: Bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

Video 12: Khảo sát hàm số

3. NỘI DUNG VIDEO 20- 28: CHƯƠNG 3: TÍCH PHÂN HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ THỰC

Video 1: Định nghĩa tích phân xác định

Video 2: Tích phân bất định

Video 3: Phương pháp đổi biến

Video 4: Ứng dụng của tích phân xác định

Video 5: Ứng dụng của tích phân xác định (tiếp)

Video 6: Phương pháp tích phân từng phần

Video 7: Tích phân hàm hữu tỷ

Video 8: Tích phân hàm lượng giác

Video 9: Tích phân hàm vô tỷ

4. NỘI DUNG VIDEO 29- 34: CHƯƠNG 4: HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

Video 1: Định nghĩa hàm số nhiều biến số

Video 2: Đạo hàm riêng

Video 3: Đạo hàm theo hướng

Video 4: Bài toán cực trị của hàm số nhiều biến

Video 5: Bài toán cực trị có điều kiện của hàm số nhiều biến

Video 6: Bài toán tìm giá trị lớn nhất,giá trị nhỏ nhất của hàm số nhiều biến

5. NỘI DUNG VIDEO 35- 42: CHƯƠNG 5: TÍCH PHÂN BỘI

Video 1: Định nghĩa tích phân bội hai

Video 2: Cách tính tích phân bội hai

Video 3: Phương pháp đổi biến trong tích phân bội hai

Video 4: Ứng dụng của tích phân bội hai

Video 5: Định nghĩa tích phân bội ba

Video 6: Cách tính tích phân bội ba

Video 7: Phương pháp đổi biến trong tích phân bội ba

Video 8: Ứng dụng của tích phân bội ba

6. NỘI DUNG VIDEO 43 - 48: CHƯƠNG 6: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Video 1: Đại cương về phương trình vi phân cấp một

Video 2: Phương trình vi phân cấp một thuần nhất

Video 3: Phương trình vi phân tuyến tính cấp một

Video 4: Đại cương về phương trình vi phân cấp hai

Video 5: Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai hệ số hằng

Video 6: Hệ phương trình vi phân

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

BÀI GIẢNG HỌC PHẦN: GIẢI TÍCH

Học phần: GIẢI TÍCH

Học phần Giải tích là học phần bắt buộc, thuộc khối kiến thức giáo dục đại cương đối với sinh viên các ngành công nghệ kỹ thuật.

Học phần này cung cấp kiến thức cơ bản về hàm số một biến số thực như: **Giới hạn và sự liên tục của hàm số một biến số; đạo hàm và vi phân của hàm số một biến số; tích phân xác định và ứng dụng**; các kiến thức cơ bản về hàm số nhiều biến như: **Đạo hàm riêng, cực trị, giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số nhiều biến; tích phân bội; phương trình vi phân**; đây là những kiến thức cơ bản để vận dụng giải quyết các bài toán trong kỹ thuật.

Nội dung học phần Giải tích

Chương 1. Giới hạn và sự liên tục của hàm số một biến số thực.
Chương 2. Đạo hàm và vi phân hàm số một biến số thực.
Chương 3. Tích phân hàm số một biến số thực.
Chương 4. Hàm số nhiều biến số.
Chương 5. Tích phân bội.
Chương 6. Phương trình vi phân.

Chương I
GIỚI HẠN VÀ SỰ LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ THỰC

1.1 Các cách biểu thị hàm số.
1.2 .Các hàm số cơ bản.
1.3. Dãy số, giới hạn của dãy số.
1.4. Giới hạn của hàm số một biến số.
1.5. Quy tắc tìm giới hạn.
1.6. Sự liên tục của hàm số một biến.
1.7. Vô cùng bé, vô cùng lớn.

1.1 Các cách biểu thị hàm số

Cho các tập $A, B \subseteq R$.
Một hàm số $f: A \to B$ là quy luật gán mỗi x trong A với duy nhất f(x) trong B.

Khi đó A được gọi là miền xác định của f, ký hiệu là D_f

Tập $\{f(x) : x \in A\}$ được gọi là miền giá trị hoặc ảnh của A qua f, ký hiệu là R_f hoặc f(A)

Ví dụ: Các quy luật sau là các hàm số

$x \mapsto f(x) = x + 3; \quad x \mapsto g(x) = 2; \quad x \mapsto h(x) = 2 + \sqrt{x}$

$f(0) = 0 + 3 = 3; \quad f(5) = 5 + 3 = 8; \quad f(-1) = -1 + 3 = 2; \quad \ldots \qquad D_f = R; \quad R_f = R$

$g(0) = 2; \quad g(5) = 2; \quad g(-1) = 2; \quad \ldots \qquad D_g = R; \quad R_g = \{2\}$

$h(0) = 2 + \sqrt{0} = 2; \quad h(5) = 2 + \sqrt{5}; \quad h(-1) = ? \qquad D_h = [0; +\infty), \quad R_h = [2; +\infty)$

Các cách biểu thị hàm số

+ Đại số (Bằng công thức tường minh)
+ Số (Theo các giá trị trong một bảng)
+ Trực quan (Dựa vào đồ thị)
+ Lời nói (Mô tả bằng lời nói)

+ Diện tích A của hình tròn phụ thuộc vào bán kính r của nó. Mối liên hệ giữa A và r được cho bởi phương trình $A = \pi r^2$

Với mỗi giá trị dương của r có một giá trị A tương ứng, và ta nói A là hàm của r.

+ Dân số thế giới P phụ thuộc thời gian t và được cho bởi bảng bên với một số năm nhất định.

Ví dụ, $P(1950) \approx 2\,560\,000\,000$ (người).

Với mỗi giá trị của t có một giá trị của P tương ứng, và ta nói rằng P là hàm của t.

Năm	Dân số (triệu)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2560
1960	3040
1970	3710
1980	4450
1990	5280
2000	6080
2010	6870

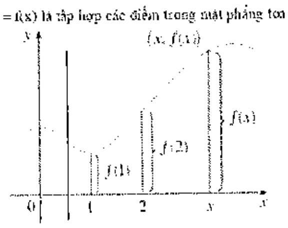
+ Dao động dọc a của bề mặt Trái đất được đo bằng địa chấn kế trong các trận động đất là một hàm của thời gian t. Hình 1 cho thấy một đồ thị được tạo ra bởi hoạt động địa chấn trong trận động đất Northridge làm rung chuyển Los Angeles vào năm 1994. Đối với một giá trị nhất định của t đồ thị cung cấp một giá trị tương ứng của a.

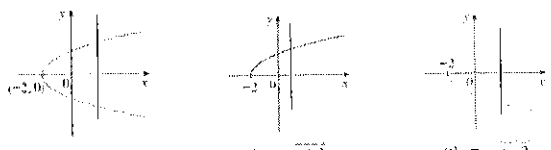
Hình 1

+ Giá tiền C của một lá thư phụ thuộc vào trọng lượng w của nó. Mặc dù không có công thức đơn giản liên hệ giữa w và C, nhưng bưu điện có một quy tắc để xác định C khi đã biết w.

Đồ thị của hàm số

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp các điểm trong mặt phẳng toạ độ có toạ độ $(x; f(x))$





(a) $x = y^2 - 2$ (b) $y = \sqrt{x+2}$ (c) $y = -\sqrt{x+2}$

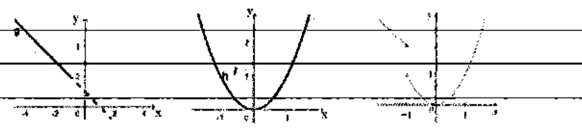
Hàm số cho bởi nhiều biểu thức

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}1-x & \text{khi } x\le -1\\ x^2 & \text{khi } x>-1\end{cases}$. Tính giá trị $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$ và vẽ đồ thị hàm số f(x)

Do $-2<-1$, nên $f(-2)=1-(-2)=3$

Do $-1=-1$, nên $f(-1)=1-(-1)=2$

Do $0>-1$, nên $f(0)=0^2=0$

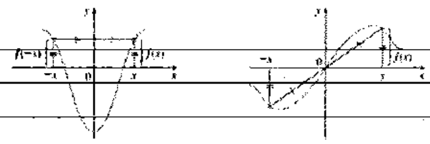


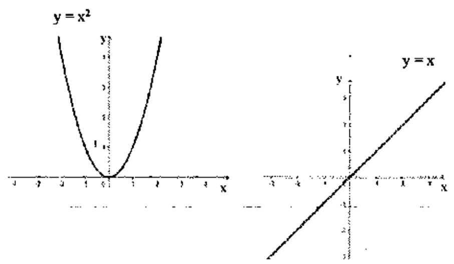
Một số tính chất đặc biệt của hàm số

Hàm số chẵn, hàm số lẻ

Định nghĩa Giả sử f: A → B. Hàm f được gọi là hàm chẵn nếu $f(-x)=f(x)$
được gọi là hàm lẻ nếu $f(-x)=-f(x)$, $\forall x\in A$

+ Đồ thị của hàm chẵn đối xứng qua trục Oy, đồ thị của hàm lẻ đối xứng qua gốc tọa độ.

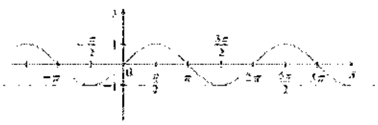




Hàm tuần hoàn

Định nghĩa: Nếu ∃T > 0 sao cho $f(x+T)=f(x)$
với mọi x, thì f được gọi là hàm tuần hoàn.

+ Số T_0 nhỏ nhất trong các số T nói trên (nếu tồn tại) được gọi là chu kỳ.

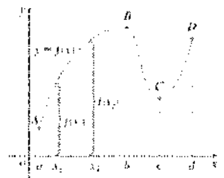


(a) $f(x)=\sin x$ $\sin x=\sin(x+2\pi)=\sin(x+4\pi)=\dots$

Hàm đơn điệu

Định nghĩa

Hàm f được gọi là đơn điệu tăng [hay giảm] trên miền (a, b) nếu $f(x_1)<f(x_2)$ [hay $f(x_1)>f(x_2)$] với mọi cặp $a<x_1<x_2<b$



Hàm hợp: Giả sử có hai hàm f và g, trong đó miền giá trị của g nằm trong miền xác định của f. Khi đó ta định nghĩa hàm hợp của f với g, viết là $f\circ g$, như sau:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$

Ví dụ: Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x};\quad g(x)=\sqrt{2-x}$

Hãy xác định $f\circ g(0);\quad g\circ f(0);\quad g\circ g\circ f(0)$

và tìm tập xác định của hàm $g\circ f(x)$

$f\circ g(0)=f(g(0))=f(\sqrt{2})=\sqrt{\sqrt{2}}=\sqrt[4]{2}\qquad g\circ f(0)=g(f(0))=g(0)=\sqrt{2}$

$g\circ g\circ f(0)=g(g(f(0)))=g(\sqrt{2})=\sqrt{2-\sqrt{2}}$

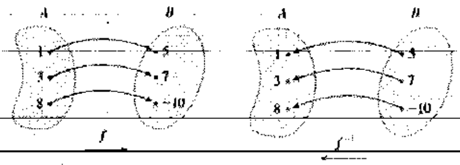
$g\circ f(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x})=\sqrt{2-\sqrt{x}}$

$$\begin{cases} x\ge 0\\ 2-\sqrt{x}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in[0;4]$$

Hàm số ngược

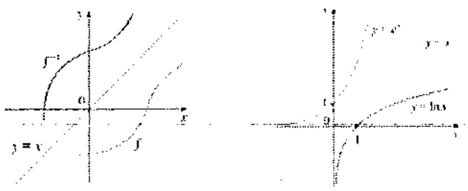
Hàm g: B → A được gọi là hàm ngược của f : A → B

nếu g(f(x)) = x với mọi x ∈ A, ký hiệu là f^{-1}



$$f^{-1}(f(1))=f^{-1}(5)=1$$

Đồ thị của hàm số ngược $y=f^{-1}(x)$ đối xứng với đồ thị của hàm số $y=f(x)$ qua đường phân giác $y=x$



Các bước tìm hàm ngược

+ Viết y = f(x)

+ Giải x theo y, nhận được x = g(y)

+ Hoán đổi x với y, nhận được hàm ngược y = f^{-1} (x) = g(x)

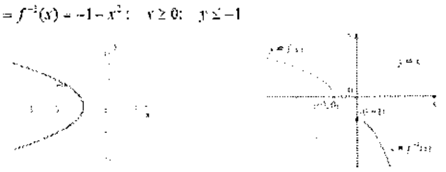
Ví dụ: Tìm hàm ngược của hàm số

$$f(x)=\sqrt{-1-x}$$

$y=\sqrt{-1-x};\quad x\le -1;\quad y\ge 0$

$\Rightarrow y^2=-1-x\Rightarrow x=-1-y^2;\quad y\ge 0;\quad x\le -1$

$y=f^{-1}(x)=-1-x^2;\quad x\ge 0;\quad y\le -1$



Chương 1

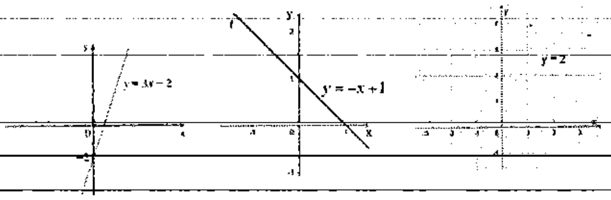
GIỚI HẠN VÀ SỰ LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ THỰC

1.2. Các hàm số cơ bản

Hàm tuyến tính (Linear functions)

Là các hàm có dạng f(x) = ax + b, với a và b là các hằng số.

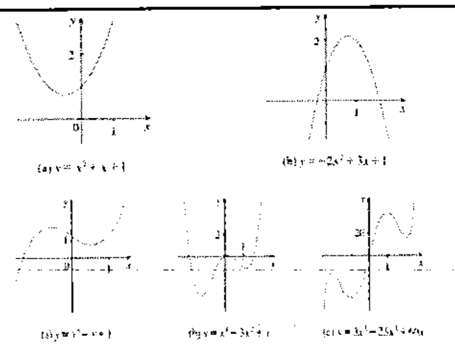
Đồ thị của các hàm này là những đường thẳng.



Hàm đa thức (Polynomial functions)

Là các hàm có dạng $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

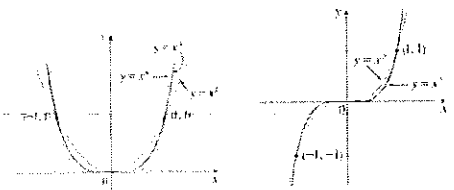
Các hằng số a_k được gọi là các hệ số của đa thức, $a_n \neq 0$, n được gọi là bậc của đa thức P(x). Người ta thường dùng ký hiệu $P_n(x)$ để biểu thị đa thức bậc n của x.



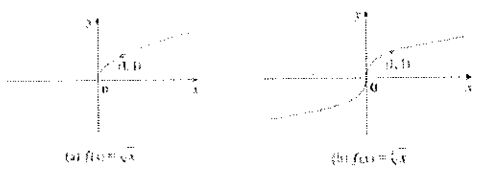
Hàm lũy thừa (Power functions)

Là các hàm có dạng $f(x) = x^{\alpha}$, trong đó α là một số thực

α là số nguyên dương



α = 1/n , n là số nguyên dương

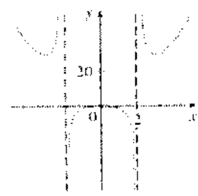


Hàm phân thức (Rational functions)

Là các hàm có dạng $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$

trong đó P_m và Q_n tương ứng là các đa thức bậc m và n của x.

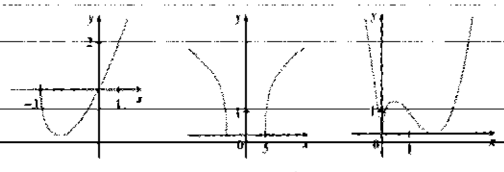
Tập xác định của f(x) là tập những điểm mà $Q_n(x) \neq 0$



$f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$

Các hàm đại số (Algebraic functions)

Là các hàm được xây dựng trên các đa thức cùng với các phép toán đại số (cộng, trừ, nhân, chia và khai căn).



(a) $f(x) = x\sqrt{x+3}$ (b) $g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 25}$ (c) $h(x) = x^{2/3}(x-2)^2$

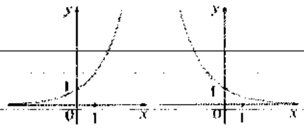
Hàm số mũ (Exponential Functions)

Là các hàm có dạng $f(x) = a^x$

Số a ($a > 0, a \neq 1$) được gọi là cơ số.

Nếu $a > 1$ thì hàm đơn điệu tăng,

nếu $0 < a < 1$ thì hàm đơn điệu giảm.



(a) $y = 2^x$ (b) $y = (0.5)^x$

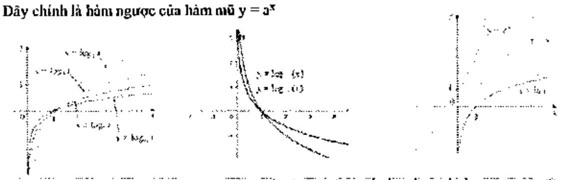
$$a^{x+y} = a^x a^y$$

$$a^{x-y} = a^x / a^y \qquad a^x b^x = (ab)^x \qquad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

Hàm số logarith (Logarithmic Functions)

Là các hàm có dạng $f(x) = \log_a x$ Số a ($a > 0, a \neq 1$) được gọi là cơ số

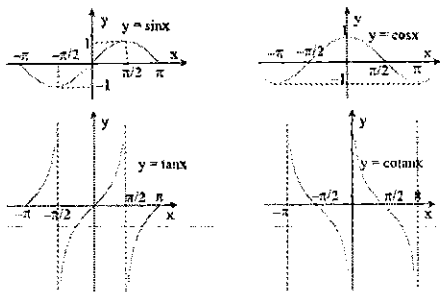
Đây chính là hàm ngược của hàm mũ $y = a^x$



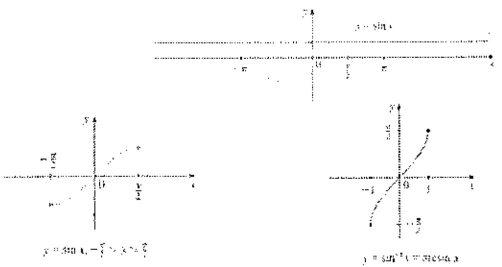
$$\log_a|xy| = \log_a|x| + \log_a|y| \qquad \log_a|x/y| = \log_a|x| - \log_a|y| \qquad \log_a(a^x) = x$$

$$a^{\log_a x} = x, (x > 0) \qquad \log_a |x|^m = m \log_a |x| \qquad \log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$$

Các hàm lượng giác (Trigonometric functions)



Hàm số lượng giác ngược



$y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ $y = \sin^{-1} x = \arcsin x$

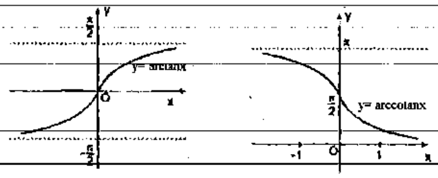
$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \quad \arcsin 0 = 0 \quad \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \quad \arcsin\frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$$

$y = \cos x, 0 \le x \le \pi$ $y = \cos^{-1} x = \arccos x$

$$\arccos 1 = 0 \quad \arccos 0 = \frac{\pi}{2} \quad \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \quad \arccos\frac{-\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi}{3}$$

+ y = arctanx là hàm ngược của hàm y = tanx.

+ y = arccotanx là hàm ngược của hàm y = cotanx.



$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ $\arctan 0 = 0$ $\arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

Chương 1

GIỚI HẠN VÀ SỰ LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ THỰC

1.3. Dãy số, giới hạn của dãy số

Định nghĩa Dãy số

Một dãy số thực (hay dãy số) là một ánh xạ từ N* vào R: N* ∋ n → x_n ∈ R.

Để biểu thị một dãy, ta có thể dùng ký hiệu {x_n}, n = 1, 2, ...

(a) $\{x_n\}: x_n = \frac{1}{n}$, $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{3}$, ...

(b) $\{x_n\}: x_n = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, ...

(c) $\{x_n\}: x_n = (-1)^n$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, ...

(d) $\{x_n\}: x_n = n^2$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 9$, ...

(e) $\{x_n\}: x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{9}{4}$, $x_3 = \frac{64}{27}$, ...

Dãy số $\{x_n\}$ cho bởi $x_0 = \sqrt{3}$; $x_n = \sqrt{1+x_{n-1}}$

$$x_0 = \sqrt{3}$$

$$x_1 = \sqrt{1+x_0} = \sqrt{1+\sqrt{3}}$$

$$x_2 = \sqrt{1+x_1} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{3}}}; \dots \qquad x_n = \sqrt{1+x_{n-1}}$$

Dãy {x_n} được gọi là **dãy tăng** nếu $x_n \le x_{n+1}$ ∀n, **dãy giảm** nếu $x_n \ge x_{n+1}$ ∀n.

Dãy tăng hay dãy giảm được gọi là dãy đơn điệu.

Dãy $\{x_n\}$ được gọi là **bị chặn trên** nếu tồn tại số thực c sao cho $x_n \le c$, $\forall n$.

bị chặn dưới nếu tồn tại số thực d sao cho $x_n \ge d$, $\forall n$

(a) $\{x_n\}: x_n = \frac{1}{n}$, $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{3}$, ...

Dãy là dãy số giảm, bị chặn dưới bởi số 0, bị chặn trên bởi số 1

(c) $\{x_n\}: x_n = (-1)^n$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, ...

Dãy là dãy số không đơn điệu, bị chặn dưới bởi số -1, bị chặn trên bởi số 1

(d) $\{x_n\}: x_n = n^2$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 9$, ...

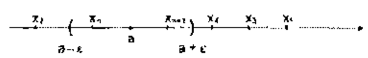
Dãy là dãy số tăng, bị chặn dưới bởi số 1, không bị chặn trên.

Dãy số hội tụ

Dãy {x_n} được gọi là hội tụ tới số hữu hạn a khi n dần ra vô cùng nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N^* : \forall n > n_0 \text{ ta có } |x_n - a| < \varepsilon$$

Ta còn nói a là giới hạn của dãy x_n và viết $x_n \to a$ khi $n \to \infty$, hoặc $\lim_{n\to\infty} x_n = a$



Nếu dãy $\{x_n\}$ không hội tụ, ta nói $\{x_n\}$ phân kỳ.

(a) $\{x_n\}: x_n = \frac{1}{n}, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{1}{3}, \quad \ldots$

Ta chứng minh $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ Với $\varepsilon > 0$ bất kỳ, chọn $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, khi đó $\forall n \ge n_0$ ta có

$$|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \le \frac{1}{n_0} < \varepsilon \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

(b) $\{x_n\}: x_n = 1, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1, \quad \ldots \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = 1$

(c) $\{x_n\}: x_n = (-1)^n, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1, \quad \ldots$ Dãy $\{x_n\}$ là phân kỳ

(d) $\{x_n\}: x_n = n^2, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 9, \quad \ldots$

Dãy $\{x_n\}$ là phân kỳ, x_n lớn lên vô cùng khi n tăng vô hạn, ta viết $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$

Một số tính chất của dãy hội tụ:

Định lý 1: Giả sử x, y và z tương ứng là giới hạn của các dãy (x_n), (y_n) và (z_n), còn a, b và c là các hằng số. Khi đó:

1) $ax_n + by_n + c \to ax + by + c$

2) $x_n y_n \to xy$

3) $\frac{1}{y_n} \to \frac{1}{y}$ với $y \neq 0$

4) $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}$ với $y \neq 0$

Ví dụ: Tìm giới hạn của dãy $(x_n) = \{1 + \frac{1}{n}\}$ và $(y_n) = \{\frac{n}{n+1}\}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1 + 0 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

Định lý 2:

+ Nếu $x_n \to x, y_n \to y$ và $x_n \le y_n$ thì $x \le y$

+ Nếu $x_n \to a, z_n \to a$ và $x_n \le y_n \le z_n$ thì $y_n \to a$

Định lý 3: Một dãy đơn điệu tăng (hay giảm) bị chặn trên (hay dưới) thì hội tụ.

Định lý 4 : Dãy $\{x_n\}$ hội tụ $\Leftrightarrow$ nó giới nội và có duy nhất điểm giới hạn.

Định lý 5 : Dãy $\{x_n\}$ hội tụ $\Leftrightarrow$ mọi dãy con của nó đều hội tụ và có chung giới hạn.

Một số giới hạn cơ bản:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^r} = 0 \quad \text{if } r > 0 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3n-1}{2n^2+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(n - \sqrt{n^2-3n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-(n^2-3n)}{n+\sqrt{n^2-3n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+\sqrt{n^2-3n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{1+\sqrt{1-\frac{3}{n}}} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{if } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{if } r = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} 1^n = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}+3^{n+1}}{2^n+3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 3$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e \longrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}=e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{2n}\right)^{\frac{2n}{3}}=e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}2}=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^{2}=e^{2}$$

Chương 1

GIỚI HẠN VÀ SỰ LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ THỰC

1.4. Giới hạn của hàm số một biến số

Định nghĩa: Giới hạn của hàm số

Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng (a, b); ta nói rằng $f(x)$ có giới hạn là L (hữu hạn) khi x dần đến x_0, $x_0\in[a,b]$ và viết là $\lim_{x\to x_0}f(x)=L$ nếu với bất kỳ dãy $\{x_n\}$ trong $(a,b)\setminus\{x_0\}$ mà $x_n\to x_0$ thì $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=L$.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng (a, b); ta nói rằng $f(x)$ có giới hạn là L (hữu hạn) khi x dần đến x_0, $x_0\in[a,b]$ nếu với bất kì $\varepsilon>0$ cho trước tìm được $\delta>0$ sao cho khi $|x-x_0|<\delta$ thì $|f(x)-L|<\varepsilon$.

Ví dụ:

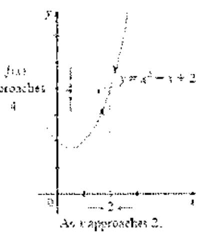
a) Cho $f(x)=C$, ta chứng minh $\lim_{x\to x_0}f(x)=C$

Thật vậy, cho trước $\varepsilon>0$, vì $f(x)=C$, $\forall x$, do vậy với bất kì $\delta>0$; $|x-x_0|<\delta$ ta luôn có $|f(x)-C|=|C-C|=0<\varepsilon$.

b) Cho $f(x)=x$, ta chứng minh $\lim_{x\to x_0}f(x)=x_0$

Thật vậy, cho trước $\varepsilon>0$, chỉ cần chọn $\delta=\varepsilon$ thì ta luôn có: $|x-x_0|<\delta$ thì $|f(x)-x_0|=|x-x_0|<\varepsilon$.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001



$$\lim_{x\to 2}\left(x^2-x+2\right)=4$$

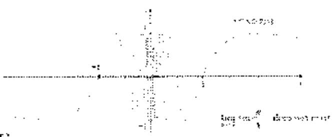
Ví dụ : Phỏng đoán $\lim_{x\to 0}\sin\frac{\pi}{x}$

Ta tính một số giá trị của $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ trong lân cận của điểm 0.

$f(1)=\sin\pi=0, f(1/2)=\sin 2\pi=0, f(1/3)=\sin 3\pi=0, f(1/4)=\sin 4\pi=0$

Tương tự f(0.1) = f(0.01) = f(0.001) = … = f(0.0000001) = 0

Vậy ta phỏng đoán $\lim_{x\to 0}\sin\frac{\pi}{x}=0$?

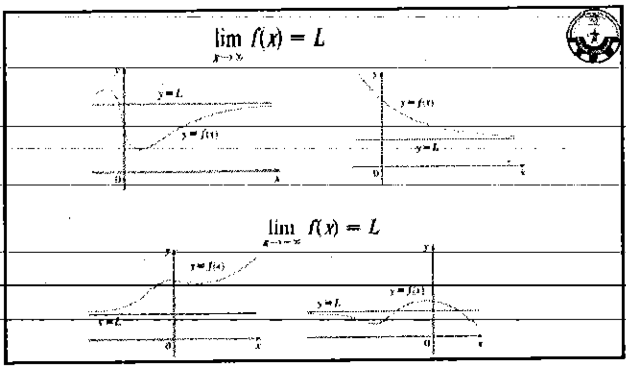


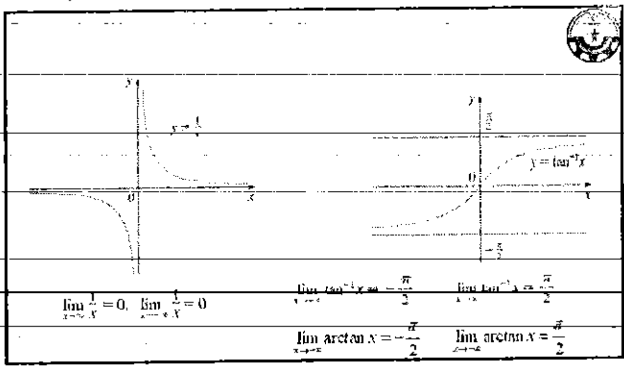
Xét 2 dãy

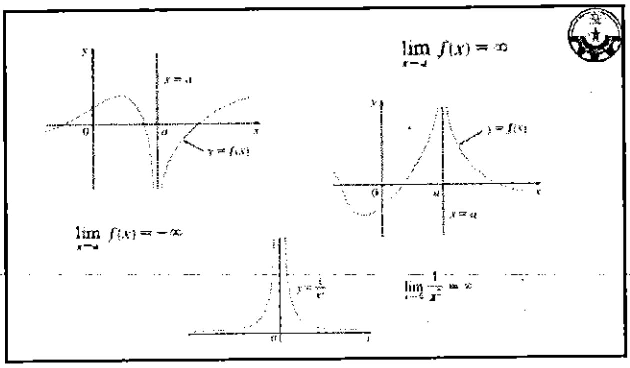
$x_n=\frac{1}{2n}\to 0\ (n\to\infty)$; $x_n'=\frac{1}{\frac{1}{2}+2n}\to 0\ (n\to\infty)$

$f(x_n)=0\to 0\ (n\to\infty)$; $f(x_n')=1\to 1\ (n\to\infty)$

Như vậy để tìm giới hạn của hàm số, không thể dựa vào dãy các giá trị tính toán bằng máy tính để phỏng đoán, mà phải bằng giải tích.





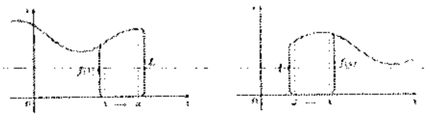


Giới hạn một phía:

Ta xét lim $f(x)$ khi $x \to x_0$ (hữu hạn) khi x luôn thỏa $x < x_0$. Khi đó nếu tồn tại lim $f(x)$ thì ta nói rằng đó là giới hạn trái của $f(x)$, kí hiệu là:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

lim $f(x)$ khi $x \to x_0$ (hữu hạn) khi x luôn thỏa $x > x_0$. Khi đó nếu tồn tại lim $f(x)$ thì ta nói rằng đó là giới hạn phải của $f(x)$, kí hiệu là: $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

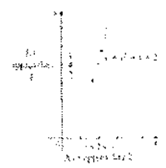


(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

Định lý :

Khi x dần về a, giới hạn của f(x) tồn tại khi và chỉ khi giới hạn trái và giới hạn phải cùng tồn tại và bằng nhau.

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ 1 & \text{if } t \geq 0 \end{cases}$$



$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$

$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$

$\lim_{t \to 0^-} H(t) = 0 \qquad \lim_{t \to 0^+} H(t) = 1$

Không tồn tại $\lim_{t \to 0} H(t)$

Chương I

GIỚI HẠN VÀ SỰ LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ THỰC

1.5. Quy tắc tìm giới hạn

Định lý 1: Giả sử k là hằng số và các giới hạn

$\lim_{x\to a} f(x)$; $\lim_{x\to a} g(x)$ cùng tồn tại.

Khi đó $\lim_{x\to a} kf(x) = k\lim_{x\to a} f(x)$

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left[f(x).g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \quad (\lim_{x\to a} g(x) \neq 0)$$

$$\lim_{x\to x_0} x = x_0 \qquad \lim_{x\to x_0} C = C$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x\to 5}(2x^2 - 3x + 4) = \lim_{x\to 5}(2x^2) - \lim_{x\to 5}(3x) + \lim_{x\to 5} 4$$
$$= 2\lim_{x\to 5} x^2 - 3\lim_{x\to 5} x + \lim_{x\to 5} 4$$
$$= 2(5^2) - 3(5) + 4$$
$$= 39$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2-1}{5-3x} = \frac{\lim_{x\to -2}(x^3+2x^2-1)}{\lim_{x\to -2}(5-3x)}$$
$$= \frac{\lim_{x\to -2} x^3 + 2\lim_{x\to -2} x^2 - \lim_{x\to -2} 1}{\lim_{x\to -2} 5 - 3\lim_{x\to -2} x}$$
$$= \frac{(-2)^3+2(-2)^2-1}{5-3(-2)}$$
$$= -\frac{1}{11}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1}(x+1)$$
$$= 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-3}{2x^2-3x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x\to\infty} 1 + 2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} - \lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}}{\lim_{x\to\infty} 2 - 3\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

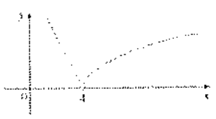
Định lý 2: $\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$

$$f(x) = \begin{cases}\sqrt{x-4} & \text{if } x > 4\\ 8-2x & \text{if } x < 4\end{cases} \qquad \lim_{x\to 4} f(x) = ?$$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+}\sqrt{x-4} = \sqrt{4-4} = 0$$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-}(8-2x) = 8 - 2\cdot 4 = 0$$

$$\lim_{x\to 4} f(x) = 0$$



Định lý 3: Nếu trong lân cận nào đó của a (loại trừ tại a) mà $f(x) \le g(x)$ đồng thời $\lim_{x\to a} f(x) = F$

và $\lim_{x\to a} g(x) = G$ thì $F \le G$

Định lý 4: Nếu trong lân cận nào đó của a (loại trừ tại a) mà $f(x) \le g(x) \le h(x)$ đồngthời

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$ thì $\lim_{x\to a} g(x) = L$

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$$

$$-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$$

$$-x^2 \le x^2\sin\frac{1}{x} \le x^2$$

$\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ and $\lim_{x\to 0}(-x^2) = 0$ $\qquad \lim_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x} = 0$

Một số giới hạn cơ bản

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$$

$$3)\ \lim_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \qquad 4)\ \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$$

$$5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e \qquad 6)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$7)\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \qquad 8)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$9)\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=1$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=1$$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{\sin(2x+1)}{2x+1}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{4x}=\frac{7}{4}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 7x}{7x}\right)=\frac{7}{4}\cdot 1=\frac{7}{4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}=1 \qquad \lim_{x\to 2}\frac{e^{x-2}-1}{x-2}=1$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1} \longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{x}=?$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos 5\sqrt{x}}{\sin x}$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^x-1+1-\cos 5\sqrt{x}}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}\right]$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^x-1}{x}+\frac{1-\cos 5\sqrt{x}}{x}\right]\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\longrightarrow\left(1+\frac{25}{2}\right)1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}=\frac{a^2}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{\frac{2x}{1}}=e \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{5}}=e$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-2}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x-2}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{7}\cdot\frac{7}{x-2}\cdot 2x}=e^{14}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

$$\boxed{\lim_{u\to 0}(1+u)^{1/u}=e}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}}=e \qquad \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}=e$$

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}}=\left[\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=e^{1}$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}}=\left(\lim_{x\to 0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{-1/2}$$

Chương I

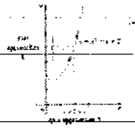
GIỚI HẠN VÀ SỰ LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ THỰC

1.6. Sự liên tục của hàm số một biến

Định nghĩa:

Cho hàm số y = f(x) xác định trong khoảng (a; b), $x_0 \in (a;b)$

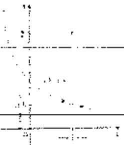
Hàm số f(x) được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$



$\lim\limits_{x\to 2}(x^2 - x + 2) = 4 = f(2)$

Hàm số $f(x) = x^2 - x + 2$ liên tục tại $x = 2$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{if } x \neq 1 \\ 2 & \text{if } x = 1 \end{cases}$$



$\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \frac{1}{2}$

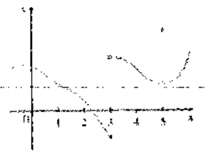
$g(1) = 2$

Hàm số g(x) không liên tục tại x = 1

Điểm gián đoạn

Ta nói f(x) gián đoạn tại x_0, hay x_0 là điểm gián đoạn của f(x), nếu f(x) không liên tục tại x_0.

Ví dụ: Chỉ ra những điểm gián đoạn của hàm số f(x) có đồ thị như hình vẽ sau



Liên tục một phía

Cho hàm số y = f(x) xác định trong khoảng (a; b), $x_0 \in (a;b)$

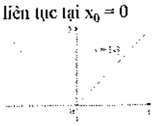
+ Ta nói hàm số f(x) liên tục phải tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

+ Ta nói hàm số f(x) liên tục trái tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Định lý **:** Hàm số f(x) được gọi là liên tục tại x_0 khi và chỉ khi f(x) liên tục phải tại x_0 và liên tục trái tại x_0

Ví dụ: Chứng minh rằng hàm số $y = |x|$ liên tục tại $x_0 = 0$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$



$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (-x) = 0$

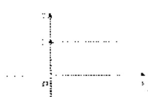
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$

Hàm số đã cho liên tục tại x = 0

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ 1 & \text{if } t \geq 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{t\to 0^-} H(t) = 0$ $\quad \lim\limits_{t\to 0^+} H(t) = 1$

Không tồn tại $\lim\limits_{t\to 0} H(t)$



H(t) không liên tục tại t = 0, hay H(t) gián đoạn tại t = 0

Sự liên tục trên một khoảng, đoạn

+ Hàm số y = f(x) được gọi là liên tục trên khoảng (a, b) nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc (a, b).

+ Hàm số y = f(x) được gọi là liên tục trên đoạn [a, b] nếu nó liên tục trên khoảng (a, b), liên tục phải tại a, liên tục trái tại b.

Các tính chất của hàm số liên tục:

Định lý 1: Nếu f(x) và g(x) thuộc C(a, b) thì

a) $f+g \in C(a,b)$, *b)* $f-g \in C(a,b)$,

c) $f.g \in C(a,b)$,

d) $\dfrac{f}{g} \in C(a,b)$, *loại trừ những điểm g(x) = 0.*

Trong đó C(a, b) là tập tất cả các hàm f(x) liên tục trong (a, b).

Định lý 2: Cho $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$.

Nếu f(x) liên tục tại $x_0 \in X$, *g(y) liên tục tại* $y_0 = f(x_0) \in Y$ *thì hàm hợp g.f liên tục tại* x_0

Định lý 3:

Nếu hàm f liên tục tại b và $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$ thì

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$$

Nói khác đi: $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim\limits_{x \to a} g(x))$

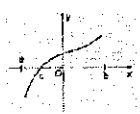
$$\lim_{x\to 1} \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right) = \arcsin\left(\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right) = \arcsin\left(\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}\right)$$

$$= \arcsin\left(\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)$$

$$= \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

__Định lý 4:__ Cho hàm số y = f(x) liên tục trên [a, b],

f(a).f(b) < 0. Khi đó $\exists c \in (a,b): f(c) = 0$

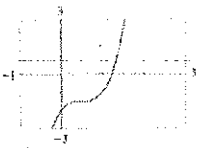


Chứng minh tồn tại nghiệm của phương trình $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ trong khoảng (1, 2)

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$$

$f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0$

$f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12 > 0$



1.7. Vô cùng bé, vô cùng lớn

+ Hàm số y = f(x) được gọi là một vô cùng bé (VCB) trong quá trình x dần đến x_0 nếu:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

+ Hàm số y = f(x) được gọi là một vô cùng lớn (VCL) trong quá trình x dần đến x_0 nếu:

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$$

(x_0 có thể hữu hạn hoặc vô hạn)

**** Phân loại các VCB***

Cho f(x) và g(x) là các VCB trong cùng một quá trình $x \to x_0$.

Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k$

+ Nếu k = 0 ta nói f(x) là VCB bậc cao hơn g(x)

Kí hiệu: $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$

+ Nếu $k \neq 0$ ta nói f(x) và g(x) là hai VCB cùng bậc

Kí hiệu: $f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0$

Đặc biệt nếu k = 1 thì ta nói f(x) và g(x) là hai VCB tương đương,

Kí hiệu: $f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0$

Định lý:

Nếu $f_1(x), g_1(x), f_2(x), g_2(x)$ *là những VCB khi* $x \to x_0$ *và*

$f_1(x) \sim f_2(x)$, $g_1(x) \sim g_2(x)$ *thì* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_2(x)}{g_2(x)}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sin 5x} = ?$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x} = 1$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{5x} = \lim_{x\to 0}\frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

($e^{3x} - 1 \sim 3x$, $x \to 0$ và $\sin 5x \sim 5x$, $x \to 0$)

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

BÀI GIẢNG HỌC PHẦN: GIẢI TÍCH

Chương 2: **ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ**

2.1 Đạo hàm và vi phân

Định nghĩa: *Cho hàm số f(x) xác định trong khoảng (a, b) và điểm $c \in (a, b)$.*
Nếu tồn tại giới hạn $\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = A$ (hữu hạn), thì A được gọi là đạo hàm của f(x) tại c, ký hiệu là f '(c). Khi đó ta nói f(x) khả vi tại c.

Nếu f(x) khả vi tại mọi $x \in (a, b)$ thì ta nói f(x) khả vi trong (a, b)

Ví dụ: Xét tính khả vi của hàm số $f(x) = x^2 + 3$ tại x = 1.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+3-4}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2 \Rightarrow f'(1) = 2$$

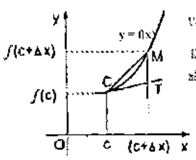
Hàm số đã cho khả vi tại x = 1

Ví dụ: Tìm đạo hàm của hàm số f(x) = x tại điểm x = c bất kỳ

$$f'(c) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to c}\frac{x-c}{x-c} = \lim_{x\to c} 1 = 1$$

$$f'(c) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$ Đặt $\Delta x = x - c$, ta có $$f'(c) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$$

Như vậy, đạo hàm tại x = c của hàm f(x) chính là giới hạn của tỉ số giữa số gia của hàm số tại điểm x = c (là hiệu $f(c+\Delta x) - f(c)$) với số gia của đối số tại x = c (là hiệu $(c+\Delta x) - (c)$, Δx có thể âm có thể dương, nhưng vì $x \neq c$ nên $\Delta x \neq 0$)



Về phương diện hình học, $\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$ chính là hệ số góc của cát tuyến CM với trục Ox. Khi điểm M tiến dọc theo đường cong y = f(x) tới điểm C thì cát tuyến CM dần tới tiếp tuyến CT, cũng có nghĩa là f'(c) = tgα chính là hệ số góc của tiếp tuyến của đường cong y = f(x) tại c

$$f'(c) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$$

Biểu diễn dưới dạng vô cùng bé, ta có

$$f(c+\Delta x) - f(c) = f'(c)\Delta x + o(\Delta x)$$

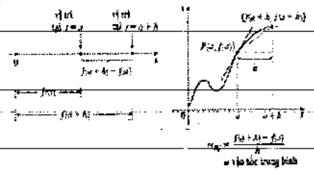
với $o(\Delta x)$ là vô cùng bé bậc cao hơn Δx khi $\Delta x \to 0$

Hay $f(x) - f(c) = f'(c)(x-c) + o(x-c)$

Từ hệ thức trên suy ra: nếu hàm số f(x) khả vi tại tại x = c thì f(x) liên tục tại x = c

Bài toán tìm vận tốc tức thời

Xét một chuyển động S = f(t)



Vận tốc (hay vận tốc tức thời) của chuyển động tại thời điểm t = a, $v(a)$, chính là giới hạn của vận tốc trung bình khi h dần về 0.

$$v(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Nghĩa là, vận tốc tức thời $v(a)$ bằng đạo hàm của f(t) tại t = a

Đạo hàm một phía, đạo hàm vô cùng

Đạo hàm trái của f(x) tại c, ký hiệu $f'_-(c)$, là $\lim\limits_{x\to c-0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ (nếu tồn tại).

Đạo hàm phải của f(x) tại c, ký hiệu $f'_+(c)$, là $\lim\limits_{x\to c+0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ (nếu tồn tại).

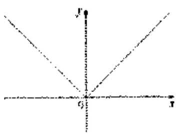
Nếu $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \pm\infty$ thì ta nói hàm f(x) có đạo hàm vô cùng tại x = c.

Khi đó, tiếp tuyến của f(x) tại điểm x = c sẽ vuông góc với trục Ox.

Hàm số f(x) khả vi tại x = c khi đạo hàm trái và đạo hàm phải tại c tồn tại và bằng nhau

Ví dụ: Xét tính khả vi của hàm số $f(x) = |x|$ tại x = 0

$$|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \ge 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$



$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x-0}{x-0} = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x-0}{x-0} = 1$$

Hàm số $f(x) = |x|$ không khả vi tại x = 0

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(-x) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$

Hàm số $f(x) = |x|$ liên tục tại x = 0

Vi phân

Nếu hàm f(x) khả vi tại x, ta có công thức $f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$.

Biểu thức $f'(x)\Delta x$ được gọi là vi phân của f(x) tại x, và ký hiệu là df.

Tức là $df = f'(x)\Delta x$

Đặc biệt, hàm y = x có $y'(x) = 1$ với mọi x, nên $df = dx = 1.\Delta x$, tức là $dx = \Delta x$

Do đó, người ta hay viết $df = f'(x)dx$ hoặc $f'(x) = \frac{df}{dx}$

Ví dụ: Tìm vi phân của hàm số $f(x) = x^2 + x$

Từ công thức $df = f'dx$

Ta cần tìm đạo hàm của hàm số f(x) tại điểm x = c bất kỳ.

$$f'(c) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to c}\frac{(x^2+x)-(c^2+c)}{x-c} = \lim_{x\to c}\frac{(x^2-c^2)+(x-c)}{x-c} = \lim_{x\to c}(x+c+1) = 2c+1$$

$$f'(x) = 2x+1 \Rightarrow df = (2x+1)dx$$

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

BÀI GIẢNG HỌC PHẦN: GIẢI TÍCH

Chương 2: **ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ**

2.2 Đạo hàm của các hàm số cơ bản

Áp dụng định nghĩa đạo hàm ta có thể tìm được công thức đạo hàm của một số hàm số sơ cấp cơ bản như sau:

Tìm đạo hàm của hàm số $f(x) = C$ tại $x = a$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{C - C}{x - a} = 0$$

$$\boxed{(C)' = 0}$$

Tìm đạo hàm của hàm số $f(x) = x^{\alpha}$ tại $x = c$

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{x^{\alpha} - c^{\alpha}}{x - c}$$

$$= c^{\alpha-1} \lim_{x \to c} \frac{\left(\frac{x}{c}\right)^{\alpha} - 1}{\frac{x}{c} - 1} = c^{\alpha-1} \lim_{x \to c} \frac{\left[1 + \left(\frac{x}{c} - 1\right)\right]^{\alpha} - 1}{\frac{x}{c} - 1} = c^{\alpha-1}\alpha$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\alpha} - 1}{x} = \alpha$$

Vậy $\boxed{(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}}$

$$(x^3)' = 3x^2 \qquad (x^{10})' = 10x^9 \qquad (\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Tìm đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin x$ tại $x = c$

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{\sin x - \sin c}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{2\cos\left(\frac{x+c}{2}\right).\sin\left(\frac{x-c}{2}\right)}{x - c}$$

$$= \lim_{x \to c} \left[\cos\left(\frac{x+c}{2}\right) \boxed{\frac{\sin\left(\frac{x-c}{2}\right)}{\frac{x-c}{2}}} \right] = (\cos c).\boxed{1} = \cos c$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

Tìm đạo hàm của hàm số $f(x) = \cos x$ tại $x = c$

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{\cos x - \cos c}{x - c}$$

$$= \lim_{x \to c} \frac{-2.\sin\left(\frac{x+c}{2}\right).\sin\left(\frac{x-c}{2}\right)}{x - c}$$

$$= \lim_{x \to c} \left[-\sin\left(\frac{x+c}{2}\right) \boxed{\frac{\sin\left(\frac{x-c}{2}\right)}{\frac{x-c}{2}}} \right]$$

$$= (-\sin c)\boxed{1} = -\sin c$$

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

Tìm đạo hàm của hàm số $f(x) = \tan x$ tại $x = c$

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{\tan x - \tan c}{x - c}$$

$$= \lim_{x \to c} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin c}{\cos c}}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{\frac{\sin x.\cos c - \cos x.\sin c}{\cos x.\cos c}}{x - c}$$

$$= \lim_{x \to c} \left[\boxed{\frac{\sin(x-c)}{x-c}} \frac{1}{\cos x.\cos c} \right] = \frac{1}{\cos^2 c}$$

$$\boxed{(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

Tìm đạo hàm của hàm số $f(x) = cotgx$ tại x = c

$$f'(c) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to c}\frac{cotgx - cotgc}{x-c}$$

$$= \lim_{x\to c}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\cos c}{\sin c}}{x-c} = \lim_{x\to c}\frac{\frac{\sin c.\cos x - \cos c.\sin x}{\sin x.\sin c}}{x-c}$$

$$= \lim_{x\to c}\left[-\boxed{\frac{\sin(x-c)}{x-c}}\,\frac{1}{\sin x.\sin c}\right] = -\frac{1}{\sin^2 c}$$

$$\boxed{(cotgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$$

Tìm đạo hàm của hàm số $f(x) = \arcsin x$ tại x = c

$$f'(c) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to c}\frac{\arcsin x - \arcsin c}{x-c}$$

$t = \arcsin x \to x = \sin t$

$m = \arcsin c \to c = \sin m$

$$f'(c) = \lim_{t\to m}\frac{t-m}{\sin t - \sin m} = \lim_{t\to m}\frac{t-m}{2\cos\frac{t+m}{2}\sin\frac{t-m}{2}} = \lim_{t\to m}\left(\frac{1}{\cos\frac{t+m}{2}}\boxed{\frac{\frac{t-m}{2}}{\sin\frac{t-m}{2}}}\right)$$

$$= \frac{1}{\cos m} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 m}} = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}$$

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Tìm đạo hàm của hàm số $f(x) = \arccos x$ tại x = c

$$f'(c) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to c}\frac{\arccos x - \arccos c}{x-c}$$

$t = \arccos x \to x = \cos t$

$m = \arccos c \to c = \cos m$

$$f'(c) = \lim_{t\to m}\frac{t-m}{\cos t - \cos m} = \lim_{t\to m}\frac{t-m}{-2\sin\frac{t+m}{2}\sin\frac{t-m}{2}} = \lim_{t\to m}\left(-\frac{1}{\sin\frac{t+m}{2}}\boxed{\frac{\frac{t-m}{2}}{\sin\frac{t-m}{2}}}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sin m} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 m}} = -\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}$$

$$\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Tìm đạo hàm của hàm số $f(x) = \arctan x$ tại x = c

$$f'(c) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to c}\frac{\arctan x - \arctan c}{x-c}$$

$t = \arctan x \to x = \tan t$

$m = \arctan c \to c = \tan m$

$$f'(c) = \lim_{t\to m}\frac{t-m}{\tan t - \tan m} = \lim_{t\to m}\frac{t-m}{\frac{\sin(t-m)}{\cos t.\cos m}} = \lim_{t\to m}\left[\boxed{\frac{t-m}{\sin(t-m)}}\cos t.\cos m\right]$$

$$= \cos^2 m = \frac{1}{1+\tan^2 m} = \frac{1}{1+c^2}$$

$$\boxed{(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}}$$

Tìm đạo hàm của hàm số $f(x) = arccotgx$ tại x = c

$$f'(c) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to c}\frac{arccotgx - arccotgc}{x-c}$$

$t = arccotgx \to x = cotgt$

$m = arccotgc \to c = cotgm$

$$f'(c) = \lim_{t\to m}\frac{t-m}{cotgt - cotgm} = \lim_{t\to m}\frac{t-m}{\frac{-\sin(t-m)}{\sin t.\sin m}} = \lim_{t\to m}\left[-\sin t.\sin m\boxed{\frac{t-m}{\sin(t-m)}}\right]$$

$$= -\sin^2 m = -\frac{1}{1+cotg^2 m} = -\frac{1}{1+c^2}$$

$$\boxed{(arccotgx)' = -\frac{1}{1+x^2}}$$

Tìm đạo hàm của hàm số $f(x) = a^x$, $a > 0, a \neq 1$ tại x = c

$$f'(c) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to c}\frac{a^x - a^c}{x-c}$$

$$= \lim_{x\to c}\frac{a^c\left(\frac{a^x}{a^c}-1\right)}{x-c} = a^c\boxed{\lim_{x\to c}\frac{a^{x-c}-1}{x-c}} \quad = a^c\ln a$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$$

$\boxed{(a^x)' = a^x\ln a}$ $\quad (2^x)' = 2^x\ln 2 \quad (5^x)' = 5^x\ln 5 \quad$ $\boxed{(e^x)' = e^x\ln e = e^x}$

Tìm đạo hàm của hàm số $f(x) = \log_a x\ (a > 0; a \neq 1)$ tại x = c

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{\log_a x - \log_a c}{x - c}$$

$$= \lim_{x \to c} \frac{\log_a\left(\frac{x}{c}\right)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{1}{c} \boxed{\frac{\log_a\left[1 + \left(\frac{x}{c} - 1\right)\right]}{\frac{x}{c} - 1}} = \frac{1}{c}\log_a e = \frac{1}{c\ln a}$$

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$$

$$(\log_2 x)' = \frac{1}{x\ln 2} \qquad (\log_5 x)' = \frac{1}{x\ln 5} \qquad \boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x\ln e} = \frac{1}{x}}$$

Bảng công thức đạo hàm cơ bản

• $y = C$	$y' = 0$	• $y = x^\alpha$	$y' = \alpha x^{\alpha - 1}$
• $y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	• $y = e^x$	$y' = e^x$
• $y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x\ln a}$	• $y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
• $y = \sin x$	$y' = \cos x$	• $y = \cos x$	$y' = -\sin x$
• $y = \text{tg}x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	• $y = \text{cotg}x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
• $y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	• $y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
• $y = \text{arctg}x$	$y' = \frac{1}{1 + x^2}$	• $y = \text{arccotg}x$	$y' = -\frac{1}{1 + x^2}$

Chương 2: **ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ**

2.3 Quy tắc tính đạo hàm

Định lý 1:

Cho *f(x)* và *g(x)* là các hàm khả vi tại *x ∈ (a, b)*, khi đó:

$$\left[f(x) + g(x)\right]' = f'(x) + g'(x)$$

$$\left[f(x).g(x)\right]' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x) \qquad (u.v)' = u'v + uv'$$

$$\left[C.g(x)\right]' = C.g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)} \quad (g(x) \neq 0) \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Ví dụ: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

$$f(x) = 3\sin x + x^3 \qquad g(x) = \left(2e^x + 5\right)\cos x \qquad h(x) = \frac{x^2 - 3x}{5^x - \tan x}$$

$$f'(x) = \left(3\sin x + x^3\right)' = \left(3\sin x\right)' + \left(x^3\right)' = 3\left(\sin x\right)' + 3x^2 = 3\cos x + 3x^2$$

$$\boxed{(u.v)' = u'v + uv'}$$

$$g'(x) = \left[\left(2e^x + 5\right)\cos x\right]' = \left(2e^x + 5\right)'\cos x + \left(2e^x + 5\right)\left(\cos x\right)' = 2e^x\cos x + \left(2e^x + 5\right)\left(-\sin x\right)$$

$$h'(x) = \left(\frac{x^2 - 3x}{5^x - \tan x}\right)' = \frac{\left(x^2 - 3x\right)'\left(5^x - \tan x\right) - \left(x^2 - 3x\right)\left(5^x - \tan x\right)'}{\left(5^x - \tan x\right)^2} \qquad \boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$$

$$= \frac{(2x - 3)\left(5^x - \tan x\right) - \left(x^2 - 3x\right)\left(5^x \ln 5 - \frac{1}{\cos^2 x}\right)}{\left(5^x - \tan x\right)^2}$$

Định lý 2: (đạo hàm của hàm hợp)

Giả sử hàm y = f(u) khả vi tại u_0, hàm u = g(x) khả vi tại u_0 = g(x_0).

Khi đó hàm hợp y = f[g(x)] khả vi tại x_0 và $y'(x_0) = f'_u(u_0).\ u'(x_0)$

Hay $y'_x = f'(u).u'_x$

Ví dụ: Tìm đạo hàm của hàm số y = h(x) = sin 2x tại x = 0

$$h'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} 2\frac{\sin 2x}{2x} = 2$$

Đặt u = 2x, khi đó y = sinu

Ta có $h'(x) = y' = \left(\cos u\right)u' = \left(\cos 2x\right).\left(2x\right)' = 2\cos 2x \Rightarrow h'(0) = 2$

Bảng công thức đạo hàm cơ bản

• $y = C$	$y' = 0$	• $y = x^{\alpha}$	$y' = \alpha x^{\alpha - 1}$
• $y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	• $y = e^x$	$y' = e^x$
• $y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$	• $y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
• $y = \sin x$	$y' = \cos x$	• $y = \cos x$	$y' = -\sin x$
• $y = tg x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	• $y = cotg x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
• $y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	• $y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
• $y = arctg x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	• $y = arccotg x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$

Bảng công thức đạo hàm hàm hợp

Giả sử $u = u(x)$

• $y = u^{\alpha}$	$y' = \alpha u^{\alpha - 1} u'(x)$		
• $y = a^u$	$y' = \ln a . a^u u'(x)$	• $y = e^u$	$y' = e^u u'(x)$
• $y = \log_a u$	$y' = \frac{u'(x)}{u \ln a}$	• $y = \ln u$	$y' = \frac{u'(x)}{u}$
• $y = \sin u$	$y' = \cos u . u'(x)$	• $y = \cos u$	$y' = -\sin u . u'(x)$
• $y = tg u$	$y' = \frac{u'(x)}{\cos^2 u}$	• $y = cotg u$	$y' = -\frac{u'(x)}{\sin^2 x}$
• $y = \arcsin u$	$y' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2}}$	• $y = \arccos u$	$y' = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2}}$
• $y = arctg u$	$y' = \frac{u'(x)}{1+u^2}$	• $y = arccotg u$	$y' = -\frac{u'(x)}{1+u^2}$

Ví dụ: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

$f(x) = \boxed{\sin^3 x} + \cos(2^x - x^2)$ $\qquad g(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

$h(x) = \sqrt[3]{x} e^{\arctan x}$ $\qquad y = x^x \quad x > 0$

$$f'(x) = \boxed{3\sin^2 x . \cos x} - \sin(2^x - x^2).(2^x \ln 2 - 2x)$$

$$g'(x) = \frac{\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)'}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1 + \boxed{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$h'(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)' e^{\arctan x} + \sqrt[3]{x} \boxed{\left(e^{\arctan x}\right)'} = \frac{1}{3} x^{-2/3} e^{\arctan x} + \sqrt[3]{x} \boxed{e^{\arctan x} . \frac{1}{1+x^2}}$$

$$y = x^x \Rightarrow \ln y = \ln x^x = x \ln x \Rightarrow \boxed{(\ln y)'} = (x \ln x)'$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + x . \frac{1}{x} = \ln x + 1 \Rightarrow y' = y.(\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1)$$

Định lý 3: (đạo hàm của hàm ngược)

Giả sử từ $y = f(x)$ giải ra được $x = g(y)$.

Khi đó nếu $f'(x_0) \neq 0$ thì $g(y)$ có đạo hàm (theo biến y) tại $y_0 = f(x_0)$

và $g'_y(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Ví dụ: Sử dụng công thức đạo hàm hàm ngược, tính đạo hàm của hàm $y = \arcsin x$

Xét $y = f(x) = \sin x$. khi đó $g(y) = \arcsin y$. Áp dụng định lý ta có

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Tức là $(\arcsin y)'_y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$. Thay y bởi x ta có $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Đạo hàm theo tham số

Giả sử $x = f(t)$, $y = g(t)$ là các hàm khả vi theo $t \in (\alpha, \beta)$ và $f'(t) \neq 0$.

Nếu tồn tại hàm ngược $t = f^{-1}(x)$ thì y là hàm của x.

Khi đó ta có thể lấy đạo hàm của y theo x: $\quad y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)dt}{f'(t)dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$

Ví dụ: Tìm $y'(x)$ với $x = a\cos t$ và $y = a\sin t$, với $t \in (0, \pi)$

Trên $(0, \pi)$ hàm $x = a\cos t$ là song ánh nên tồn tại $t^{-1}(x) = \arccos\frac{x}{a}$

do đó $\quad y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)dt}{x'(t)dt} = \frac{a.\cos t}{-a \sin t} = -cotg t$

Chương 2: **ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ**

2.4 Đạo hàm và vi phân cấp cao

Định nghĩa đạo hàm cấp cao:

Cho hàm số y = f(x) xác định và liên tục trên (a, b). Giả sử hàm số khả vi tại mọi x thuộc khoảng (a; b).

Nếu hàm đạo hàm f'(x) cũng khả vi thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp 2 của hàm số f(x), kí hiệu là f''(x)

Tổng quát: Cho hàm số y = f(x) xác định và liên tục trên (a, b).

Hàm số f(x) được gọi là khả vi n lần trong (a; b) nếu f(x) là hàm khả vi (n-1) lần trong (a; b) và hàm đạo hàm cấp (n-1) của f(x) cũng khả vi. Khi đó đạo hàm cấp n của hàm số f(x) được định nghĩa theo hệ thức $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$

<u>*Ví dụ 1:*</u> Cho hàm số $f(x) = (-x+2)^5$ Tính $f''(x)$

$$f(x) = (-x+2)^5 \Rightarrow f'(x) = 5(-x+2)^4(-1) = -5(-x+2)^4$$

$$\Rightarrow f''(x) = -5.4(-x+2)^3(-1) = 20(-x+2)^3$$

<u>*Ví dụ 2:*</u> Cho hàm số $f(x) = (x^2-2).e^{3x}$ Tính $f'''(0)$

$$f'(x) = (x^2-2)'.e^{3x} + (x^2-2).(e^{3x})' = 2x.e^{3x} + (x^2-2).3.e^{3x} = (3x^2+2x-6).e^{3x}$$

$$\Rightarrow f''(x) = [f'(x)]' = (3x^2+2x-6)'.e^{3x} + (3x^2+2x-6).(e^{3x})' = (6x+2).e^{3x} + (3x^2+2x-6).3e^{3x} = (9x^2+12x-16).e^{3x}$$

$$\Rightarrow f'''(x) = [f''(x)]' = (9x^2+12x-16)'.e^{3x} + (9x^2+12x-16).(e^{3x})' = (18x+12).e^{3x} + (9x^2+12x-16).3e^{3x} = (27x^2+54x-36).e^{3x}$$

$$f'''(0) = -36$$

<u>*Ví dụ 3:*</u> Chứng minh rằng hàm số $y = e^{4x} + 2e^{-x}$

thỏa mãn phương trình $y''' - 13y' - 12y = 0$

$$y = e^{4x} + 2e^{-x} \Rightarrow y' = 4e^{4x} - 2e^{-x}$$

$$\Rightarrow y'' = 16e^{4x} + 2e^{-x} \Rightarrow y''' = 64e^{4x} - 2e^{-x}$$

$$y''' - 13y' - 12y = (64e^{4x} - 2e^{-x}) - 13(4e^{4x} - 2e^{-x}) - 12(e^{4x} + 2e^{-x}) = 0$$

<u>*Ví dụ 4:*</u> Cho hàm số $f(x) = e^{2x}$ Tìm $f^{(n)}(x)$

$$\Rightarrow f'(x) = 2.e^{2x} \Rightarrow f''(x) = (2.e^{2x})' = 2.2.e^{2x} = 2^2.e^{2x}$$

$$\Rightarrow f'''(x) = (2^2.e^{2x})' = 2^2.2.e^{2x} = 2^3.e^{2x} \Rightarrow f^{(4)}(x) = (2^3.e^{2x})' = 2^3.2.e^{2x} = 2^4.e^{2x}$$

Dự đoán $f^{(n)}(x) = 2^n.e^{2x}$ (1)

+) Với n = 1: dễ thấy công thức đúng

+) Giả sử công thức đã đúng với n = k. Tức là $(e^{2x})^{(k)} = 2^k.e^{2x}$ (2)

+) Ta phải chứng minh công thức cũng đúng với n = k + 1

$$(e^{2x})^{(k+1)} = \left((e^{2x})^{(k)}\right)' \quad (3)$$

Thay (2) vào (3) $\Rightarrow (e^{2x})^{(k+1)} = (2^k.e^{2x})' = 2^k.2.e^{2x} = 2^{k+1}.e^{2x}$

Vậy công thức (1) đúng với n = k + 1 $\boxed{(e^{kx})^{(n)} = k^n.e^{kx}}$

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = \frac{1}{ax+b}$. tìm $y^{(n)}$

$$y = \frac{1}{ax+b} = (ax+b)^{-1}$$

$$y' = -a.(ax+b)^{-2} = \frac{-a}{(ax+b)^2}$$

$$y'' = -a.(-2).a(ax+b)^{-3} = \frac{(-1)(-2)a^2}{(ax+b)^3}$$

$$y''' = -a.(-2a)(-3a)(ax+b)^{-4} = \frac{(-1)(-2)(-3)a^3}{(ax+b)^4}$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!a^n}{(ax+b)^{n+1}} \rightarrow \boxed{\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!a^n}{(ax+b)^{n+1}}}$$

Một số công thức tính đạo hàm cấp n của các hàm số cơ bản thường gặp

$$y = e^{kx} \rightarrow y^{(n)} = k^n e^{kx}$$

$$y = x^{\alpha} \rightarrow \begin{cases} y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} & \forall n \le \alpha \\ y^{(n)} = 0 & \forall n > \alpha \end{cases}$$

$$y = \sin ax \rightarrow y^{(n)} = a^n \sin\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y = \cos bx \rightarrow y^{(n)} = b^n \cos\left(bx + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y = \frac{1}{ax+b} \rightarrow y^{(n)} = (-1)^n \frac{n!a^n}{(ax+b)^{n+1}}$$

$$y = \ln(ax+b) \rightarrow y^{(n)} = \left(\frac{a}{ax+b}\right)^{(n-1)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}$$

Ví dụ: Cho hàm số $f(x) = 2\sin x.\cos x$

Tính $f^{(15)}(0)$

$$f(x) = 2\sin x.\cos x = \sin 2x$$

$$\Rightarrow f^{(15)}(x) = (\sin 2x)^{(15)} = 2^{15}\sin\left(2x + \frac{15\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f^{(15)}(0) = 2^{15}\sin\left(\frac{15\pi}{2}\right) = -2^{15}$$

Quy tắc đạo hàm cấp cao

Giả sử f(x), g(x) là những hàm số có đạo hàm cấp n trong khoảng (a, b).

Khi đó với mọi x thuộc (a ; b) ta có:

$$[f(x)+g(x)]^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$$

$$[a.f(x)]^{(n)} = af^{(n)}(x), \quad a = const$$

$$[f(x).g(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x).g^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x).g^{(k)}(x)$$ (Công thức Lepnit)

$$f^{(0)} \equiv f; g^{(0)} \equiv g$$

Một số công thức tính đạo hàm cấp n của các hàm số cơ bản thường gặp

$$y = e^{kx} \rightarrow y^{(n)} = k^n e^{kx}$$

$$y = x^{\alpha} \rightarrow \begin{cases} y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} & \forall n \le \alpha \\ y^{(n)} = 0 & \forall n > \alpha \end{cases}$$

$$y = \sin ax \rightarrow y^{(n)} = a^n \sin\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y = \cos bx \rightarrow y^{(n)} = b^n \cos\left(bx + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y = \frac{1}{ax+b} \rightarrow y^{(n)} = (-1)^n \frac{n!a^n}{(ax+b)^{n+1}}$$

$$y = \ln(ax+b) \rightarrow y^{(n)} = \left(\frac{a}{ax+b}\right)^{(n-1)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}$$

Ví dụ: Cho hàm số $f(x) = 2x^3 + 1 - e^{4x}$, tính $f^{(20)}(0)$

$$f^{(20)}(x) = \left(2x^3 + 1 - e^{4x}\right)^{(20)} = \left(2x^3\right)^{(20)} + 1^{(20)} - \left(e^{4x}\right)^{(20)}$$

$$= 2.\left(x^3\right)^{(20)} + 1^{(20)} - \left(e^{4x}\right)^{(20)} = 2.0 + 0 - 4^{20}.e^{4x}$$

$$f^{(20)}(0) = -4^{20}.e^0 = -4^{20}$$

Ví dụ: Cho hàm số $f(x) = \frac{2x^2 - x + 4}{2x+1}$, tính $f^{(15)}(x)$

$$f(x) = \frac{2x^2 - x + 4}{2x+1} = \frac{x(2x+1) - (2x+1) + 5}{2x+1} = x - 1 + \frac{5}{2x+1}$$

$$f^{(15)}(x) = \left(x - 1 + \frac{5}{2x+1}\right)^{(15)} = (x-1)^{(15)} + \left(\frac{5}{2x+1}\right)^{(15)}$$

$$= 0 + 5.\frac{(-1)^{15}.15!.2^{15}}{(2x+1)^{16}} = -\frac{5.15!.2^{15}}{(2x+1)^{16}}$$

Ví dụ: Cho hàm số $y = x^2 e^{3x}$, tính $y^{(50)}$

$$\left[f(x).g(x)\right]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

$$y^{(50)} = \left(x^2 e^{3x}\right)^{(50)} = \sum_{k=0}^{50} C_{50}^k \left(x^2\right)^{(k)} \left(e^{3x}\right)^{(50-k)}$$

$$= C_{50}^0 \left(x^2\right)^{(0)} \left(e^{3x}\right)^{(50)} + C_{50}^1 \left(x^2\right)^{(1)} \left(e^{3x}\right)^{(49)} + C_{50}^2 \left(x^2\right)^{(2)} \left(e^{3x}\right)^{(48)}$$
$$+ C_{50}^3 \left(x^2\right)^{(3)} \left(e^{3x}\right)^{(47)} + \dots + C_{50}^{50} \left(x^2\right)^{(50)} \left(e^{3x}\right)^{(0)}$$

$$= C_{50}^0 x^2 .3^{50} e^{3x} + C_{50}^1 .2x.3^{49} e^{3x} + C_{50}^2 .2.3^{48} e^{3x}$$

Ví dụ: Cho hàm số $f(x) = \left(2x^3 + x + 1\right)\cos 2x$, tính $f^{(20)}(0)$

$$f^{(20)}(x) = \left[\left(2x^3 + x + 1\right)\cos 2x\right]^{(20)} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k \left(2x^3 + x + 1\right)^{(k)} (\cos 2x)^{(20-k)}$$

$$= C_{20}^0 \left(2x^3 + x + 1\right)^{(0)} \underline{(\cos 2x)^{(20)}} + C_{20}^1 \left(2x^3 + x + 1\right)^{(1)} (\cos 2x)^{(19)}$$
$$+ C_{20}^2 \left(2x^3 + x + 1\right)^{(2)} (\cos 2x)^{(18)} + C_{20}^3 \left(2x^3 + x + 1\right)^{(3)} (\cos 2x)^{(17)}$$
$$= C_{20}^0 \underline{\left(2x^3 + x + 1\right)}.\underline{2^{20}\cos\left(2x + \frac{20\pi}{2}\right)} + C_{20}^1 \underline{\left(6x^2 + 1\right)}.2^{19}\cos\left(2x + \frac{19\pi}{2}\right)$$
$$+ C_{20}^2 \underline{(12x)}.2^{18}\cos\left(2x + \frac{18\pi}{2}\right) + C_{20}^3 \underline{(12)}.2^{17}\cos\left(2x + \frac{17\pi}{2}\right)$$

$$f^{(20)}(0) = C_{20}^0 (1)\, 2^{20} \cos\left(\frac{20\pi}{2}\right) + C_{20}^1 (1).2^{19} \cos\left(\frac{19\pi}{2}\right) + C_{20}^3 (12).2^{17} \cos\left(\frac{17\pi}{2}\right) = 2^{20}$$

Vi phân cấp cao

Định nghĩa :

Cho hàm số y = f(x) khả vi đến cấp n trong khoảng (a, b).

Khi đó vi phân của vi phân cấp 1 của hàm số f(x) được gọi là vi phân cấp 2, ký hiệu:

$$d^2 f(x) = d\left(df(x)\right)$$

Một cách quy nạp ta có vi phân của vi phân cấp (n-1) được gọi là vi phân cấp n của hàm số f(x), ký hiệu

$$d^n f(x) = d\left(d^{n-1} f(x)\right)$$

Từ định nghĩa vi phân cấp 1 của hàm số ta dễ dàng quy nạp được công thức vi phân cấp n của hàm số như sau:

$$df(x) = f'(x)dx \qquad f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

$$d^2 f(x) = d\left(df(x)\right) = d\left(f'(x)dx\right)$$

$$= \left[f'(x)dx\right]' dx = f''(x)dx.dx = f''(x)(dx)^2$$

$$d^2 f(x) = f''(x)dx^2 \qquad f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n \qquad f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

Ví dụ: $f(x) = e^{2x} \Rightarrow d^n f = f^{(n)}(x)dx^n = 2^n e^{2x} dx^n$

Ví dụ : Cho hàm số $y = \ln(x^2 + 4x - 5)$, tìm $d^{15}y$

$$d^{15}y = y^{(15)}dx^{15}$$

$$y = \ln\left(x^2 + 4x - 5\right) = \ln\left[(x-1)(x+5)\right] = \ln(x-1) + \ln(x+5)$$

$$y^{(15)} = \left[\ln(x-1) + \ln(x+5)\right]^{(15)} = \frac{(-1)^{14}.14!}{(x-1)^{15}} + \frac{(-1)^{14}.14!}{(x+5)^{15}} = \frac{14!}{(x-1)^{15}} + \frac{14!}{(x+5)^{15}}$$

$$d^{15}y = \left[\frac{14!}{(x-1)^{15}} + \frac{14!}{(x+5)^{15}}\right]dx^{15}$$

Ví dụ: Cho hàm số $f(x) = 2x^3 + 1 - e^{4x}$, tính $d^{20} f(x)$

$$d^{20} f(x) = f^{(20)}(x)dx^{20}$$

$$f^{(20)}(x) = \left(2x^3 + 1 - e^{4x}\right)^{(20)} = \left(2x^3\right)^{(20)} + 1^{(20)} - \left(e^{4x}\right)^{(20)}$$

$$= 2.\left(x^3\right)^{(20)} + 1^{(20)} - \left(e^{4x}\right)^{(20)} = 2.0 + 0 - 4^{20}.e^{4x}$$

$$d^{20} f(x) = -4^{20} e^{4x} dx^{20}$$

Chú ý: + Vi phân cấp cao của hàm số không có tính chất bất biến.

+ Vi phân cấp 1 của hàm số f(x), $df = f'(x)dx$, có tính chất bất biến:

Giả sử x không phải là biến độc lập, tức là $x = g(t)$.

Khi đó nếu g(t) cũng là hàm khả vi theo t thì ta có:

$$df = f'(x)dx = f'_x g'(t)dt = f'(t)dt$$

$f(x) = x^2, \quad x = t^3$

$df = f'(x)dx = 2xdx = 2x.x'(t)dt = 2t^3.3t^2dt = 6t^5dt \qquad f = x^2 = (t^3)^2 = t^6 \Rightarrow df = f'(t)dt = 6t^5dt$

$$d^2f = f''(x)dx^2 = 2dx^2 = 2(x'(t)dt)^2 = 2(3t^2dt)^2 = 18t^4dt^2$$

$$\boxed{f = x^2 = (t^3)^2 = t^6 \Rightarrow d^2f = f''(t)dt^2 = 30t^4dt^2}$$

Đạo hàm cấp cao theo tham số

Giả sử $x = x(t)$, $y = y(t)$ là các hàm khả vi theo $t \in (\alpha, \beta)$ và $x'(t) \neq 0$

Nếu tồn tại hàm ngược $t = x^{-1}$ thì y là hàm của x.

Khi đó ta có thể lấy đạo hàm của y theo x.

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)dt}{x'(t)dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$y''(x) = \frac{d(y'(x))}{dx} = \frac{d\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)}{dx} = \frac{\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)' dt}{x'(t)dt} = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^3}$$

Ví dụ

Tính $y''(x)$ với $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, với $t \in (0, \pi)$

Trên $(0, \pi)$ hàm $x = a\cos t$ là song ánh nên tồn tại $t^{-1}(x) = \arccos\frac{x}{a}$

do đó $y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{a.\cos t}{-a.\sin t} = -\cot g t$

$$y''(x) = \frac{d(y'(x))}{dx} = \frac{d(-\cot g t)}{d(a\cos t)} = \frac{\frac{1}{\sin^2 t}dt}{-a\sin t dt} = -\frac{1}{a\sin^3 t}$$

$$y'''(x) = \frac{d(y''(x))}{dx} = \frac{d\left(-\frac{1}{a\sin^3 t}\right)}{d(a\cos t)} = \frac{\frac{3\cos t}{a\sin^4 t}dt}{-a\sin t dt} = -\frac{3\cos t}{a^2\sin^5 t}$$

Chương 2: **ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ**

2.5 Các định lý về giá trị trung bình

Định nghĩa cực đại, cực tiểu

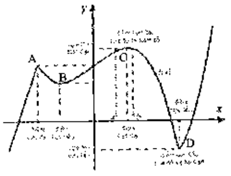
Cho hàm số f(x) xác định trên khoảng (a, b), $x_0 \in (a, b)$. Ta nói:

f(x) đạt cực tiểu tại x_0 nếu tồn tại lân cận của x_0 để trong đó $\boxed{f(x_0) \leq f(x)}$

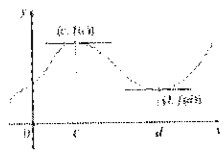
f(x) đạt cực đại tại x_0 nếu tồn tại lân cận của x_0 để trong đó $f(x_0) \geq f(x)$.

Cực đại, cực tiểu gọi chung là cực trị

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ $\boxed{\geq 0}$ ≤ 0



Định lý (Fermat): Nếu f(x) đạt cực trị tại x_0 và khả vi tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$



Chú ý:

(1) Điều ngược lại trong định lý có thể không đúng, tức là đạo hàm f' có thể bằng 0 tại điểm x_0 nhưng hàm số f không đạt cực trị tại điểm x_0.

Ví dụ: Cho hàm số $f(x) = x^3$

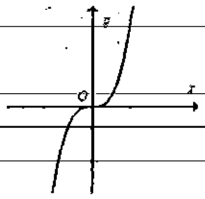
Ta có $f'(x) = 3x^2 \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Xét tại điểm x = 0: $\Delta f = (0 + \Delta x)^3 - 0^3 = (\Delta x)^3$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta f > 0 & \text{khi} \quad \Delta x > 0 \\ \Delta f < 0 & \text{khi} \quad \Delta x < 0 \end{cases}$$

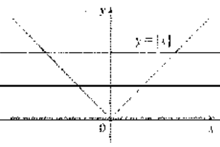
Ta thấy Δf đổi dấu trong lân cận của điểm x = 0

Vậy x = 0 không là điểm cực trị của hàm số đã cho.



(2) Hàm số có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm.

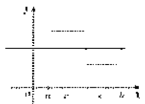
Hàm số $y = |x|$ không khả vi tại x = 0, nhưng đạt cực tiểu tại x = 0

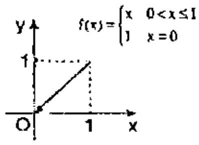


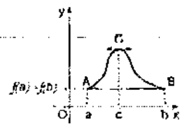
***Định lý* (Rolle):**

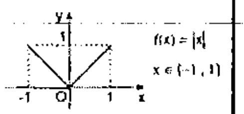
Giả sử f(x) $\boxed{\text{liên tục trên [a, b]}}$ và $\boxed{\text{khả vi trong (a, b)}}$

Nếu f(a) = f(b) thì $\exists c \in (a, b)$ sao cho f '(c) = 0









Ví dụ: Cho hàm số $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

Chứng minh rằng trong khoảng (1, 3) tồn tại nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$

Ta có: $f(1) = f(2) = f(3) = 0$

Hàm f(x) là hàm đa thức nên f(x) liên tục trên các đoạn [1, 2] và [2, 3], khả vi trong các khoảng (1, 2) và (2, 3)

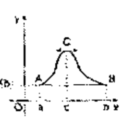
Theo định lý Rolle, tồn tại nghiệm $c_1 \in (1,2)$, $c_2 \in (2,3)$ của phương trình $f'(x) = 0$

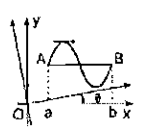
Tức là $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$

Áp dụng định lý Rolle cho hàm $f'(x)$ trên đoạn $[c_1, c_2]$, ta tìm được $c_3 \in (c_1, c_2) \subset (1,3)$ thỏa mãn $f''(c_3) = 0$

Tức là trong khoảng (1, 3) tồn tại nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$

***Định lý* (Rolle):**

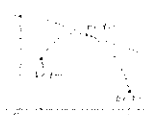


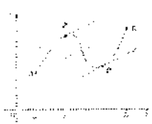


***Định lý* (Lagrange):**

Giả sử f(x) liên tục trong [a, b], khả vi trong (a, b), khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$





Ví dụ: Chứng minh rằng $\dfrac{b-a}{b} < \ln\dfrac{b}{a} < \dfrac{b-a}{a}$, $0 < a < b$

$$\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a} \overset{(b-a>0)}{\Leftrightarrow} \frac{b-a}{b} < \ln b - \ln a < \frac{b-a}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{a}$$

Xét hàm số $f(x) = \ln x$

Do f(x) thỏa mãn điều kiện của định lý Lagrange trên $[a;b]$ nên tồn tại $c \in (a;b)$ sao cho $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} = \dfrac{\ln b - \ln a}{b-a}$

Mà $f'(x) = \dfrac{1}{x} \quad \Rightarrow \dfrac{\ln b - \ln a}{b-a} = f'(c) = \dfrac{1}{c}$

$$0 < a < c < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{a}$$

Định lý (Cauchy):

Giả sử f(x), g(x) liên tục trên [a, b] và khả vi trong (a, b), $g(a) \neq g(b)$, $g'(x) \neq 0$ trong (a, b).

Khi đó $\exists\, c \in (a, b)$ sao cho $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

Nhận xét: Định lý Lagrange là trường hợp đặc biệt của định lý Cauchy khi chọn hàm $g(x) = x$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Định lý Rolle là trường hợp đặc biệt của định lý Lagrange khi chọn điều kiện $f(a) = f(b)$

$$f'(c) = 0$$

Chương 2: **ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ**

2.6 Công thức Taylor, Macloranh

Bài toán:

Giả sử f(x) liên tục trong [a, b], khả vi đến cấp n + 1 trong khoảng mở (a, b), và điểm $c \in (a, b)$.

Tìm đa thức $P_n(x)$ bậc không quá n sao cho $f^{(m)}(c) = P_n^{(m)}(c)$ $\forall m = 0, 1, \ldots, n$.

Ta tìm dưới dạng $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-c)^k = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots + a_n(x-c)^n$

$$f^{(0)}(c) = f(c);\quad P_n^{(0)}(c) = a_0 \Rightarrow a_0 = f(c)$$

$$f'(c) = P_n'(c) \Rightarrow f'(c) = \left[a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \ldots + n a_n (x-c)^{n-1}\right]_{x=c} = a_1 \Rightarrow a_1 = f'(c)$$

$$f''(c) = P_n''(c)$$

$$\Rightarrow f''(c) = \left[2a_2 + 3.2\, a_3(x-c) + 4.3\, a_4(x-c)^2 + \ldots + n(n-1)a_n(x-c)^{n-2}\right]_{x=c} = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f''(c)}{2}$$

$$f'''(c) = P_n'''(c)$$

$$\Rightarrow f'''(c) = \left[3.2\, a_3 + 4.3.2\, a_4(x-c) + \ldots + n(n-1)(n-2)a_n(x-c)^{n-3}\right]_{x=c} = 3.2\, a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{f'''(c)}{3.2}$$

$$\ldots \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

$$P_n(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

Đặt $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$

Sử dụng giả thiết và áp dụng định lý Cauchy (n + 1) lần, ta thu được

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

Vậy $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$ với θ nằm giữa x và c

Công thức này được gọi là công thức Taylor

Định lý :

Cho hàm số y = f(x) liên tục trên [a, b], khả vi đến cấp (n + 1) trong khoảng (a, b). Khi đó với mọi $c \in (a, b)$, ta có:

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \boxed{\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-c)^k + \boxed{o\left((x-c)^n\right)} \qquad \text{với } \theta \text{ nằm giữa } x \text{ và } c$$

(Công thức Taylor)

Tại c = 0 ta có công thức Macloranh

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n)$$

<u>Ví dụ:</u>

Cho hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$. Khai triển Taylor hàm số trên tại $x_0 = 2$

$$f(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \frac{f^{(4)}(2)}{4!}(x-2)^4 + \ldots$$

$$f(2) = 11$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 3 \Rightarrow f'(2) = 7$$

$$f''(x) = 6x - 4 \Rightarrow f''(2) = 8$$

$$f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(2) = 6$$

$$f(x) = 11 + \frac{7}{1!}(x-2) + \frac{8}{2!}(x-2)^2 + \frac{6}{3!}(x-2)^3 = 11 + 7(x-2) + 4(x-2)^2 + (x-2)^3$$

Ví dụ: Viết công thức khai triển Macloranh của hàm số

$$f(x)=(1+x)^{\alpha},\quad \alpha\in R,\alpha\neq 0$$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

$f(x)=(1+x)^{\alpha}\Rightarrow f(0)=1$ $\qquad$ $f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}\Rightarrow f''(0)=\alpha(\alpha-1)$

$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}\Rightarrow f'(0)=\alpha$ $\qquad$ $f'''(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}\Rightarrow f'''(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$

...

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}\Rightarrow f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)$$

$$f(x)=\boxed{(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)}$$

$$(1-x)^{\alpha}=1-\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2-\dots+(-1)^n\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

Một số khai triển Macloranh của các hàm số thường gặp

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha x}{1!}+\frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!}+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\dots+(-1)^n x^n+o(x^n)\qquad \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\dots+x^n+o(x^n)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)\qquad e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})\qquad \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$$

Ví dụ : Tìm hệ số của x^3 trong khai triển Macloranh của hàm số $f(x)=e^{2x}\sin 3x$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

Hệ số của x^3 trong khai triển Macloranh của hàm số $f(x)$ là: $\dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}$

$$f(x)=e^{2x}.\sin 3x$$

$$\Rightarrow f^{(3)}(x)=C_3^0e^{2x}.3^3\left(\sin 3x+\frac{3\pi}{2}\right)+C_3^1.2e^{2x}.3^2\left(\sin 3x+\frac{2\pi}{2}\right)$$

$$+C_3^2 2^2.e^{2x}.3\left(\sin 3x+\frac{\pi}{2}\right)+C_3^3 2^3.e^{2x}\sin 3x$$

$$\Rightarrow f^{(3)}(0)=3^3(-1)+0+3.2^2.3+0=9$$

Vậy hệ số của x^3 trong khai triển Macloranh của hàm số là: $\dfrac{9}{3!}=\dfrac{3}{2}$

Chương 2: **ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ**

2.7. Ứng dụng của đạo hàm

Quy tắc L'Hôpital (Lôpitan)

Định lý: Giả sử hai hàm số f(x) và g(x) xác định, khả vi trong lân cận $x=x_0$, có thể trừ tại $x=x_0$, đồng thời $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=L$ (hữu hạn hoặc vô hạn) thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$

Chú ý: x_0 có thể hữu hạn hoặc vô hạn

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{\exists \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}}{\underset{\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty}}{=\!=\!=\!=\!=}}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ví dụ: Tính các giới hạn sau:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{2x-2}\qquad \left(\frac{0}{0}\right)\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{e^{3x}-1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-3x+2)'}{(2x-2)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x-3}{2}=-\frac{1}{2}\qquad \Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{2x-2}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{2x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)(x-1)}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 2x)'}{(e^{3x}-1)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{3e^{3x}}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{x}}{\frac{e^{3x}-1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\frac{\sin 2x}{2x}}{3\frac{e^{3x}-1}{3x}}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-3}{2x^2-3x+1}\qquad\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-3}{2x^2-3x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x-3)'}{(2x^2-3x+1)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+2)}{(4x-3)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+2)'}{(4x-3)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-3}{2x^2-3x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}1+2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}2-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}=\frac{1+2.0-0}{2-3.0+0}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 2}(x^2-4)\tan\frac{\pi x}{4}\qquad(0.\infty)$$

$$\lim_{x\to 2}(x^2-4)\tan\frac{\pi x}{4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)}{\cot an\frac{\pi x}{4}}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)'}{\left(\cot an\frac{\pi x}{4}\right)'}=\lim_{x\to 2}\frac{2x}{\frac{-1}{\sin^2\frac{\pi x}{4}}.\frac{\pi}{4}}=\frac{-16}{\pi}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{tgx}}\qquad(1^\infty)$$

$$A=\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{tgx}}\Rightarrow \ln A=\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{tgx}}\right]$$

$$\Rightarrow \ln A=\lim_{x\to 0}\left[\ln(1+\sin x)^{\frac{1}{tgx}}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{tgx}\ln(1+\sin x)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{tgx}$$

$$\ln A=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{1+\sin x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}=1$$

$$\Rightarrow A=e^1$$

Ví dụ: Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{2x}=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(2x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{2}$ không tồn tại, nên không áp dụng quy tắc Lôpitan cho giới hạn trên được.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{2x}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sin x}{x}\right]=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}$$

$$0\le\left|\frac{\sin x}{x}\right|\le\frac{1}{|x|}\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

Ví dụ: Tính $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{\sin x}$

Cách 1: Áp dụng quy tắc Lôpitan

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos\sqrt{x})'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos x}.\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\cos\sqrt{x}=\frac{1}{2}$$

Cách 2: Áp dụng công thức $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\qquad\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}=\frac{a^2}{2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$$

Ví dụ: Tính $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{\sin x}$

Cách 3: Áp dụng vô cùng bé tương đương

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\Rightarrow\sin x\sim x\quad(x\to 0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{2}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{\frac{1}{2}x}=1\Rightarrow(1-\cos\sqrt{x})\sim\frac{1}{2}x\quad(x\to 0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Cách 4: Sử dụng khai triển hữu hạn $\quad\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\qquad\Rightarrow\cos\sqrt{x}=1-\frac{(\sqrt{x})^2}{2!}+\frac{(\sqrt{x})^4}{4!}-\ldots=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4!}-\ldots$$

Chọn: $\sin x=x-o(x)$ và $\cos\sqrt{x}=1-\frac{x}{2}+o(x)$

Do đó: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}-o(x)}{x+o(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}-\frac{o(x)}{x}}{1+\frac{o(x)}{x}}=\frac{1}{2}$

Ứng dụng đạo hàm trong bài toán tìm cực trị của hàm số f(x)

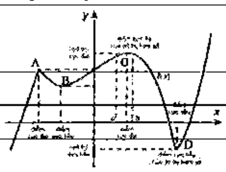
Định nghĩa

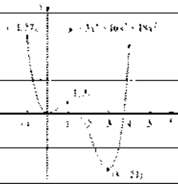
Cho hàm số f(x) xác định trên khoảng (a, b), $x_0 \in (a, b)$. Ta nói:

f(x) đạt cực tiểu tại x_0 nếu tồn tại lân cận của x_0 để trong đó $f(x_0) \le f(x)$.

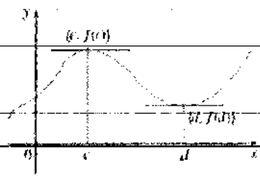
f(x) đạt cực đại tại x_0 nếu tồn tại lân cận của x_0 để trong đó $f(x_0) \ge f(x)$.

Cực đại, cực tiểu gọi chung là cực trị





Định lý (Fermat): Nếu f(x) đạt cực trị tại x_0 và khả vi tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$



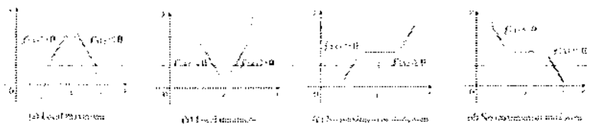
Định lý

Giả sử f(x) liên tục trên [a, b] và khả vi trong (a, b) (có thể trừ một số hữu hạn điểm) và $x_0 \in (a, b)$. Khi x biến thiên từ bên trái sang bên phải điểm x_0 mà đạo hàm f'(x):

*) đổi dấu từ + sang – thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0

*) đổi dấu từ – sang + thì hàm số đạt cực đại tại x_0

*) không đổi dấu thì hàm số không đạt cực trị tại x_0

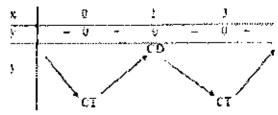


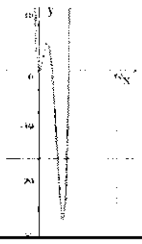
Ví dụ: Tìm cực trị của hàm số $y = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$

Tập xác định của hàm số: $D = R$

$$y' = 12x^3 - 48x^2 + 36x = 12x\left(x^2 - 4x + 3\right) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1, x = 3$$

Bảng xét dấu của y':





Vậy hàm số đạt cực đại tại x = 1, $y_{CĐ} = y(1) = 5$

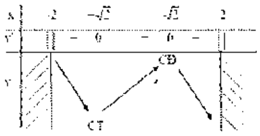
Hàm số đạt cực tiểu tại x = 0 và x = 3.

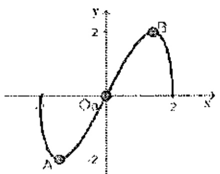
hai điểm cực tiểu là (0, 0) và (3, -27)

Ví dụ: Tìm cực trị của hàm số $y = x\sqrt{4 - x^2}$

$D = [-2; 2]$

$$y' = \sqrt{4 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{2(2 - x^2)}{\sqrt{4 - x^2}} \qquad y' = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\sqrt{2}; x_2 = \sqrt{2}$$





Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -\sqrt{2}$, $y_{CT} = y(-\sqrt{2}) = -2$

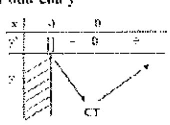
Hàm số đạt cực đại tại $x = \sqrt{2}$ $y_{CĐ} = y(\sqrt{2}) = 2$

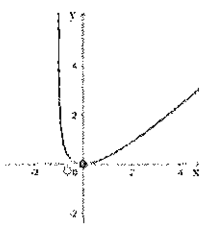
Ví dụ: Tìm cực trị của hàm số $y = x - ln(1 + x)$

Tập xác định của hàm số: $D = (-1; +\infty)$

$$y' = 1 - \frac{1}{1 + x} = \frac{x}{1 + x} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Bảng xét dấu của y'





Vậy hàm số đạt cực tiểu tại x = 0, $y_{CT} = y(0) = 0$

Định lý

Giả sử f(x) khả vi đến cấp n tại lân cận điểm x_0 và

$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ f^{(n)}(x_0) \neq 0$

Khi đó,

*) nếu n chẵn thì f(x) đạt cực trị tại x_0,

Cụ thể: + f(x) đạt cực đại tại x_0 khi $f^{(n)}(x_0) < 0$,

+ f(x) đạt cực tiểu tại x_0 khi $f^{(n)}(x_0) > 0$,

*) nếu n lẻ thì f(x) không đạt cực trị tại x_0.

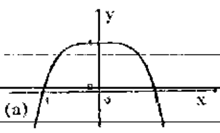
Ví dụ : Hàm nào sau đây đạt cực trị tại x = 0:

$a)\ f(x) = 1 - x^4$ $\quad b)\ g(x) = 1 + x^5$ $\quad c)\ h(x) = x^2 \cos x$

$a)\quad f'(x) = -4x^3;\ f''(x) = -12x^2;\ f^{(3)}(x) = -24x;\ f^{(4)}(x) = -24$

$f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = 0;\quad f^{(4)}(0) = -24 < 0$

Do vậy hàm số f(x) đạt cực đại tại x = 0, $f_{CĐ} = f(0) = 1$



(a)

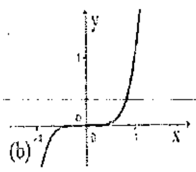
Ví dụ : Hàm nào sau đây đạt cực trị tại x = 0:

$a)\ f(x) = 1 - x^4$ $\quad b)\ g(x) = 1 + x^5$ $\quad c)\ h(x) = x^2 \cos x$

$b)\quad g'(x) = 5x^4;\ g''(x) = 20x^3;\ g^{(3)}(x) = 60x^2;\ g^{(4)}(x) = 120x;\ g^{(5)}(x) = 120$

$g'(0) = g''(0) = g^{(3)}(0) = g^{(4)}(0) = 0;\quad g^{(5)}(0) = 120 \neq 0$

Do vậy hàm số không đạt cực trị tại x = 0



(b)

Ví dụ : Hàm nào sau đây đạt cực trị tại x = 0:

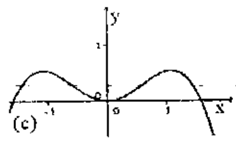
$a)\ f(x) = 1 - x^4$ $\quad b)\ g(x) = 1 + x^5$ $\quad c)\ h(x) = x^2 \cos x$

$c)\quad h'(x) = 2x\cos x + x^2(-\sin x)$

$h''(x) = 2\cos x + 2x(-\sin x) + 2x(-\sin x) + x^2(-\cos x)$

$h'(0) = 0;\quad h''(0) = 2 > 0$

Do vậy hàm số đạt cực tiểu tại x = 0, $h_{CT} = h(0) = 0$



(c)

Bài toán tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số f(x) xác định, liên tục trên đoạn [a; b]

Định nghĩa: Cho hàm số f(x) xác định trên D

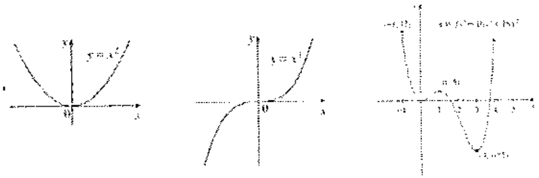
Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số y = f(x) trên D nếu: f(x) ≤ M, ∀x ∈ D

và $\exists x_0 \in D : f(x_0) = M$ Kí hiệu $M = \underset{D}{Max}\, f(x)$

Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số y = f(x) trên D nếu: f(x) ≥ m, ∀x ∈ D

và $\exists x_0 \in D : f(x_0) = m$ Kí hiệu $m = \underset{D}{Min}\, f(x)$

Ví dụ



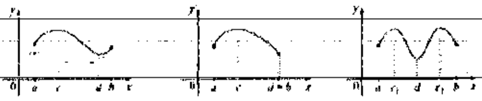
Hàm số $y = x^2$ không có giá trị lớn nhất và đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0 tại x = 0.

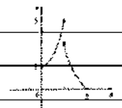
Hàm số $y = x^3$ không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

Hàm số $y = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 \quad x \in [-1; 4]$

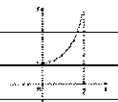
có giá trị lớn nhất bằng 37, đạt tại x = −1, có giá trị nhỏ nhất bằng − 27, đạt tại x = 3.

Định lý: Hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a; b] thì đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn [a; b]





Hàm số gián đoạn tại x = 1



Hàm số không liên tục phải tại x = 0 và không liên tục trái tại x = 2

Nhận xét: Khi f(x) liên tục trên đoạn [a; b] thì giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đạt tại hoặc vị trí các điểm cực trị nằm trong [a; b] hoặc đạt tại vị trí các điểm mút x = a, x = b.

Các bước giải bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn [a, b]

- Giải phương trình $f'(x) = 0$ tìm các điểm tới hạn x_i
- Tính giá trị của hàm số tại các điểm tới hạn thuộc đoạn [a, b] và $f(a), f(b)$
- Kết luận

Ví dụ: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$$

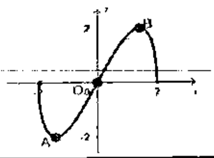
Miền xác định của hàm số là: D = [−2; 2]   Dễ thấy f(x) liên tục trên [-2; 2]

$$f'(x) = \sqrt{4 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{2(2 - x^2)}{\sqrt{4 - x^2}} \qquad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -\sqrt{2} \in D \\ x_2 = \sqrt{2} \in D \end{array}\right.$$

$$f(-\sqrt{2}) = -2;\ f(\sqrt{2}) = 2 \qquad f(-2) = 0;\ f(2) = 0$$

$$\underset{D}{Max} f(x) = 2 \text{ khi } x = \sqrt{2}$$

$$\underset{D}{Min} f(x) = -2 \text{ khi } x = -\sqrt{2}$$



Khảo sát hàm số

Hàm số trong tọa độ Descartes

Để khảo sát hàm số, ta thực hiện theo các bước sau đây:

+) Tìm miền xác định, nhận xét về tính chẵn, lẻ hoặc tuần hoàn của hàm số (nếu có)

+) Chiều biến thiên: tìm khoảng tăng, giảm của hàm số bằng cách xét dấu của f'(x), tìm cực trị của hàm số.

+) Xét tính lồi, lõm, điểm uốn, tìm tiệm cận (nếu có).

+) Lập bảng biến thiên của hàm số

+) Vẽ đồ thị hàm số

Ví dụ

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số: $y = \frac{2 - x^2}{1 + x^4}$

Hàm số $y = \frac{2 - x^2}{1 + x^4}$ xác định với mọi giá trị của x và là một hàm số chẵn, đồ thị của y nhận trục tung là trục đối xứng, do vậy ta chỉ cần khảo sát hàm số trong khoảng $[0, +\infty)$.

Xét sự biến thiên của hàm số

$$y' = \frac{-2x(1 + x^4) - 4x^3(2 - x^2)}{(1 + x^4)^2} = \frac{2x(x^4 - 4x^2 - 1)}{(1 + x^4)^2} = \frac{2x\left(x - \sqrt{2 - \sqrt{5}}\right)\left(x + \sqrt{2 - \sqrt{5}}\right)\left(x^2 - \sqrt{5} - 2\right)}{(1 + x^4)^2}$$

Bảng xét dấu của y'

x	0		$\sqrt{2 - \sqrt{5}}$		$+\infty$
y'	0	−	0	+	

Hàm số f(x) đồng biến trên khoảng $\left(-\sqrt{2 + \sqrt{5}}, 0\right) \cup \left(\sqrt{2 + \sqrt{5}}, +\infty\right)$,

và nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty, -\sqrt{2 + \sqrt{5}}\right) \cup \left(0, \sqrt{2 - \sqrt{5}}\right)$.

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CĐ} = y(0) = 2$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -\sqrt{2 - \sqrt{5}}$, $y\left(\pm\sqrt{2 - \sqrt{5}}\right) = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$

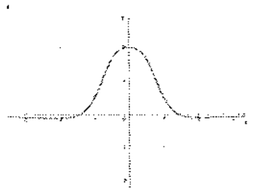
$$y = \frac{2 - x^2}{1 + x^4}$$

Ta có: $\lim\limits_{x \to \infty} y = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2 - x^2}{1 + x^4} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{2}{x^4} - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^4} + 1} = 0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là trục hoành.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2 + \sqrt{5}}$		0		$\sqrt{2 + \sqrt{5}}$		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	0	+	
y	0	↘	$1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$	↗	2	↘	$1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$	↗	0

Đồ thị:



Đồ thị hàm số đối xứng qua trục Oy và cắt trục Ox tại hai điểm $\left(\pm\sqrt{2}, 0\right)$

Đường cong cho dưới dạng phương trình tham số:

Cho phương trình $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$, $t \in (\alpha, \beta)$ (*)

Với mỗi $t \in (\alpha, \beta)$, hệ pt (*) cho nghiệm (x, y).

Khi t biến thiên từ α đến β, lập các điểm M(x, y) vẽ lên một đường cong *C* trong Oxy.

Ta xem *C* là đồ thị của một quan hệ hàm số giữa x với y, và gọi (*) là phương trình tham số của đường cong *C*.

Ví dụ

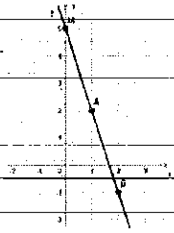
Phương trình tham số của đường thẳng đi qua 2 điểm A(1, 2) và B(2, -1) là

$\begin{cases} x = 1 + 1t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$ $t \in R$

$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A(1,2)$

$t = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow M(0,5)$

$t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow B(2,-1)$



Ví dụ

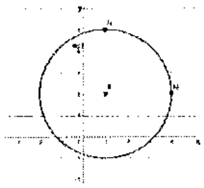
Phương trình tham số của đường tròn tâm A(1, 2), bán kính R = 3

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$

$\begin{cases} x - 1 = 3\cos t \\ y - 2 = 3\sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ $\begin{cases} x = 1 + 3\cos t \\ y = 2 + 3\sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$

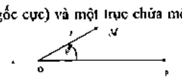
$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow M(4,2)$

$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow N(1,5)$



Đường cong trong hệ tọa độ cực

Hệ toạ độ cực gồm một điểm cố định O (gốc cực) và một trục chứa một véc tơ đơn vị (trục cực).



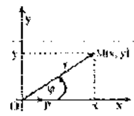
Với mỗi điểm M trong mặt phẳng, tọa độ của điểm M là: $M(r; \varphi)$ $\varphi = (\overline{OP}, \overline{OM}), r = |\overline{OM}|$

Xét hệ tọa độ Đề các Oxy, ta thiết lập hệ tọa độ cực với gốc cực trùng với gốc tọa độ O, trục cực trùng với trục Ox (như hình vẽ)

Ta có các mối liên hệ sau:

$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, 0 \le \varphi \le 2\pi, r \ge 0$ (*)

Công thức (*) xác định duy nhất (x, y) khi biết (r, φ).



Phương trình đường cong trong hệ tọa độ cực

Thay $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ vào phương trình đường cong trong tọa độ Đề các ta được phương trình đường cong trong tọa độ cực có dạng $r = r(\varphi)$

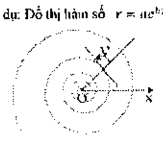
Ví dụ: Phương trình đường tròn $x^2 + y^2 = 3^2$ trong tọa độ cực là:

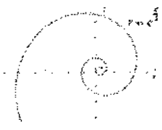
$(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = 3^2 \Leftrightarrow r = 3$

Ví dụ: Phương trình đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ trong tọa độ cực là:

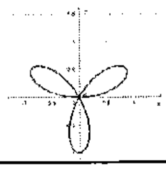
$(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = 2r\cos\varphi \Leftrightarrow r = 2\cos\varphi$

Ví dụ: Đồ thị hàm số $r = ae^{b\varphi}, a > 0, b > 0.$

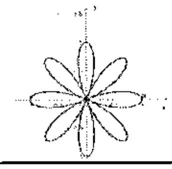




Đồ thị hàm số r = sin3φ



Đồ thị hàm số r = cos4φ



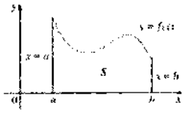
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

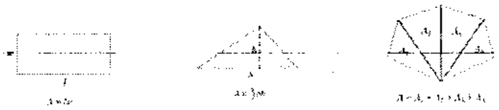
BÀI GIẢNG HỌC PHẦN: GIẢI TÍCH

Chương 3 TÍCH PHÂN HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ THỰC

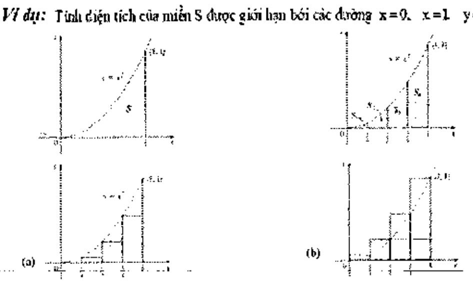
3.1 Bài toán tính diện tích

Giả sử cần tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đường cong $y = f(x)$ $(f(x) \geq 0)$, $x = a$, $x = b$, và trục Ox.



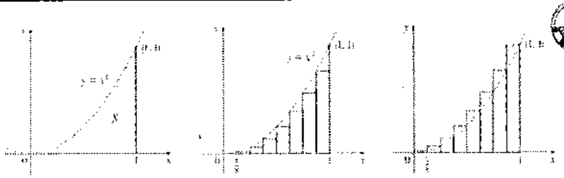


Ví dụ: Tính diện tích của miền S được giới hạn bởi các đường $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = x^2$



$L_4 = \frac{1}{4}\cdot 0^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{32} = 0.21875$ $\quad R_4 = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot 1^2 = \frac{15}{32} = 0.46875$

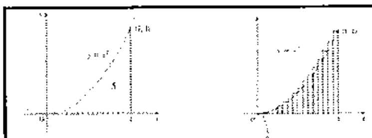
$0.21875 < A < 0.46875$



$0.2734375 < A < 0.3984375$

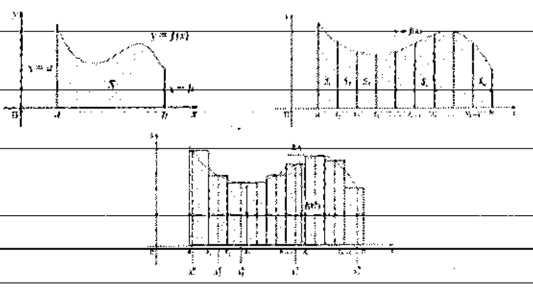
n	L_n	R_n
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
30	0.3168519	0.3501852
50	0.3234000	0.3434000
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3328335	0.3338335

$\lim_{n\to\infty} R_n = \frac{1}{3}$



$$R_n = \boxed{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$
$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$
$$= \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$
$$R_n = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2 = \frac{1}{3}$$



$$A = \lim_{n\to\infty} [f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x]$$

3.2. Định nghĩa tích phân xác định

Cho hs f(x) xác định, liên tục trên đoạn [a, b]. Chia [a, b] thành n đoạn bằng nhau có độ dài $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ bởi các điểm chia $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

Trên mỗi đoạn thứ i, $[x_{i-1}, x_i]$ lấy một điểm x_i^*, lập tổng $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$

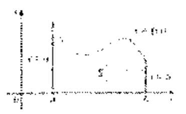
Nếu $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$

(không phụ thuộc cách chia [a, b], cách chọn điểm x_i^*) thì giới hạn đó được gọi là tích phân xác định của f(x) trên đoạn [a, b], ký hiệu là $\int_a^b f(x)dx$

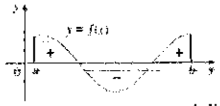
Khi đó ta nói rằng, hàm f(x) khả tích trên [a, b]

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$



$$A_1 = \int_a^b f(x)dx$$



$$\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2$$

A_1 là diện tích phần phía trên trục Ox của đồ thị hàm số f(x),

A_2 là diện tích phần phía dưới trục Ox của đồ thị hàm số f(x).

Định lý 1. Nếu f(x) liên tục trên [a, b] (có thể gián đoạn tại hữu hạn điểm) thì f(x) khả tích trên [a, b]. Tức là tồn tại $\int_a^b f(x)dx$

Định lý 2. Nếu f(x) khả tích trên đoạn [a, b] thì $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$

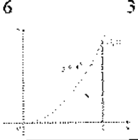
trong đó $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ và $x_i = a + i\Delta x$

Ví dụ: Tính $\int_0^1 \boxed{x^2} dx$

Ta chia đoạn [0, 1] thành n phần bằng nhau bởi các điểm chia $\boxed{x_k = \frac{k}{n}}$, k = 1..n, và trên mỗi đoạn $[x_{k-1}, x_k]$, lấy $x_k' = x_k$. Khi đó

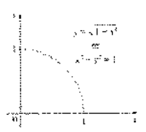
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \boxed{f(x_k)}\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \boxed{\left(\frac{k}{n}\right)^2} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3}$$

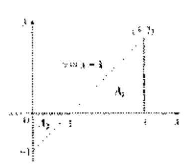
Vậy $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$



Ví dụ: Tính $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ $\qquad J = \int_0^3 (x-1)\,dx$

Tích phân I chính là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{1-x^2}$, x = 0, x = 1 và trục Ox





$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi.1^2 = \frac{\pi}{4}$$

$$J = \int_0^3 (x-1)dx = A_1 - A_2 = \frac{1}{2}(2.2) - \frac{1}{2}(1.1) = \frac{3}{2}$$

Một số tính chất cơ bản của tích phân xác định:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i \qquad \Delta x_i = \frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx, \quad \forall k \in R$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \qquad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Nếu $f(x) \ge 0$ $\forall x \in [a, b]$, thì $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

Nếu $f(x) \ge g(x)$ $\forall x \in [a, b]$, thì $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$

Nếu $m \le f(x) \le M$ $\forall x \in [a, b]$, thì $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

3.3 Định lý cơ bản của tích phân xác định

Nếu hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a, b], thì:

(1) Đặt $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ $\forall x \in [a, b]$, ta có $g'(x) = f(x)$

$$\boxed{\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)}$$

(2) $\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b}$

trong đó F(x) là nguyên hàm của f(x), là hàm thỏa mãn: $F'(x) = f(x)$

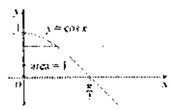
Ví dụ 1: Tìm đạo hàm của hàm số $g(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}dt$

Do hàm $\sqrt{1+t^2}$ là hàm số liên tục với mọi t, nên $g'(x) = \left(\int_0^x \sqrt{1+t^2}dt\right)' = \sqrt{1+x^2}$

Ví dụ 2: Tìm $\boxed{\int_0^{\pi/2} \cos x dx}$

Do $(\sin x)' = \cos x$, nên $\sin x$ là một nguyên hàm của $\cos x$, vậy:

$$\int_0^{\pi/2} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin 0 = 1$$



3.4. Tích phân bất định

Giả sử F(x) là một nguyên hàm của f(x), khi đó F(x) + C cũng là nguyên hàm của f(x) (với C là hằng số tùy ý), và mọi nguyên hàm của f(x) đều có dạng F(x) + C

Ký hiệu $\int f(x)dx$ là họ tất cả các nguyên hàm của f(x), được gọi là tích phân bất định của f(x), tức là

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}$$

Các ký hiệu ∫, f(x) và f(x)dx tương ứng được gọi là dấu tích phân, hàm số lấy tích phân và biểu thức dưới dấu tích phân, còn x được gọi là biến lấy tích phân.

Các tính chất của tích phân bất định

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int\left(3e^x + \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \int 3e^x dx + \int \frac{1}{1+x^2}dx = 3\int e^x dx + \int \frac{1}{1+x^2}dx = 3e^x + \arctan x + C$$

Bảng công thức tích phân các hàm cơ bản

$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -cotgx + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C = -arccotgx + C$

Ví dụ: Tính các tích phân sau

$$I_1 = \int (2-x^3)^2 dx$$

$$I_1 = \int (4 - 4x^3 + x^6) dx$$

$$= \int 4dx + \int -4x^3 dx + \int x^6 dx$$

$$= 4\int dx - 4\int x^3 dx + \int x^6 dx$$

$$= 4x - 4\frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} + C = 4x - x^4 + \frac{x^7}{7} + C$$

$$I_2 = \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$$

$$I_2 = \int \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$= \int \left(x^{1/2} + x^{-1/2} \right) dx$$

$$= \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C$$

$$= \frac{2}{3} x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$$

$$I_3 = \int (1-x)^3 dx$$

$$I_3 = \int (1 - 3x + 3x^2 - x^3) dx = x - \frac{3}{2}x^2 + x^3 - \frac{1}{4}x^4 + C$$

$$\boxed{d(1-x) = (1-x)' dx = -dx \Rightarrow dx = -d(1-x)}$$

$$I_3 = -\int (1-x)^3 d(1-x) = -\frac{(1-x)^4}{4} + C = -\frac{1}{4} + x - \frac{3}{2}x^2 + x^3 - \frac{1}{4}x^4 + C$$

$$I_4 = \int (2x+5)^{2023} \boxed{dx} \qquad I_4 = \int (2x+5)^{2023} \boxed{\frac{d(2x+5)}{2}} = \frac{1}{2}\frac{(2x+5)^{2024}}{2024} + C$$

$$I_5 = \int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} dx$$

$$I_5 = \int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} dx = \int \frac{\left[1-(1-x)\right]^2}{(1-x)^{100}} dx = \int \frac{1 - 2(1-x) + (1-x)^2}{(1-x)^{100}} \boxed{dx}$$

$$= \boxed{-} \int \left[(1-x)^{-100} - 2\boxed{(1-x)^{-99}} + (1-x)^{-98} \right] \boxed{d(1-x)}$$

$$= -\left[\frac{(1-x)^{-99}}{-99} - 2\boxed{\frac{(1-x)^{-98}}{-98}} + \frac{(1-x)^{-97}}{-97} \right] + C = \frac{1}{99(1-x)^{99}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{97(1-x)^{97}} + C$$

$$I_6 = \int \frac{dx}{x+a} = \int \frac{d(x+a)}{x+a} = \ln\lvert x+a\rvert + C$$

$$I_7 = \int \frac{dx}{(x+2)(x-1)} = \int \frac{(x+2)-(x-1)}{3(x+2)(x-1)} dx = \frac{1}{3}\int \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right] dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\ln\lvert x-1\rvert - \ln\lvert x+2\rvert \right] + C = \frac{1}{3}\ln\left\lvert \frac{x-1}{x+2} \right\rvert + C$$

$$I_8 = \int \sin 2x dx = \int \sin 2x \frac{d(2x)}{2} = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$$

$$I_9 = \int \sin 5x \sin 3x dx$$

$$= \int -\frac{1}{2}(\cos 8x - \cos 2x) dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 8x}{8} - \frac{\sin 2x}{2} \right) + C = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C$$

$$I_{10} = \int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \tan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$$\boxed{d\left(\tan\frac{x}{2}\right) = \frac{dx}{2\cos^2 \frac{x}{2}}}$$

$$I_{11} = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}} = \ln\left\lvert \tan\frac{x}{2} \right\rvert + C$$

$$I_{12} = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dx}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \int \frac{d(e^x)}{(e^x)^2+1} = \arctan(e^x) + C$$

$$I_{13} = \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C \qquad \int \frac{dx}{5+x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{x}{\sqrt{5}} + C$$

Chương 3. TÍCH PHÂN HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ THỰC

3.5. Đổi biến trong tích phân

Đổi biến trong tích phân bất định:

$$\int f(x)dx \longrightarrow \int g(t)dt$$

Định lý 1. Nếu đặt $t = \varphi(x)$ mà $f(x)dx = g(t)dt$ và $\int g(t)dt = G(t) + C$ thì

$$\int f(x)dx = \int g(t)dt = G(t) + C = G(\varphi(x)) + C$$

Ví dụ: Tính $I_1 = \int x^3\cos(x^4+2)dx$ Đặt $t = x^4+2 \Rightarrow dt = 4x^3dx$

$$I_1 = \int \cos(x^4+2)\boxed{x^3dx} = \int \cos t\boxed{\frac{dt}{4}} = \frac{1}{4}\sin t + C = \frac{1}{4}\sin(x^4+2) + C$$

$I_2 = \int \frac{dx}{x\ln x}$ Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$

$$I_2 = \int \frac{1}{\ln x}\frac{dx}{x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C$$

$$I_3 = \int \frac{\cos x dx}{1+\sin^2 x}$$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

$$I_3 = \int \frac{\cos x dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t + C = \arctan(\sin x) + C$$

$$I_1 = \int x^3\cos(x^4+2)dx = \int \cos(x^4+2)\boxed{x^3dx} = \int \cos(x^4+2)\boxed{\frac{d(x^4+2)}{4}} = \frac{1}{4}\sin(x^4+2) + C$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{1}{\ln x}\boxed{\frac{dx}{x}} = \int \frac{\boxed{d(\ln x)}}{\ln x} = \ln|\ln x| + C$$

$$I_3 = \int \frac{\boxed{\cos x dx}}{1+\sin^2 x} = \int \frac{\boxed{d(\sin x)}}{1+\sin^2 x} = \arctan(\sin x) + C$$

$I_4 = \int x^5\sqrt{1+x^2}dx$ Đặt $t = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow t^2 = 1+x^2 \Rightarrow 2tdt = 2xdx$

$$I_4 = \int x^4\sqrt{1+x^2}xdx = \int (t^2-1)^2 . t.tdt$$

$$= \int (t^6 - 2t^4 + t^2)dt = \frac{t^6}{6} - 2\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{6}\left(\sqrt{1+x^2}\right)^6 - \frac{2}{5}\left(\sqrt{1+x^2}\right)^5 + \frac{1}{3}\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3 + C$$

Định lý 2. Nếu đặt $x = \varphi(t)$ mà $f(x)dx = g(t)dt$ và $\int g(t)dt = G(t) + C$

thì $\int f(x)dx = \int g(t)dt = G(t) + C = G(\varphi^{-1}(x)) + C$

với $t = \varphi^{-1}(x)$ là hàm số ngược của hàm $x = \varphi(t)$

Ví dụ: Tính $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$

Đặt $\boxed{x = a\sin t}$

(ở đây ta coi x biến thiên từ $-a$ đến a, còn t biến thiên từ $-\frac{\pi}{2}$ đến $\frac{\pi}{2}$; nghĩa là $\boxed{t = \arcsin\frac{x}{a}}$)

$\boxed{\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t} = \sqrt{a^2\cos^2 t} = a\cos t}$ $dx = a\cos tdt$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \int a\cos t\, a\cos tdt = a^2\int \cos^2 tdt = a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{a^2}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right] + C$$

$\boxed{t = \arcsin\frac{x}{a};\ \sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} = 2\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}}$

$$\boxed{\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C}$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{\left(a^2 + x^2\right)^2} \qquad \boxed{I_1 = \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C}$$

Đặt $x = a\tan t$, t biến thiên từ $-\frac{\pi}{2}$ đến $\frac{\pi}{2}$; nghĩa là $t = \arctan\frac{x}{a}$

$$dx = \frac{a\,dt}{\cos^2 t}; \quad a^2 + x^2 = a^2 + a^2\tan^2 t = \frac{a^2}{\cos^2 t}$$

$$I_2 = \int \frac{\frac{a\,dt}{\cos^2 t}}{\left(\frac{a^2}{\cos^2 t}\right)^2} = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{a^3}\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2a^3}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right] + C$$

$$t = \arctan\frac{x}{a}; \quad \sin 2t = 2\sin t.\cos t = 2\tan t.\cos^2 t = 2\frac{x}{a}\frac{a^2}{a^2+x^2} = 2\frac{ax}{a^2+x^2}$$

$$\boxed{I_2 = \int \frac{dx}{\left(a^2 + x^2\right)^2} = \frac{1}{2a^3}\arctan\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\frac{x}{a^2+x^2} + C}$$

Đổi biến trong tích phân xác định:

~~Định lý 3~~

Giả sử hàm $\varphi(x)$ đơn điệu ngặt và khả vi, liên tục trong $[a, b]$. Nếu đặt $t = \varphi(x)$ thì $f(x)dx = g(t)dt$ với $g(t)$ liên tục trên $[\varphi(a), \varphi(b)]$. Khi đó. $\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt}$

Ví dụ 1: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x}$

Đặt $t = \sin x$, $dt = \cos x\,dx$, x biến thiên từ 0 tới $\frac{\pi}{2}$, thì t biến thiên từ 0 tới 1.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t\Big|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$$

Ví dụ 2: Tính $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$

Đặt $t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow x = 2\arctan t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$; x biến thiên từ 0 tới $\frac{\pi}{2}$, thì t biến thiên từ 0 tới 1

$$2 + \cos x = 2 + \left(2\cos^2\frac{x}{2} - 1\right) = 2 + \left(2\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}} - 1\right) = 1 + \frac{2}{1+t^2} = \frac{3+t^2}{1+t^2}$$

$$I = \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{3+t^2}{1+t^2}} = \int_0^1 \frac{2dt}{3+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Định lý 4.

Giả sử hàm $\varphi(t)$ khả vi, liên tục trong $[\alpha, \beta]$, nhận giá trị trong $[a, b]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Khi đó có thể đổi biến đặt $x = \varphi(t)$ và $\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt}$

Ví dụ 1: Tính $I = \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$

Đặt $x = 2\sin t$, $dx = 2\cos t\,dt$, x biến thiên từ 0 tới 2, thì t biến thiên từ 0 tới $\frac{\pi}{2}$.

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{4-4\sin^2 t}.2\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} 2\cos t.2\cos t\,dt = 2\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt = 2\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \pi$$

$$\boxed{\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C} \qquad \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \left(\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + \frac{4}{2}\arcsin\frac{x}{2}\right)\Big|_0^2 = \pi$$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ nếu $f(x)$ là hàm số chẵn, $f(-x) = f(x)$

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ nếu $f(x)$ là hàm số lẻ. $f(-x) = -f(x)$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \qquad \int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_a^0 f(-t)dt = \int_0^a f(-t)dt = \int_0^a f(-x)dx$$

Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn, $\int_0^a f(-x)dx = \int_0^a f(x)dx \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

Nếu $f(x)$ là hàm số lẻ, $\int_0^a f(-x)dx = \int_0^a -f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 0$

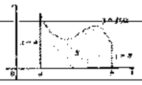
$$\int_{-2}^{2}(x^6+2)dx = 2\int_0^2 (x^6+2)dx = 2\left(\frac{x^7}{7} + 2x\right)\Big|_0^2 = \frac{312}{7} \qquad \int_{-1}^{1} \frac{\tan x}{1+x^2+x^4}\,dx = 0$$

Chương 3. **TÍCH PHÂN HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ THỰC**

3.6. Ứng dụng của tích phân xác định

1. Tính diện tích hình phẳng

a) Hình phẳng trong hệ tọa độ Đề Các:



Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đường cong $y = f(x)$ $(f(x) \geq 0)$,

$x = a$, $x = b$, và trục Ox.

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Nếu $f(x) \leq 0,\ x \in [a,b]$ thì $S = -\int_a^b f(x)dx$

Do đó, trong mọi trường hợp với $f(x)$ liên tục trong $[a, b]$ ta có: $S = \int_a^b |f(x)|dx$

Hình phẳng S được giới hạn bởi các đường cong

có phương trình $y = f(x)$, $y = g(x)$

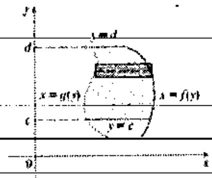
và các đường thẳng $x = a$ và $x = b$ $(a < b)$.

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

Hình phẳng được giới hạn bởi các đường có phương trình $x = g(y)$, $x = f(y)$

và các đường $y = c$, $y = d$ $(c < d)$.

$$S = \int_c^d |g(y) - f(y)|dy$$



---

b) Nếu hình phẳng giới hạn bởi đường cong được cho bởi phương trình tham số

$x = x(t)$, $y = y(t)$ với $t \in [\alpha, \beta]$ thì $S = \int_\alpha^\beta |y(t)x'(t)|dt$

c) Nếu hình phẳng giới hạn bởi đường cong có phương trình trong hệ toạ độ cực $r = r(\varphi)$,

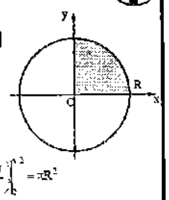
$\varphi \in [\alpha, \beta]$ thì

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [r(\varphi)]^2 d\varphi.$$

Ví dụ 1: Tính diện tích hình tròn có bán kính R

Phương trình đường tròn trong hệ tọa độ Đề Các là: $x^2 + y^2 = R^2$

Phương trình đường tròn trong góc phần tư thứ nhất là $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [0, R]$



$$S = 4\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}dx = 4\left(\frac{x}{2}\sqrt{R^2 - x^2} + \frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R}\right)\Bigg|_0^R = 4\frac{R^2}{2}\arcsin 1 = 4\frac{R^2}{2}\frac{\pi}{2} = \pi R^2$$

Phương trình tham số của đường tròn là $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$

$$S = 4\int_0^{\pi/2} |R\sin t(-R\sin t)|dt = 4R^2\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\,dt = 4R^2\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}dt = 4R^2\left(\frac{1}{2}t - \frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \pi R^2$$

Phương trình đường tròn trong hệ tọa độ cực là: $r = R$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$S = 4\left(\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} R^2 d\varphi\right) = 2R^2\varphi\Big|_0^{\pi/2} = \pi R^2$$

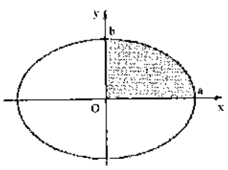
Ví dụ 2: Tính diện tích hình elip giới hạn bởi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Do tính đối xứng, nên diện tích cần tính bằng 4 lần diện tích phần nằm trong góc phần tư thứ nhất.

Phương trình elip trong góc phần tư thứ nhất là $y = \sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [0, a]$

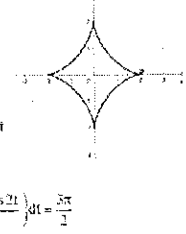
$$S = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx$$

$$= 4\frac{b}{a}\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right)\Bigg|_0^a = 4\frac{b}{a}\frac{a^2}{2}\arcsin 1 = \pi ab$$



Ví dụ 3: Tính diện tích một nhịp đường axtroit $x^{2/3} + y^{2/3} = 2^{2/3}$

Phương trình tham số của đường axtroit là $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$



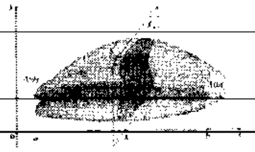
$$S = 4\int_0^{\pi/2} \left|\left(2\sin^3 t\right).2.3\cos^2 t\left(-\sin t\right)\right|dt$$

$$= 48\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\cos^2 t\,dt = 48\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2\sin^2 t\,dt = 12\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4t}{2}\frac{1-\cos 2t}{2}dt$$

$$= 3\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)(1-\cos 2t)dt = 3\int_0^{\pi/2}\left(1 - \cos 2t - \cos 4t + \frac{\cos 6t + \cos 2t}{2}\right)dt = \frac{3\pi}{2}$$

2. Tính thể tích vật thể

Giả sử cần tính thể tích của vật thể S. Ký hiệu A(x) vừa là tên, vừa là số đo diện tích của thiết diện của vật thể S bị cắt bởi P_x, là mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm $x \in [a, b]$.

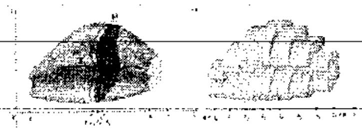


Chúng ta có thể xem rằng vật thể S được sinh ra bởi thiết diện A(x) di chuyển khi x biến thiên từ a đến b.

Ta chia đoạn [a, b] thành n phần bằng nhau bởi các điểm x_i, i = 0, 1, 2, …, n:

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b \qquad x_i = x_{i-1} + \Delta x = x_0 + i\Delta x,\ \Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

Với mỗi i = 1, 2, …, n ký hiệu S_i là phần của S ứng với đoạn $[x_{i-1}, x_i]$ và lấy một điểm $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ tùy ý. Khi đó thể tích của S_i xấp xỉ với $A(x_i^*)\Delta x \Rightarrow V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x$



Khi n → ∞ mà tổng trên tồn tại giới hạn thì giới hạn đó được gọi là thể tích của S.

$$\Rightarrow V = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x = \int_a^b A(x)dx$$

Ví dụ : Tính thể tích của ellipsoid có các bán trục tương ứng là a, b, c

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Để có được biểu thức của A(x), ta đưa phương trình ellipsoid về dạng

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \qquad \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} = 1$$

Đây là phương trình của elip với các bán trục là $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ và $c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$.

vì vậy $A(x) = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$

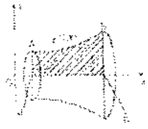
Do đó $V = \pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = \frac{2\pi bc}{a^2}\int_0^a (a^2 - x^2)dx = \frac{2\pi bc}{a^2}\left(a^2x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^a = \frac{4}{3}\pi abc$

Trường hợp vật thể tròn xoay

Vật thể tròn xoay được sinh ra bằng cách quay một miền phẳng quanh một trục.

+ Nếu xoay quanh trục Ox:

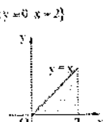
$A(x) = \pi f^2(x) \Rightarrow V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$



+ Nếu xoay quanh trục Oy:

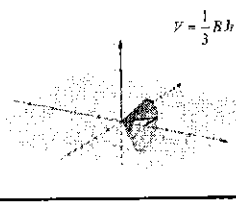
$A(y) = \pi\varphi^2(y) \Rightarrow V = \pi\int_c^d \varphi^2(y)dy$

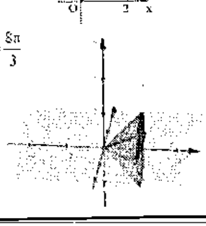
Ví dụ 1: Tìm thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay miền $D = \{y = x; y = 0; x = 2\}$ một vòng xung quanh trục Ox.



$$V = \pi\int_0^2 (x)^2 dx = \pi\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8\pi}{3}$$

$$V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}(\pi 2^2).2 = \frac{8\pi}{3}$$





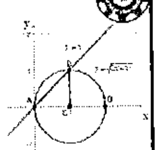
Ví dụ 2: Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay miền $D = \{x^2 + y^2 \le 2x; y \le x; y \ge 0\}$ một vòng xung quanh trục Ox.

$$V = V_1 + V_2$$

$V_1 = \pi\int_0^1 (x)^2 dx = \pi\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{3}$

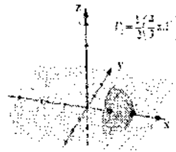
$V_2 = \pi\int_1^2 \left(\sqrt{2x - x^2}\right)^2 dx = \pi\int_1^2 (2x - x^2)dx = \pi\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 = \frac{2\pi}{3}$

$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$

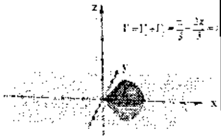


$V_1 = \frac{1}{3}(\pi.1^2).1 = \frac{\pi}{3}$

$V_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi.1^3\right) = \frac{2\pi}{3}$



$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$



3. Tính độ dài đường cong phẳng

Cho hàm số f(x) khả vi liên tục trên [a, b] và gọi $\overset{\frown}{AB}$ là phần đồ thị của hàm f(x) trên [a, b].

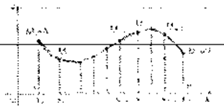
Ta định nghĩa độ dài s của cung $\overset{\frown}{AB}$ và tính s.

Chia cung $\overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ bởi các điểm chia tuỳ ý $M_k(x_k, f(x_k))$ (k = 0, 1, ..., n) với $x_0 = a$, $x_n = b$. Với mọi k = 1..n, ký hiệu Δ_k là độ dài cung $M_{k-1}M_k$, còn $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ và $\Delta y_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$, ta có $\Delta_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$

Theo công thức Lagrange thì

$\Delta y_k = f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)\Delta x_k$ với $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$,

nên $\Delta_k = \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k$



Khi đó độ dài đường gấp khúc $M_0M_1 \ldots M_n$ là $s_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k$

Do f(x) khả vi liên tục trên [a, b] nên tổng trên có giới hạn hữu hạn khi n dần ra vô cùng sao cho $\max(\Delta x_k)$ dần về 0, và ta gọi giới hạn đó là độ dài cung $\overset{\frown}{AB}$, nghĩa là $s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k$

$$\boxed{s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx}$$

Cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình trong tọa độ Descartes

$$\overset{\frown}{AB} = \{(x, y) : y = y(x), a \le x \le b\}$$

Độ dài cung AB là: $\boxed{s = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,dx}$

Trường hợp cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình tham số $\overset{\frown}{AB} = \{(x, y) : x = x(t), y = y(t), \alpha \le t \le \beta\}$

Độ dài cung AB là: $\boxed{s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt}$

Trường hợp cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình trong tọa độ cực $\overset{\frown}{AB} = \{(r, \varphi) : r = r(\varphi), \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2\}$

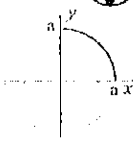
Độ dài cung AB là: $\boxed{s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2}\,d\varphi}$

Ví dụ: Tính độ dài đường tròn bán kính a $\quad 2\pi a$

Phương trình đường tròn trong tọa độ Đề Các là: $x^2 + y^2 = a^2$

Trong góc phần tư thứ nhất, đường tròn có phương trình là $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [0, a]$

$$s = 4\int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}}\right)^2}\,dx = 4\int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = 4a \arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^a = 4a.\frac{\pi}{2} = 2\pi a$$



Phương trình tham số của đường tròn là: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$

$$s = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2}\,dt = 4a\int_0^{\pi/2} dt = 4at\Big|_0^{\pi/2} = 4a.\frac{\pi}{2} = 2\pi a$$

Phương trình đường tròn trong tọa độ cực là: $(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = a^2 \Rightarrow r = a$

$$s = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{(a)^2 + (0)^2}\,d\varphi = 4\int_0^{\pi/2} a\,d\varphi = 4a\varphi\Big|_0^{\pi/2} = 4a.\frac{\pi}{2} = 2\pi a$$

$s = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,dx$

$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt$

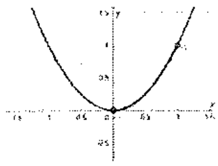
$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2}\,d\varphi$

Ví dụ 2: Tính độ dài cung parabol $y = x^2$, $x \in [0, 1]$

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\,d(2x)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2x}{2}\sqrt{1 + (2x)^2} + \frac{1}{2}\ln\left|2x + \sqrt{1 + (2x)^2}\right|\right]_0^1 = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln\left(2 + \sqrt{5}\right)$$

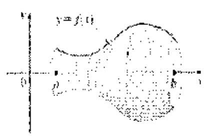


$$\boxed{\int \sqrt{x^2 + a}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 + a} + a\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right|\right) + C}$$

4. Tính diện tích mặt tròn xoay

Diện tích mặt tròn xoay được sinh bởi đồ thị của đường cong y = f(x) trên đoạn [a, b] quay quanh trục Ox được xác định bởi:

$$S = 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$$

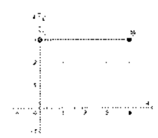


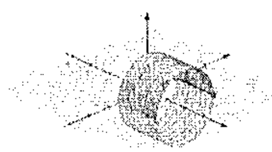
Diện tích mặt tròn xoay được sinh bởi đồ thị của đường cong x = g(y) với y ∈ [c, d] quay quanh Oy được xác định bởi:

$$S = 2\pi\int_c^d |g(y)|\sqrt{1 + g'^2(y)}\,dy$$

Ví dụ 1:

Tính diện tích mặt tròn xoay tạo thành khi quay cung $\overset{\frown}{AB}$: y = 3, x ∈ [0, 4] xung quanh trục Ox.





$$S = 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$$

$$S = 2\pi\int_0^4 |3|\sqrt{1 + 0^2}\,dx = 2\pi.3x\Big|_0^4 = 24\pi$$

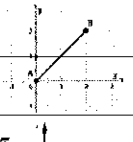
	2π.3
4	

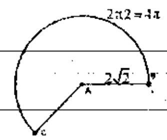
S = 4.6π = 24π

Ví dụ 2:

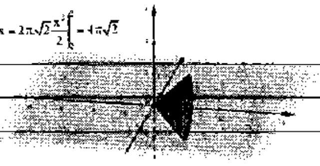
Tính diện tích mặt tròn xoay tạo thành khi quay cung $\overset{\frown}{AB}$: $y = x$, $x \in [0,2]$ xung quanh trục Ox.

$$S = 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$





$$S = 2\pi\int_0^2 |x|\sqrt{1+1^2}dx = 2\pi\sqrt{2}\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 4\pi\sqrt{2}$$



$$\overset{\frown}{CAB} = \alpha = \frac{\ell}{R} = \frac{4\pi}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi$$

$$S = \frac{\alpha R^2}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi(2\sqrt{2})^2}{2} = 4\pi\sqrt{2}$$

Chương 3. **TÍCH PHÂN HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ THỰC**

3.7. Kỹ thuật tính tích phân

Tích phân từng phần

Giả sử u(x) và v(x) là các hàm khả vi, liên tục; khi đó d(uv) = vdu + udv

Tích phân hai vế, ta nhận được công thức tích phân từng phần

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Công thức này rất hiệu quả khi hàm dưới dấu tích phân có dạng

$x^n e^{ax}$, $x^n\cos ax$, $x^n\sin ax$, $x^n\ln^m x$,
$x^n\arccos x$, $x^n\arcsin x$,
$x^n\arctan x$, $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$

Ví dụ: Tính các tích phân sau

$$I_1 = \boxed{\int x\sin 2x\,dx}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = x \\ dv = \sin 2x\,dx \end{array}} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow du = dx \\ \Rightarrow v = -\dfrac{\cos 2x}{2} \end{array}$$

$$I_1 = uv - \int vdu = -x\frac{\cos 2x}{2} - \boxed{\int -\frac{\cos 2x}{2}dx}$$

$$= -x\frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} + C = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$I_2 = \int t^2 e^{3t}\,dt$$

$$\begin{array}{ll} u = t^2 & \Rightarrow du = 2tdt \\ dv = e^{3t}\,dt & \Rightarrow v = \dfrac{e^{3t}}{3} \end{array}$$

$$I_2 = uv - \int vdu = t^2\frac{e^{3t}}{3} - \int\frac{e^{3t}}{3}2t\,dt = \frac{1}{3}t^2e^{3t} - \frac{2}{3}\boxed{\int te^{3t}dt}$$

$$\begin{array}{ll} u = t & \Rightarrow du = dt \\ dv = e^{3t}\,dt & \Rightarrow v = \dfrac{e^{3t}}{3} \end{array}$$

$$I_2 = \frac{1}{3}t^2e^{3t} - \frac{2}{3}\left(t\frac{e^{3t}}{3} - \int\frac{e^{3t}}{3}dt\right)$$

$$= \frac{1}{3}t^2e^{3t} - \frac{2}{9}te^{3t} + \frac{2}{9}\frac{e^{3t}}{3} + C \quad = \frac{1}{3}e^{3t}\left(t^2 - \frac{2}{3}t + \frac{2}{9}\right) + C$$

$$I_3 = \int(2x+1)\ln x\,dx$$

$$\begin{array}{ll} u = \ln x & \Rightarrow du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = (2x+1)dx & \Rightarrow v = x^2 + x \end{array}$$

$$I_3 = uv - \int vdu = (x^2+x)\ln x - \int\frac{x^2+x}{x}dx$$

$$= (x^2+x)\ln x - \int(x+1)dx = (x^2+x)\ln x - \left(\frac{x^2}{2} + x\right) + C$$

Bảng công thức tích phân các hàm cơ bản bổ sung

$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$ $\qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ $\qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $\qquad \int e^x dx = e^x + C$

$\int \cos x dx = \sin x + C$ $\qquad \int \sin x dx = -\cos x + C$ $\qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$ $\qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -cotgx + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$ $\qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C = -arccotgx + C$

$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ $\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+\alpha}\right| + C$

$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$ $\qquad \int \sqrt{x^2+\alpha}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+\alpha} + \frac{\alpha}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right| + C$

Tích phân hàm hữu tỷ

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$$

Phân thức hữu tỉ có dạng $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ trong đó $P_n(x)$, $Q_m(x)$ là các đa thức bậc n, bậc m.

Nếu n < m ta gọi $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ là phân thức hữu tỉ thực sự.

Nếu n ≥ m, ta biểu diễn $\frac{P(x)}{Q(x)}$ dưới dạng tổng của một đa thức với một phân thức hữu tỷ thực sự. Việc tích phân các đa thức là đơn giản, nên bây giờ chúng ta chỉ còn quan tâm đến việc tích phân các phân thức hữu tỷ thực sự.

Người ta chứng minh được rằng, mọi đa thức với các hệ số thực đều có thể phân tích thành tích của các nhị thức bậc nhất và tam thức bậc hai không có nghiệm thực:

$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m = b_0(x-a)^\alpha (x-b)^\beta ... (x^2+px+q)^\mu (x^2+lx+s)^\lambda ...$

ở đây, $p^2 - 4q < 0, l^2 - 4s < 0, ...$ Khi đó, phân thức hữu tỷ thực sự tương ứng được phân tích thành tổng các phân thức đơn giản:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \boxed{\frac{A_0}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + ... + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)}} + \frac{B_0}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + ... + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)} + ...$$
$$+ \frac{M_0x+N_0}{(x^2+px+q)^\mu} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\mu-1}} + ... + \frac{M_{\mu-1}x+N_{\mu-1}}{(x^2+px+q)} +$$
$$+ \boxed{\frac{U_0x+V_0}{(x^2+lx+s)^\lambda} + \frac{U_1x+V_1}{(x^2+lx+s)^{\lambda-1}} + ... + \frac{U_{\lambda-1}x+V_{\lambda-1}}{(x^2+lx+s)}} + ...$$

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$$

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \boxed{\frac{A_0}{(x-a)^\alpha}} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + ... + \boxed{\frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)}} + \frac{B_0}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + ... + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)} + ...$$
$$+ \frac{M_0x+N_0}{(x^2+px+q)^\mu} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\mu-1}} + ... + \frac{M_{\mu-1}x+N_{\mu-1}}{(x^2+px+q)} +$$
$$+ \boxed{\frac{U_0x+V_0}{(x^2+lx+s)^\lambda}} + \frac{U_1x+V_1}{(x^2+lx+s)^{\lambda-1}} + ... + \boxed{\frac{U_{\lambda-1}x+V_{\lambda-1}}{(x^2+lx+s)}} + ...$$

Việc tính tích phân các phân thức hữu tỷ thực sự được thay bằng tính tích phân các phân thức hữu tỷ đơn giản.

Tích phân các phân thức hữu tỷ đơn giản

$$\int \frac{A}{x-b} dx = A\ln|x-b| + C$$

$$\int \frac{A}{mx-b} dx = \int \frac{A}{mx-b}\frac{d(mx-b)}{m} = A\frac{1}{m}\ln|mx-b| + C$$

$$\int \frac{A}{(x-b)^m} dx = A\int (x-b)^{-m} dx = A\frac{(x-b)^{-m+1}}{-m+1} + C$$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx \qquad q - \frac{p^2}{4} > 0$$

$$= \int \frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)} dx$$

$$= \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{t^2+a^2} dt \qquad \left(t = x + \frac{p}{2};\ a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\right)$$

$$= \frac{M}{2}\boxed{\int \frac{2tdt}{t^2+a^2}} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\boxed{\int \frac{dt}{t^2+a^2}} = \frac{M}{2}\boxed{\ln\left(t^2+a^2\right)} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\boxed{\frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a}} + C$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2\right] + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{a} + C$$

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx = \int \frac{Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{(t^2+a^2)^m}dt \qquad \left(t = x+\frac{p}{2},\ a = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)$$

$$q-\frac{p^2}{4}>0 \qquad = \frac{M}{2}\boxed{\int\frac{2tdt}{(t^2+a^2)^m}} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\boxed{\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}}$$

Đặt $u = t^2 + a^2$

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}I_n$$

Ví dụ: Tính các tích phân sau

$$\int \frac{x^3+x}{x-1}dx = \int\left(x^2+x+2+\frac{2}{x-1}\right)dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+2\ln|x-1|+C$$

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx \qquad \boxed{\frac{x+5}{x^2+x-2} = \frac{x+5}{(x-1)(x+2)} = \frac{2(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+2}}$$

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx = \int\left(\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx = 2\ln|x-1|-\ln|x+2|+C$$

$$\boxed{\frac{x+5}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{(A+B)x+(2A-B)}{(x-1)(x+2)} \Rightarrow \begin{cases}A+B=1\\2A-B=5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=2\\B=-1\end{cases}$$

Nhân cả hai vế với (x – 1), rồi thay x = 1, ta tìm được A = 2

$$\frac{x+5}{(x+2)} = A+\frac{B(x-1)}{x+2} \xrightarrow{x=1} \frac{1+5}{1+2} = A+\frac{B(1-1)}{1+2} \Rightarrow A=2$$

$$\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}dx$$

Nhân cả hai vế với x, rồi thay x = 0, ta tìm được A = 1

$$\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x} = \boxed{\frac{2x^2-x+4}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}}$$

$$\frac{2x^2-x+4}{(x^2+4)} = A+\frac{(Bx+C)x}{x^2+4} \xrightarrow{x=0} 1 = A$$

$$\frac{2x^2-x+4}{x(x^2+4)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+4A}{x(x^2+4)} \Rightarrow \begin{cases}A+B=2\\C=-1\\4A=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=1\\B=1\\C=-1\end{cases}$$

$$\frac{2x^2-x+4}{x(x^2+4)} = \frac{1}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4} \xrightarrow[x=-1]{x=1} \begin{cases}1=1+\frac{B+C}{5}\\ \frac{7}{-5}=-1+\frac{-B+C}{5}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}B=1\\C=-1\end{cases}$$

$$\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}dx = \int\left(\frac{1}{x}+\frac{x-1}{x^2+4}\right)dx = \int\frac{1}{x}dx+\boxed{\int\frac{x}{x^2+4}dx}-\boxed{\int\frac{1}{x^2+4}dx}$$

$$= \int\frac{1}{x}dx+\boxed{\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+4)}{x^2+4}}-\int\frac{1}{x^2+4}dx = \ln|x|+\boxed{\frac{1}{2}\ln(x^2+4)}-\boxed{\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}}+C$$

Tích phân hàm lượng giác

$$\int\cos xdx = \sin x + C \qquad \int\sin xdx = -\cos x + C \qquad \int\frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C \qquad \int\frac{dx}{\sin^2 x} = -cotgx + C$$

$$I_1 = \int\sin 5x\sin 3xdx = \int -\frac{1}{2}(\cos 8x-\cos 2x)dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 8x}{8}-\frac{\sin 2x}{2}\right)+C = \frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x+C$$

$$I_2 = \int\sin 2x\cos 5xdx = \frac{1}{2}\int[\sin 7x+\sin(-3x)]dx = \frac{1}{2}\int\sin 7xdx-\frac{1}{2}\int\sin(3x)dx = -\frac{1}{14}\cos 7x+\frac{1}{6}\cos 3x+C$$

$$I_3 = \int\cos 4x\cos xdx = \frac{1}{2}\int(\cos 5x+\cos 3x)dx = \frac{1}{10}\sin 5x+\frac{1}{6}\sin 3x+C$$

$$I_4 = \int\sin^2 xdx = \int\frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2}+C$$

$$I_5 = \int\cos^2 xdx = \int\frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2}+C$$

$$I_6 = \int\sin^4 xdx$$

$$= \int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2dx = \frac{1}{4}\int(1-2\cos 2x+\boxed{\cos^2 2x})dx = \frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\boxed{\frac{1+\cos 4x}{2}}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2}-2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx = \frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$$

$$I_7 = \int\cos^3 xdx = \int\cos^2 x\cos xdx = \int(1-\sin^2 x)d(\sin x) = \sin x-\frac{sin^3x}{3}+C$$

$$I_8 = \int\cos^5 xdx = \int\cos^4 x\cos xdx = \int(1-\sin^2 x)^2d(\sin x)$$

$$= \int(1-2\sin^2 x+\sin^4 x)d(\sin x) = \sin x-\frac{2}{3}sin^3x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C$$

$$I = \int R(\sin x, \cos x)dx$$

- $t = tg\frac{x}{2}$: áp dụng chung cho mọi trường hợp.
- t = sinx: áp dụng khi R là lẻ đối với cosx, tức R(sinx, –cosx) = –R(sinx, cosx)
- t = cosx: áp dụng khi R là lẻ đối với sinx, tức R(–sinx, cosx) = –R(sinx, cosx)
- t = tgx, áp dụng khi R(–sinx, –cosx) = R(sinx, cosx)

$$I = \int R(\cos x, \sin x)\,dx$$

Đặt $t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow x = 2\arctan t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = 2\frac{1}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\quad \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$

Ví dụ: Tính $I = \int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$

Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$, khi đó $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $x = 2\arctan t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{8t}{1+t^2} + \frac{3(1-t^2)}{1+t^2} + 5} = 2\int \frac{dt}{2t^2+8t+8} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{\tan\frac{x}{2}+2} + C$$

$$I = \int R(\cos x, \sin x)\,dx$$

Nếu: R(sinx, cosx) = - R(sinx, - cosx) Đặt: t = sinx

$I = \int \cos^5 x \sin^2 x\,dx$

Đặt: t = sinx, dt = cosxdx

$$\cos^5 x\sin^2 x\,dx = \cos^4 x\sin^2 x\cos x\,dx = (1-\sin^2 x)^2\sin^2 x\cos x\,dx = (1-t^2)^2 t^2 dt$$

$$I = \int \cos^5 x\sin^2 x\,dx = \int (1-t^2)^2 t^2 dt = \int (1-2t^2+t^4)t^2 dt = \int (t^2-2t^4+t^6)dt$$

$$= \frac{t^3}{3} - 2\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C$$

$$I = \int R(\cos x, \sin x)\,dx$$

Nếu: R(sinx, cosx) = - R(- sinx, cosx) Đặt: t = cosx

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,dx}{4 - \cos^2 x}$$

Đặt: t = cosx, dt = -sinxdx

Khi x chạy từ 0 đến $\frac{\pi}{2}$ thì t chạy từ 1 đến 0.

$$I = \int_1^0 \frac{-dt}{4-t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{4}\int_0^1 \left(\frac{1}{2-t} + \frac{1}{2+t}\right)dt = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right|\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}\ln 3$$

$$I = \int R(\cos x, \sin x)\,dx$$

Nếu: R(sinx, cosx) = R(- sinx, - cosx) Đặt: t = tgx

$$I = \int \frac{dx}{\cos^2 x\sin^4 x}$$

Đặt t = tgx, $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$

$$I = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\cos^4 x\frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\left(\frac{1}{1+\tan^2 x}\right)^2 \tan^4 x} = \int \frac{dt}{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2 t^4} = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4}dt$$

$$= \int\left(\frac{1}{t^4} + \frac{2}{t^2} + 1\right)dt = -\frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} + t + C = -\frac{1}{3\tan^3 x} - \frac{2}{\tan x} + \tan x + C$$

Tính $I = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}dx$

- Đặt $t = tg\frac{x}{2}$: ta có $I = \int \frac{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3}{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^5}\frac{2dt}{1+t^2} = 16\int \frac{t^3(1+t^2)}{(1-t^2)^5}dt$
- Đặt t = sinx: ta có $I = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^6 x}\cos x\,dx = \int \frac{\sin^3 x}{(1-\sin^2 x)^3}\cos x\,dx = \int \frac{t^3 dt}{(1-t^2)^3}$
- Đặt t = cosx: ta có $I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^5 x}\sin x\,dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)}{\cos^5 x}\sin x\,dx = -\int \frac{1-t^2}{t^5}dt$
- Đặt t = tgx: ta có $I = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\frac{dx}{\cos^2 x} = \int t^3 dt = \frac{1}{4}t^4 + C = \frac{1}{4}tg^4 x + C$

Tích phân hàm vô tỷ

$I = \int R\left(x, (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}, (ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right)dx \quad ; m_1, n_1, m_2, n_2, \ldots \in Z$

Đặt $ax + b = t^s$, với s là bội chung nhỏ nhất của $n_1, n_2, \ldots$ ta đưa tích phân I về tích phân hàm hữu tỷ

Ví dụ: Tính tích phân $I = \int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}\boxed{dx}$

Đặt $x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$ $\quad \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[6]{t^{12}} = t^4$ $\quad \sqrt[6]{x} = \sqrt[6]{t^6} = t$ $\quad \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{t^6} = t^2$

$$I = \int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx = \int \frac{t^6+t^4+t}{t^6(1+t^2)}\boxed{6t^5 dt} = 6\int \frac{t^5+t^3+1}{1+t^2}dt$$

$$= 6\int\left(t^3 + \frac{1}{1+t^2}\right)dt = 6\left(\frac{t^4}{4} + \arctan t\right) + C = \frac{3}{2}x^{2/3} + 6\arctan\sqrt[6]{x} + C$$

Ví dụ: Tính tích phân $I=\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$

Đặt $x+1=t^2\Rightarrow dx=2tdt$

$$I=\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx=\int\frac{t+2}{t^4-t}2tdt=2\int\frac{t+2}{t^3-1}dt=2\int\frac{t+2}{(t-1)(t^2+t+1)}dt=2\int\left[\frac{1}{t-1}-\boxed{\frac{t+1}{t^2+t+1}}\right]dt$$

$$=2\ln|t-1|-2\int\frac{t+1}{t^2+t+1}dt=2\ln|t-1|-\int\frac{2t+1+1}{t^2+t+1}dt=2\ln|t-1|-\boxed{\int\frac{2t+1}{t^2+t+1}dt}-\int\frac{dt}{t^2+t+1}$$

$$=2\ln|t-1|-\int\frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1}-\int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=2\ln|t-1|-\ln(t^2+t+1)-\frac{1}{\sqrt{3}/2}\arctan\frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2}+C$$

$$=2\ln\left|\sqrt{x+1}-1\right|-\ln\left(x+1+\sqrt{x+1}+1\right)-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$\int\frac{dX}{\sqrt{A^2-X^2}}=\arcsin\frac{X}{A}+C \qquad \int\frac{dX}{\sqrt{X^2+\alpha}}=\ln\left|X+\sqrt{X^2+\alpha}\right|+C$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+1+4}}=\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+4}}=\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+C$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}=\int\frac{dx}{\sqrt{3\left(-x^2+\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}\right)}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{9}-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{d\left(x-\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x-\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(3x-2)+C$$

$$I=\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,\quad a,b,c\in R$$

+) Phép thế Ơle 1: Nếu $a>0$ Đặt: $\sqrt{ax^2+bx+c}=\left[\begin{array}{l}t-\sqrt{a}x\\ t+\sqrt{a}x\end{array}\right.$

+) Phép thế Ơle 2: Nếu $c>0$ Đặt: $\sqrt{ax^2+bx+c}=\left[\begin{array}{l}tx-\sqrt{c}\\ tx+\sqrt{c}\end{array}\right.$

+) Phép thế Ơle 3: Nếu $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Đặt: $\sqrt{ax^2+bx+c}=\left[\begin{array}{l}(x-x_1)t\\ (x-x_2)t\end{array}\right.$

Ví dụ: Tính các tích phân sau

$$I_1=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} \qquad \sqrt{x^2-x+1}=t\pm\sqrt{1}x \qquad \sqrt{x^2-x+1}=tx\pm\sqrt{1}$$

$$\Rightarrow t-x=\sqrt{x^2-x+1}\Rightarrow(t-x)^2=x^2-x+1\Rightarrow x=\frac{t^2-1}{2t-1}\Rightarrow dx=\frac{2t^2-2t+2}{(2t-1)^2}dt$$

$$I_1=\int\frac{\frac{2t^2-2t+2}{(2t-1)^2}dt}{t}=\int\frac{2t^2-2t+2}{(2t-1)^2t}dt=\int\left(\frac{2}{t}+\frac{3}{(2t-1)^2}+\frac{-3}{2t-1}\right)dt$$

$$=2\ln|t|-\frac{3}{2(2t-1)}-\frac{3}{2}\ln|2t-1|+C$$

$$=2\ln\left|x+\sqrt{x^2-x+1}\right|-\frac{3}{2\left[2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1\right]}-\frac{3}{2}\ln\left|2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1\right|+C$$

Tích phân có dạng:

$\int R\left(x,\sqrt{x^2+a^2}\right)dx$ Đặt: $x=atgt$

$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ Đặt: $x=asint$ hoặc $x=acost$

$\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ Đặt: $x=\dfrac{a}{\cos t}$

$$I_1=\int_0^{1/2}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\boxed{dx}$$

Đặt $x=\sin t$, $dx=\cos tdt$, khi x biến thiên từ 0 đến $\frac{1}{2}$ thì t biến thiên từ 0 đến $\frac{\pi}{6}$

$$I_1=\int_0^{\pi/6}\frac{\sin^2t}{\sqrt{1-\sin^2t}}\boxed{\cos tdt}=\int_0^{\pi/6}\frac{\sin^2t}{\sqrt{\cos^2t}}\cos tdt=\int_0^{\pi/6}\frac{\sin^2t}{\cos t}\cos tdt$$

$$=\int_0^{\pi/6}\sin^2tdt=\int_0^{\pi/6}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\left(\frac{1}{2}t-\frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/6}=\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

BÀI GIẢNG HỌC PHẦN: GIẢI TÍCH

Chương 4. HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

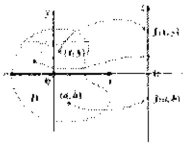
4.1 Hàm số nhiều biến số

Định nghĩa

Ta gọi hàm số của n biến số xác định trên D, ký hiệu $f: D \to R$, là quy luật cho ứng mỗi $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D$ với $u = f(x_1, x_2, ..., x_n) \in R$.

Miền xác định của hàm số $u = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, ký hiệu D_f, là tập các điểm M để f(M) có nghĩa.

Trong trường hợp n = 2 hay n = 3, ta dùng kí hiệu $z = f(x, y)$ hay $u = f(x, y, z)$

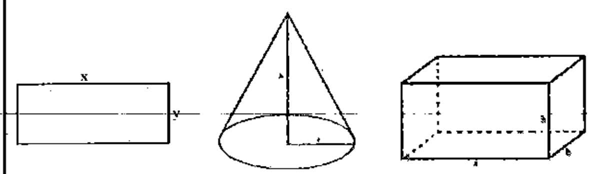


Ví dụ:

Diện tích hình chữ nhật S = x.y là hàm số 2 biến x và y

Thể tích khối nón là hàm số 2 biến r và h: $V = \pi r^2 h$

Thể tích khối hộp chữ nhật là hàm số 3 biến a, b và h: f(a, b, h) = a.b.h

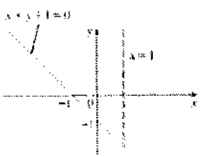


$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$$

$$f(3, 2) = \frac{\sqrt{3 + 2 + 1}}{3 - 1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Miền xác định của hàm số:

$$D = \{(x, y) \mid x + y + 1 \geq 0,\ x \neq 1\}$$

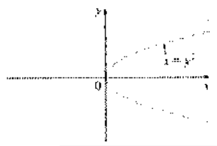


$$f(x, y) = x\ln(y^2 - x)$$

$$f(3, 2) = 3\ln(2^2 - 3) = 3\ln 1 = 0$$

Miền xác định của hàm số:

$$D = \{(x, y) \mid x < y^2\}$$



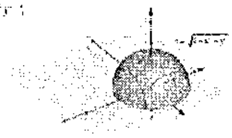
Ví dụ: Tìm miền xác định và vẽ đồ thị hàm số $g(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Miền xác định của hàm số:

$$D = \{(x, y) \mid 9 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$$

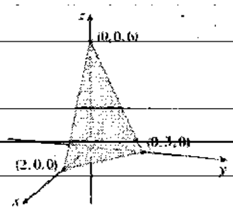
Đặt $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} z \geq 0 \\ z^2 = 9 - x^2 - y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z \geq 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases}$$



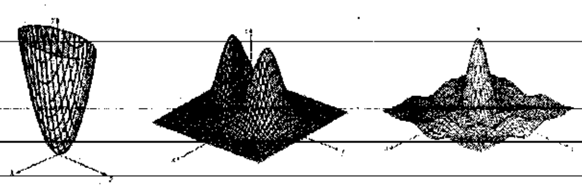
Ví dụ: Vẽ đồ thị hàm số $f(x,y)=6-3x-2y$

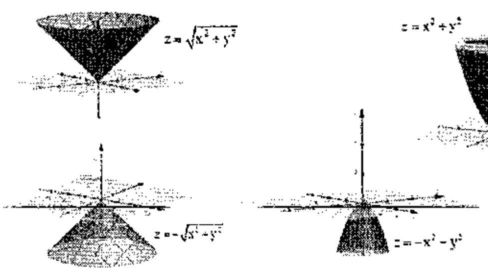
$z=6-3x-2y \quad \Rightarrow 3x+2y+z=6 \Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}=1$



Đồ thị một số hàm hai biến

$z=4x^2+y^2 \qquad f(x,y)=(x^2+3y^2)e^{-x^2-y^2} \qquad f(x,y)=\frac{\sin x\sin y}{xy}$





4.2. Giới hạn và sự liên tục của hàm số nhiều biến số

Giới hạn của hàm số nhiều biến số

Định nghĩa 1

Ta nói dãy điểm $\{M_n(x_n,y_n)\}$ dần tới điểm $M_0(x_0,y_0)$ khi $n\to+\infty$ và viết $M_n\to M_0$ nếu $\lim_{n\to\infty} d(M_n,M_0)=0$

Định nghĩa 2

Ta nói $f(M)$ có giới hạn là L khi $M\to M_0$ và viết $\lim_{M\to M_0} f(M)=L$, nếu với mọi dãy bất kỳ $M_n\to M_0$ ta đều có $f(M_n)\to L$

Khái niệm giới hạn vô cùng cũng được định nghĩa như đối với hàm số một biến số.

Chẳng hạn $\frac{1}{x^2+y^2}\to+\infty$ khi $(x,y)\to(0,0)$

Các định lí về giới hạn của tổng, tích, thương đối với hàm số một biến số cũng đúng cho hàm số nhiều biến.

Ví dụ: Tìm các giới hạn sau

$$A=\lim_{(x,y)\to(5,0)}\left(3+2x-4y^2\right)=\left(3+2.5-4.0^2\right)=13$$

$$B=\lim_{(x,y)\to(5,0)}\frac{2x\sin y}{3y}=\lim_{(x,y)\to(5,0)}\left(\frac{2x}{3}\boxed{\frac{\sin y}{y}}\right)=\frac{2.5}{3}.1=\frac{10}{3}$$

$$C=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1+x^2+y^2}{y^2}(1-\cos y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\boxed{\frac{1-\cos y}{y^2}}(1+x^2+y^2)=\frac{1}{2}.1=\frac{1}{2}$$

Ví dụ: Tìm $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, với $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$

Nếu cho $(x,y)\to(0,0)$ dọc theo đường thẳng có phương trình $y=kx$

thì $f(x,y)=f(x,kx)=\frac{x.kx}{x^2+(kx)^2}=\frac{k}{1+k^2}$, nên $\lim_{x\to0} f(x,kx)=\frac{k}{1+k^2}$

Nếu lấy hai giá trị k khác nhau, ta được hai giới hạn khác nhau, vì vậy không tồn tại giới hạn của $f(x,y)$ khi $(x,y)\to(0,0)$.

Tính liên tục của hàm số nhiều biến số

Giả sử f(x) xác định trong lân cận của điểm $M_0 \in D$.

Ta nói f(x) liên tục tại M_0 nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$

Với $M_0(x_0, y_0)$, khi đó:

- số gia của đối số: $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$,
- số gia riêng theo biến x: $\Delta_x f = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$,
- số gia riêng theo biến y: $\Delta_y f = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$,
- số gia toàn phần: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

Hàm f(x, y) liên tục tại M_0 nếu nó xác định tại đó và $\Delta f \to 0$ khi $\Delta x \to 0$ và $\Delta y \to 0$

f(M) liên tục trong D nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc D.

Hàm số nhiều biến số liên tục cũng có các tính chất như hàm số một biến số liên tục. Chẳng hạn, hàm số nhiều biến liên tục trong một miền đóng, bị chặn thì nó bị chặn trong miền ấy, nó đạt giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất trong miền đó.

Ví dụ: Tìm m để hàm số sau liên tục tại (0, a)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{x} & khi \quad (x,y) \neq (0,a) \\ m & khi \quad (x,y) = (0,a) \end{cases}$$

$$f(0,a) = m$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,a)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,a)} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,a)} \left(y \boxed{\frac{\sin xy}{xy}} \right) = a.1$$

Để hàm số liên tục tại điểm (0, a) thì $\lim\limits_{(x,y)\to(0,a)} f(x,y) = f(0,a) \Rightarrow m = a$

Chương 4. **HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ**

4.3. Đạo hàm riêng

Đạo hàm riêng cấp 1

Cho $u = f(x, y)$ xác định trong miền D và $M_0(x_0, y_0) \in D$. Nếu cố định $y = y_0$ mà hàm một biến của x là $f(x, y_0)$ khả vi tại $x = x_0$ thì đạo hàm của hàm đó được gọi là đạo hàm riêng của f đối với x tại M_0.

Đạo hàm riêng của f đối với y tại M_0:

Ký hiệu: $f'_x(x_0, y_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$ $\qquad$ $f'_y(x_0, y_0)$ hay $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ hoặc $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Ví dụ: Cho hàm số $f(x, y) = x^2 + xy^2 + 5y$, tìm $f'_x(1,0)$ $\quad f'_y(1,0)$

$$f'_x(1,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h, 0) - f(1,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2+h)}{h} = \lim_{h \to 0}(2+h) = 2$$

$$f'_y(1,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1, 0+h) - f(1,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left[1^2 + 1.(0+h)^2 + 5(0+h)\right] - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 5h}{h} = \lim_{h \to 0}(h+5) = 5$$

Chú ý:

- Các đạo hàm riêng của hàm số n biến, n = 3, 4,… được định nghĩa tương tự đạo hàm riêng của hàm hai biến.
- Khi tính đạo hàm riêng của một hàm số theo một biến số nào, ta chỉ việc xem hàm số chỉ phụ thuộc vào biến đó, các biến số khác được coi là không đổi.
- Các quy tắc tính đạo hàm của hàm số một biến được áp dụng tương ứng cho đạo hàm riêng của hàm số nhiều biến số.

Ví dụ: Tìm đạo hàm riêng của các hàm số sau

$f(x,y) = \boxed{x^2} + \boxed{xy^2} + \boxed{5y}$ $\quad f'_x(x,y) = \boxed{2x} + \boxed{y^2}$ $\quad f'_x(1,0) = 2$

$f'_y(x,y) = 2xy + 5$ $\quad f'_y(1,0) = 5$

$g(x,y) = x^3 + e^{2x}\cos y^2$ $\quad g'_x(x,y) = 3x^2 + 2e^{2x}\cos y^2$

$g'_y(x,y) = e^{2x}\left(-2y\sin y^2\right)$

$h(x,y,z) = \boxed{x^2e^{3xy}} + 4xz - \arctan z$

$h'_x(x,y,z) = \boxed{2xe^{3xy} + x^2e^{3xy}.3y} + 4z$ $\quad h'_y(x,y,z) = x^2e^{3xy}.3x$ $\quad h'_z(x,y,z) = 4x - \dfrac{1}{1+z^2}$

Đạo hàm riêng cấp cao

Cho hàm số hai biến $z = f(x, y)$, các đạo hàm riêng f'_x, f'_y là những đạo hàm riêng cấp 1.

Các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp một, nếu tồn tại, được gọi là các đạo hàm riêng cấp hai.

Kí hiệu:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = f''_{xy} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = f''_{yx}$$

Các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp hai, nếu tồn tại, được gọi là các đạo hàm riêng cấp ba,…

Ví dụ: Cho hàm số $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$

$f'_x(x,y) = 3x^2 + 2xy^3$ $\qquad f'_y(x,y) = 3x^2y^2 - 4y$

$f''_{xx}(x,y) = \left(f'_x(x,y)\right)'_x = \left(3x^2 + 2xy^3\right)'_x = 6x + 2y^3$ $\qquad f''_{yy}(x,y) = \left(f'_y(x,y)\right)'_y = \left(3x^2y^2 - 4y\right)'_y = 6x^2y - 4$

$f''_{xx}(2,1) = 6.2 + 2.1^3 = 14$

$\boxed{f''_{xy}(x,y) = \left(f'_x(x,y)\right)'_y = \left(3x^2 + 2xy^3\right)'_y = 6xy^2 \qquad f''_{yx}(x,y) = \left(f'_y(x,y)\right)'_x = \left(3x^2y^2 - 4y\right)'_x = 6xy^2}$

$f''_{xy}(2,1) = 6.2.1^2 = 12$ $\qquad f'''_{xyy}(x,y) = \left(f''_{xy}(x,y)\right)'_y = \left(6xy^2\right)'_y = 12xy$

Định lý *. Nếu trong lân cận nào đó của điểm $M_0(x_0, y_0)$, hàm $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng f''_{xy}, f''_{yx} và các đạo hàm riêng đó liên tục tại M_0 thì $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.*

Định lý cũng đúng cho các đạo hàm riêng cấp cao hơn của hàm số n biến số với $n \geq 3$

Chẳng hạn, nếu $u = f(x, y, z)$ thì $u'''_{xyz} = u'''_{xzy} = u'''_{zxy} = u'''_{yzx} = \dots$, nếu các đạo hàm ấy liên tục.

Vi phân toàn phần

Cho hàm số $f(x, y)$ xác định trong miền D. Lấy các điểm $M_0(x_0, y_0)$, $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ thuộc D. Biểu thức $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ được gọi là số gia toàn phần của $f(x, y)$ tại M_0.

Ta nói $f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0) nếu có thể biểu diễn $\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$,

trong đó: A và B là những hằng số chỉ phụ thuộc x_0 và y_0.

α và β dần tới 0 khi cả Δx và Δy dần tới 0.

Ký hiệu: $df = A\Delta x + B\Delta y$, và gọi là vi phân toàn phần của f tại (x_0, y_0).

Hàm $f(x, y)$ được gọi là khả vi trong miền D nếu nó khả vi tại mọi điểm thuộc D.

Rõ ràng, nếu f khả vi tại (x_0, y_0) thì nó liên tục tại (x_0, y_0).

Định lý: *Nếu các đạo hàm riêng của $f(x, y)$ liên tục tại (x_0, y_0) thì $f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0) và*

$df = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$

$$df = f'_x\Delta x + f'_y\Delta y$$

Nếu $f(x, y) = x$ thì $df = dx = 1.\Delta x + 0.\Delta y$

Nếu $f(x, y) = y$ thì $df = dy = 0.\Delta x + 1.\Delta y$

$\Delta x = dx$ và $\Delta y = dy$ $\qquad \boxed{df = f'_x dx + f'_y dy}$

Với hàm 3 biến $f(x, y, z)$: $\quad df = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz$

Do $\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y = df + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$,

α và β dần tới 0 khi cả Δx và Δy dần tới 0.

Nên vi phân toàn phần chỉ khác số gia toàn phần một lượng rất nhỏ.

$\Delta f \approx df = f_x'\Delta x + f_y'\Delta y$, suy ra $\boxed{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f_x'(x_0, y_0)\Delta x + f_y'(x_0, y_0)\Delta y}$

Ví dụ: Tính gần đúng $\sqrt[3]{1,02^2 + 0,05^2}$

Xét hàm số $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$

Ta có $\sqrt[3]{1,02^2 + 0,05^2} = f(1 + \Delta x, 0 + \Delta y)$, trong đó $\Delta x = 0,02$, $\Delta y = 0,05$

$f_x'(x, y) = \frac{1}{3}(x^2 + y^2)^{-2/3} 2x \qquad f_y'(x, y) = \frac{1}{3}(x^2 + y^2)^{-2/3} 2y$

$\sqrt[3]{1,02^2 + 0,05^2} = f(1 + \Delta x, 0 + \Delta y) \approx f(1,0) + f_x'(1,0).0,02 + f_y'(1,0).0,05 = 1 + \frac{2}{3}.0,02 + 0.0,05 \approx 1,013$

Vi phân cấp cao

Xét hàm $z = f(x, y)$. Vi phân toàn phần của nó là $dz = f_x'dx + f_y'dy$ nếu tồn tại thì cũng là những hàm của x, y. Ta gọi vi phân toàn phần của dz (nếu tồn tại), được gọi là vi phân toàn phần cấp hai của z, ký hiệu là d^2z, tức là $d^2z = d(dz)$

Vi phân của vi phân cấp hai là vi phân cấp ba, v.v...

$$d^2f = d(df) = \frac{\partial(f_x'dx + f_y'dy)}{\partial x}dx + \frac{\partial(f_x'dx + f_y'dy)}{\partial y}dy = f_{x^2}''(dx)^2 + f_{yx}''dydx + f_{xy}''dxdy + f_{y^2}''(dy)^2$$

Giả thiết rằng f_{xy}'' và f_{yx}'' liên tục, khi đó chúng bằng nhau, do đó $d^2f = f_{x^2}''dx^2 + 2f_{xy}''dxdy + f_{y^2}''dy^2$

$$d^2f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f$$

$$d^nf = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f$$

Với hàm 3 biến f(x, y, z):

$$df = f_x'dx + f_y'dy + f_z'dz$$

$$d^2f = f_{xx}''dx^2 + f_{yy}''dy^2 + f_{zz}''dz^2 + 2f_{xy}''dxdy + 2f_{yz}''dydz + 2f_{xz}''dxdz$$

Chương 4. **HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ**

4.4. Đạo hàm theo hướng

Đạo hàm theo hướng và gradien

Cho hàm số $u = u(x, y, z)$ xác định trong $D \subset R^3$.

Qua điểm $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$, vẽ một đường thẳng d định hướng có véc tơ đơn vị là $\vec{l}$.

Khi đó, $\forall M(x, y, z) \in d$, đặt $\rho = |\overrightarrow{MM_0}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$

Nếu $\rho \to 0$ (tức $M \to M_0$ theo hướng $\vec{l}$) mà $\frac{\Delta u}{\rho} = \frac{u(M) - u(M_0)}{\rho} \to A$ (hữu hạn), thì A được gọi là đạo hàm theo hướng $\vec{l}$ của u tại M_0 và ký hiệu là $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0)$. Giá trị A biểu thị tốc độ biến thiên của u theo hướng $\vec{l}$.

Nếu $\vec{l}$ trùng với véc tơ đơn vị $\vec{i}$ của trục Ox thì,

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0) = \lim_{\rho \to 0}\frac{u(x_0 + \rho, y_0, z_0) - u(x_0, y_0, z_0)}{\rho} = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)$$

Như vậy, các đạo hàm riêng $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$, chính là các đạo hàm theo hướng Ox, Oy, Oz của u

Định lý: Nếu hàm số $u = u(x, y, z)$ khả vi tại $M_0(x_0, y_0, z_0)$ thì tại điểm đó nó có đạo hàm theo mọi hướng $\vec{l}$, và ta có $\boxed{\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0).\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0).\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0).\cos\gamma}$

trong đó $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ là các thành phần của $\vec{l}$.

Ta gọi gradiên của u(x, y, z) tại M_0, ký hiệu $\overrightarrow{grad}\,u(M_0)$, là véc tơ

$$\overrightarrow{grad}\,u(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\vec{k}$$

với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ tương ứng là các véc tơ đơn vị của các trục Ox, Oy, Oz.

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0) = \overrightarrow{grad}\,u(M_0).\vec{l} = |\overrightarrow{grad}\,u(M_0)|.|\vec{l}|.\cos(\overrightarrow{grad}\,u(M_0), \vec{l})$$

Ví dụ: Cho hàm số $u = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$

Tìm $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0)$ biết $M_0(1, 2, -1)$ và $\vec{l}$ là véc tơ đơn vị của $\vec{v}(1, 2, 3)$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma$$

$u_x' = 3x^2 + 3yz \to u_x'(M_0) = -3$

$u_y' = 3y^2 + 3xz \to u_y'(M_0) = 9$

$u_z' = 3z^2 + 3xy \to u_z'(M_0) = 9$

$$\vec{l} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0) = -3.\frac{1}{\sqrt{14}} + 9.\frac{2}{\sqrt{14}} + 9.\frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{42}{\sqrt{14}}$$

Đạo hàm của hàm số hợp

Cho $\varphi: R^2 \supseteq D \ni (x, y) \to (u(x, y), v(x, y)) \in R^2$, $\qquad f: R_\varphi \ni (u, v) \to f(u, v) \in R$.

Khi đó $f_o\varphi: D \ni (x, y) \to f(\varphi(x, y)) = f(u(x, y), v(x, y))$ được gọi là hàm hợp của f với φ.

Định lý : Nếu f có các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ liên tục trong D, và các hàm u, v có các đạo hàm riêng $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ trong D, thì tồn tại các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ trong D và

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$ *hay viết dưới dạng ma trận* $$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} \boxed{\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}}$$

Ma trận Jacobi của u, v đối với x, y

Định thức của ma trận đó, ký hiệu $\frac{D(u, v)}{D(x, y)}$, được gọi là định thức Jacobi của u, v đối với x, y.

Ví dụ: Cho hàm hợp $f = e^u \ln v$, với $u = xy$, $v = x^2 + y^2$

Khi đó $\frac{\partial f}{\partial u} = e^u \ln v$, $\frac{\partial f}{\partial v} = e^u \frac{1}{v}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 2y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(e^u \ln v\right) y + \left(e^u \frac{1}{v}\right) 2x = ye^{xy} \ln(x^2 + y^2) + \frac{2xe^{xy}}{x^2 + y^2} = e^{xy}\left(y\ln(x^2 + y^2) + \frac{2x}{x^2 + y^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(e^u \ln v\right) x + \left(e^u \frac{1}{v}\right) 2y = xe^{xy} \ln(x^2 + y^2) + \frac{2ye^{xy}}{x^2 + y^2} = e^{xy}\left(x\ln(x^2 + y^2) + \frac{2y}{x^2 + y^2}\right)$$

Đạo hàm của hàm số ẩn

Cho phương trình $F(x, y) = 0$, trong đó $F: R^2 \supseteq U \to R$. Nếu với mỗi giá trị $x = x_0 \in I$, có một (hay nhiều) y_0 sao cho $F(x_0, y_0) = 0$ thì ta nói phương trình $F(x, y) = 0$ xác định một (hay nhiều) hàm ẩn y theo $x \in I$. Nói khác đi, $\forall x \in I$, $(x, f(x)) \in U$ và $F(x, f(x)) = 0$

Từ phương trình $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, ta có $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, như vậy ta tìm được dạng tường minh của hai hàm ẩn xác định trong $[-a, a]$

Từ phương trình $x^y - y^x = a$ $(x > 0, y > 0, a > 0)$ ta không thể tìm được dạng tường minh của hàm ẩn, mặc dù nó có thể tồn tại.

Định lý:

Cho phương trình $F(x, y) = 0$, trong đó F có các đạo hàm riêng liên tục trong một tập mở $U \subset R^2$. Nếu tại $(x_0, y_0) \in U$: $F(x_0, y_0) = 0$ và $F_y'(x_0, y_0) \neq 0$, thì trong một lân cận nào đó của x_0, phương trình $F(x, y) = 0$ xác định duy nhất một hàm ẩn $y = f(x)$, liên tục cùng với đạo hàm cấp một trong lân cận nói trên, và $f(x_0) = y_0$.

Lấy đạo hàm hai vế của phương trình $F(x, y) = 0$ theo x, ta được

$$F_x' + F_y'\frac{dy}{dx} = 0. \text{ Vì } F_y' \neq 0, \text{ ta có } \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x'}{F_y'}$$

Ví dụ: Tìm đạo hàm của hàm số ẩn $y = f(x)$ xác định bởi phương trình $F(x, y) = x^3y - y^3x - 4 = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x'}{F_y'} = -\frac{3x^2y - y^3}{x^3 - 3y^2x}$$

Định lý:

Cho phương trình $F(x, y, z) = 0$, trong đó F có các đạo hàm riêng liên tục trong một tập mở $U \subset R^3$. Nếu tại $(x_0, y_0, z_0) \in U$: $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ và $F_z'(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, thì trong một lân cận nào đó của (x_0, y_0, z_0) phương trình $F(x, y, z) = 0$ xác định duy nhất một hàm ẩn $z = f(x, y)$, liên tục cùng với các đạo hàm riêng trong lân cận nói trên, và $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Lấy đạo hàm phương trình $F(x, y, z) = 0$ theo x và y, ta được $F_x' + F_z'z_x' = 0$, $F_y' + F_z'z_y' = 0$. Vì $F_z' \neq 0$ nên $\boxed{z_x' = -\frac{F_x'}{F_z'}, z_y' = -\frac{F_y'}{F_z'}}$

Ví dụ:

Cho phương trình: $z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$ xác định hàm số ẩn $z = z(x, y)$. Chứng minh rằng: $x^2 z_x' + \frac{1}{y} z_y' = \frac{1}{z}$

$F(x, y, z) = z^2 + \frac{2}{x} - \sqrt{y^2 - z^2} = 0$ $\qquad z_x' = -\frac{F_x'}{F_z'} = -\frac{-2/x^2}{2z + \frac{z}{\sqrt{y^2 - z^2}}} = \frac{2\sqrt{y^2 - z^2}}{x^2 z\left(2\sqrt{y^2 - z^2} + 1\right)}$ $\qquad z_y' = -\frac{F_y'}{F_z'} = -\frac{\frac{-y}{\sqrt{y^2 - z^2}}}{2z + \frac{z}{\sqrt{y^2 - z^2}}} = \frac{y}{z\left(2\sqrt{y^2 - z^2} + 1\right)}$

$$x^2 z_x' + \frac{1}{y} z_y' = x^2 \frac{2\sqrt{y^2 - z^2}}{x^2 z\left(2\sqrt{y^2 - z^2} + 1\right)} + \frac{1}{y}\frac{y}{z\left(2\sqrt{y^2 - z^2} + 1\right)} = \frac{1}{z}\left[\frac{2\sqrt{y^2 - z^2}}{2\sqrt{y^2 - z^2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{y^2 - z^2} + 1}\right] = \frac{1}{z}$$

Chương 4. **HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ**

4.5. Cực trị của hàm số nhiều biến

Cực trị không điều kiện của hàm số hai biến số

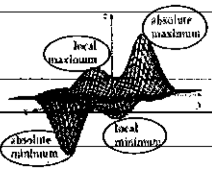
Cho $z = f(x, y)$ xác định trong $D \subseteq R^2$ và $U(M_0)$ là một lân cận nào đó của $M_0(x_0, y_0) \in D$.

Ta nói,

. hàm f đạt cực đại tại M_0 nếu $f(M) < f(M_0)$ với mọi $M \in U(M_0)$.

. hàm f đạt cực tiểu tại M_0 nếu $f(M) > f(M_0)$ với mọi $M \in U(M_0)$.

Cực đại và cực tiểu gọi chung là cực trị



Định lý (điều kiện cần của cực trị).

Tại điểm cực trị M_0, nếu các đạo hàm riêng cấp một của hàm $z = f(x, y)$ tồn tại thì chúng bằng 0, tức $f_x' = f_y' = 0$ tại M_0

Ví dụ: Xét hàm số $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$.

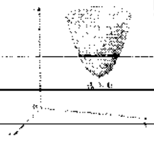
$f_x' = 2x - 2 \quad f_y' = 2y - 6;\ \begin{cases} f_x' = 0 \\ f_y' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 2y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$

Vậy hàm số có một điểm tới hạn M(1, 3).

Tại M, ta có: $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 3)^2 + 4 \Rightarrow f(M) = 4$

$\Delta f = f(1 + \Delta x, 3 + \Delta y) - f(1, 3) = [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + 4] - 4 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 > 0$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại M(1, 3), f(M) = 4



Định lý (điều kiện của cực trị)

Giả sử $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục trong một lân cận nào đó của điểm $M_0(x_0, y_0)$ và tại đó $f_x' = f_y' = 0$. Đặt $\delta = (f_{xy}'')^2 - f_{xx}'' f_{yy}''$, khi đó:

Nếu $\delta > 0$ thì f không đạt cực trị tại M_0.

Nếu $\delta = 0$ thì tại M_0, hàm f có thể đạt cực trị hoặc không.

Nếu $\delta < 0$ thì tại M_0, hàm f đạt cực tiểu nếu $f_{xx}'' > 0$, đạt cực đại nếu $f_{xx}'' < 0$

Trong trường hợp $\delta = 0$, ta phải xét chi tiết hơn. Cụ thể, ta cho x và y những số gia Δx và Δy đủ nhỏ rồi xét dấu của Δf. Nếu $\Delta f < 0$ thì M_0 là điểm cực đại, nếu $\Delta f > 0$ thì M_0 là điểm cực tiểu, nếu Δf không xác định dấu thì M_0 không là điểm cực trị.

Ví dụ: Tìm cực trị của hàm số $z = 4x - 4y - x^2 - y^2$

Ta có

$\begin{cases} z_x' = 0 \\ z_y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2x = 0 \\ -4 - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$

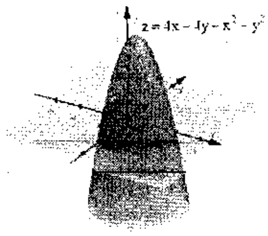
Hàm số có một điểm tới hạn M (2, -2)

$\delta = (z_{xy}'')^2 - z_{xx}'' z_{yy}'' = 0^2 - (-2)(-2) = -4$

$\Rightarrow \delta(M) = -4 < 0$

$z_{xx}''(M) = -2 < 0$

Nên hàm số đã cho đạt cực đại tại M, z(M) = 8



Ví dụ: Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = -x^3 + 3xy - \frac{1}{2}y^2$

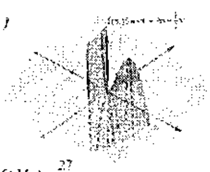
$\begin{cases} f_x' = 0 \\ f_y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x^2 + 3y = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, y = 0 \\ x = 3, y = 9 \end{array}\right.$

Vậy hàm số có hai điểm tới hạn: $M_1(0,0);\ M_2(3,9)$

$\delta = (f_{xy}'')^2 - f_{xx}'' f_{yy}'' = 3^2 - (-6x).(-1) = \boxed{9 - 6x}$

$\delta(M_1) = 9 > 0$ nên M_1 không là điểm cực trị của hàm số f(x,y)

$\begin{cases} \delta(M_2) = -9 < 0 \\ f_{xx}''(M_2) = -18 < 0 \end{cases}$ nên M_2 là điểm cực đại của hàm số đã cho. $f(M_2) = \frac{27}{2}$



Ví dụ: Tìm cực trị của hàm số $z = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

$\begin{cases} z_x' = 0 \\ z_y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, y = 0 \\ x = 1, y = 1 \\ x = -1, y = -1 \end{array}\right.$

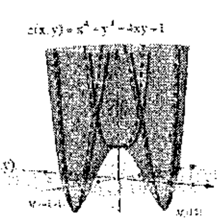
Vậy hàm số có ba điểm tới hạn. $M_1(0,0);\ M_2(-1,-1);\ M_3(1,1)$

$\delta = (z_{xy}'')^2 - z_{xx}'' z_{yy}'' = (-4)^2 - 12x^2 12y^2$

$\delta(M_1) = 16 > 0$ nên M_1 không là điểm cực trị của hàm số z(x,y)

$\delta(M_2) = \delta(M_3) = -128 < 0 \qquad z_{xx}''(M_2) = z_{xx}''(M_3) = 12 > 0$

nên M_2 và M_3 là hai điểm cực tiểu của hàm số đã cho. $z(M_2) = z(M_3) = -1$



Ví dụ: Tìm cực trị của hàm số $z = (x-y)^2 + (x+y)^3$

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-y) + 3(x+y)^2 = 0 \\ -2(x-y) - 3(x+y)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Vậy hàm số có một điểm tới hạn: $M(0,0)$

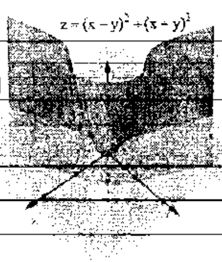
$$\delta = \left(z''_{xy}\right)^2 - z''_{x^2} \cdot z''_{y^2} = \left[-2 + 6(x+y)\right]^2 - \left[2 + 6(x+y)\right]\left[2 + 6(x+y)\right]$$

$\delta(M) = 0$ nên chưa kết luận được ngay.

Tại M: $\Delta z = z(0+\Delta x, 0+\Delta y) - z(0,0) = (\Delta x - \Delta y)^2 + (\Delta x + \Delta y)^3$

Với $\Delta x = \Delta y$ thì $\Delta z = 0 + (2\Delta x)^3$, biểu thức đổi dấu khi Δx đổi dấu.

vậy M không là điểm cực trị. Do đó hàm số không có cực trị.



Chương 4. HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

4.5. Cực trị của hàm số nhiều biến

Cực trị có điều kiện của hàm số nhiều biến số

Ta gọi cực trị của hàm $z = f(x, y)$ với x và y bị ràng buộc bởi $g(x, y) = 0$ là cực trị có điều kiện.

***Định lý** (điều kiện cần của cực trị cho hàm hai biến)*

Giả sử $z = f(x, y)$ đạt cực trị tại $M_0(x_0, y_0)$ với điều kiện $g(x, y) = 0$. Thêm vào đó:

- *Các hàm số f(x, y) và g(x, y) có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trong lân cận M_0*
- *Tại M_0, các đạo hàm riêng g'_x; g'_y không đồng thời bằng 0.*

Khi đó tại M_0: $\dfrac{f'_x}{g'_x} = \dfrac{f'_y}{g'_y}$

Cách tìm cực trị của hàm z = f(x, y) với điều kiện g(x, y) = 0

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{f'_x}{g'_x} = \dfrac{f'_y}{g'_y} \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ Tìm các điểm tới hạn $M_i(x_i, y_i)$.

Tại điểm tới hạn $M_i(x_i, y_i)$, xét dấu $\Delta z = f(x_i + \Delta x, y_i + \Delta y) - f(x_i, y_i)$

Nếu $\Delta z < 0$ thì M_i là điểm cực đại, nếu $\Delta z > 0$ thì M_i là điểm cực tiểu,

nếu Δz không xác định dấu thì M_i không là điểm cực trị.

Ví dụ: Tìm cực trị của hàm số $z = x^2 + y^2$ với điều kiện $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2;\ g(x, y) = \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{f'_x}{g'_x} = \dfrac{f'_y}{g'_y} \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2y}{\frac{1}{3}} \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{18}{13} \\ y = \dfrac{12}{13} \end{cases}$$

Hàm số có một điểm tới hạn: $M\left(\dfrac{18}{13}, \dfrac{12}{13}\right)$

$$\Delta z = f\left(\frac{18}{13} + \Delta x, \frac{12}{13} + \Delta y\right) - f\left(\frac{18}{13}, \frac{12}{13}\right) = \left(\frac{18}{13} + \Delta x\right)^2 + \left(\frac{12}{13} + \Delta y\right)^2 - \left[\left(\frac{18}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2\right]$$

$$= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + \frac{12}{13}(3\Delta x + 2\Delta y) = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 > 0$$

(Do $\left(\frac{18}{13} + \Delta x, \frac{12}{13} + \Delta y\right)$ thỏa mãn điều kiện $g(x, y) = \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 = 0$

$\dfrac{\frac{18}{13} + \Delta x}{2} + \dfrac{\frac{12}{13} + \Delta y}{3} - 1 = 0 \Rightarrow \dfrac{\Delta x}{2} + \dfrac{\Delta y}{3} = 0 \Rightarrow 3\Delta x + 2\Delta y = 0$)

Vậy hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $M\left(\dfrac{18}{13}, \dfrac{12}{13}\right)$, $z(M) = \dfrac{36}{13}$

Phương pháp nhân tử Lagrange cho hàm hai biến

Để tìm cực trị của hàm $z = f(x, y)$ với điều kiện $g(x, y) = 0$, ta xét hàm

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

Giải hệ: $\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ Tìm các điểm tới hạn M_0, tương ứng với nhân tử Lagrange λ_0

Để xét xem điểm tới hạn có là điểm cực trị không, ta xét dấu của d^2F thay vì xét dấu của ΔF (cũng là dấu của Δf) tại điểm M_0.

Ví dụ: Tìm cực trị của hàm số $z = x^2 + y^2$ với điều kiện $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

Sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange

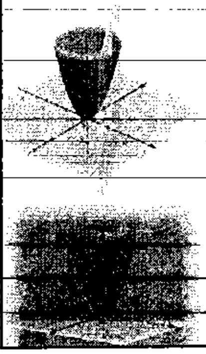
Đặt $F(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1\right)$

$$\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \lambda\frac{1}{2} = 0 \\ 2y + \lambda\frac{1}{3} = 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{72}{13}, x = \frac{18}{13}, y = \frac{12}{13}$$

Hàm số có một điểm tới hạn: $M\left(\frac{18}{13}, \frac{12}{13}\right)$ ứng với $\lambda = -\frac{72}{13}$

Ta có: $d^2F = F''_{xx}dx^2 + 2F''_{xy}dxdy + F''_{yy}dy^2 = 2dx^2 + 2.0dxdy + 2dy^2$

Tại M: $d^2F(M) = 2dx^2 + 2dy^2 > 0$, nên M là điểm cực tiểu. $z(M) = \frac{36}{13}$



Ví dụ: Tìm cực trị của hàm số $z = x^2 + y^2$ với điều kiện $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow y = 3 - \frac{3}{2}x$

Thay vào hàm số: $z = x^2 + y^2 = x^2 + \left(3 - \frac{3}{2}x\right)^2 = \frac{13}{4}x^2 - 9x + 9$; $z' = \frac{13}{2}x - 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{18}{13}$

Do z' đổi dấu từ âm sang dương qua $x = \frac{18}{13}$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{18}{13}$.

$z_{CT} = \frac{13}{4}\left(\frac{18}{13}\right)^2 - 9\frac{18}{13} + 9 = \frac{36}{13}$

Vậy hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $M\left(\frac{18}{13}, \frac{12}{13}\right)$, $z(M) = \frac{36}{13}$

Phương pháp nhân tử Lagrange cho hàm 3 biến

Để tìm cực trị của hàm u = f(x, y, z) với điều kiện g(x, y, z) = 0, ta xét hàm

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$$

Giải hệ: $\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ F'_z = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$ tìm các điểm tới hạn M_i, tương ứng với nhân tử Lagrange λ_i

Để xét xem điểm tới hạn có là điểm cực trị không, ta xét dấu của d^2F thay vì xét dấu của ΔF (cũng là dấu của Δf) tại điểm M_i.

Ví dụ: Tìm cực trị của hàm số $u(x,y,z) = x + y + 2z$ với điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 6$

Sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange, đặt $F(x,y,z,\lambda) = x + y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 6)$

$$\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ F'_z = 0 \\ g(x,y,z) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \lambda 2x = 0 \\ 1 + \lambda 2y = 0 \\ 2 + \lambda 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{2}, x = -1, y = -1, z = -2 \\ \lambda = -\frac{1}{2}, x = 1, y = 1, z = 2 \end{array}\right.$$

Hàm số có hai điểm tới hạn $M(-1,-1,-2)$ ứng với $\lambda = \frac{1}{2}$ và $N(1,1,2)$ ứng với $\lambda = -\frac{1}{2}$

Ta có: $d^2F = F''_{xx}dx^2 + F''_{yy}dy^2 + F''_{zz}dz^2 + 2F''_{xy}dxdy + 2F''_{yz}dydz + 2F''_{xz}dxdz$

$= 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2 + 2\lambda dz^2 + 2.0dxdy + 2.0dydz + 2.0dxdz$

Tại M: $d^2F(M) = 2\frac{1}{2}dx^2 + 2\frac{1}{2}dy^2 + 2\frac{1}{2}dz^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 > 0$,

nên M là điểm cực tiểu, $u(M) = -6$

Tại N: $d^2F(N) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)dx^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)dy^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)dz^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 < 0$,

nên N là điểm cực đại, $u(N) = 6$

Ví dụ. Cho hình cầu bán kính $\sqrt{3}$, tìm hình hộp chữ nhật nội tiếp trong hình cầu đó có thể tích lớn nhất.

Phương trình của mặt cầu bán kính $\sqrt{3}$ là $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Không làm mất tính tổng quát, ta xét những hình hộp chữ nhật có các cạnh song song với các trục tọa độ, nội tiếp trong hình cầu. Gọi (x, y, z) là tọa độ của đỉnh hình hộp chữ nhật nằm trong góc phần tám thứ nhất. Ta có x > 0, y > 0, z > 0.

Ta phải tìm cực đại của hàm số f(x, y, z) = xyz với điều kiện $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$

$$\begin{cases} \frac{f'_x}{g'_x} = \frac{f'_y}{g'_y} = \frac{f'_z}{g'_z} \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{yz}{x} = \frac{xz}{y} = \frac{xy}{z} \\ x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$ Hàm số có một điểm tới hạn $M(1,1,1)$

$\Delta f = f(1+\Delta x, 1+\Delta y, 1+\Delta z) - f(1,1,1) = (\Delta x + \Delta y + \Delta z) + (\Delta x\Delta y + \Delta y\Delta z + \Delta z\Delta x) + \Delta x\Delta y\Delta z$

Với $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ đủ nhỏ, dấu của Δf là dấu của $(\Delta x + \Delta y + \Delta z)$.

Vì điểm $(1+\Delta x, 1+\Delta y, 1+\Delta z)$ cũng nằm trên mặt cầu nên $(1+\Delta x)^2 + (1+\Delta y)^2 + (1+\Delta z)^2 = 3$

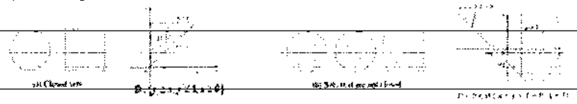
$\Rightarrow \Delta x + \Delta y + \Delta z = -\frac{1}{2}\left[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2\right] < 0$. Vậy $\Delta f < 0$, nên M là điểm cực đại.

Vậy hình lập phương có cạnh bằng 2 là hình hộp chữ nhật có thể tích lớn nhất nội tiếp hình cầu bán kính $\sqrt{3}$.

Chương 4. **HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ**

4.6. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Ta biết rằng mọi hàm số nhiều biến số liên tục trong một miền đóng, bị chặn D đều đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của nó trong miền ấy. (Miền D được gọi là miền đóng nếu nó chứa mọi điểm trong và điểm biên của nó, D là miền bị chặn nếu tồn tại một quả cầu nào đó chứa nó.)



Nếu hàm số đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất tại một điểm trong của miền D thì điểm ấy phải là điểm cực trị của hàm số, do đó phải là điểm tới hạn. Hàm số cũng có thể đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên biên của miền D.

Do đó để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trong miền đóng bị chặn D, ta có thể tìm những điểm tới hạn của nó ở trong D, tính giá trị của hàm số tại những điểm ấy và so sánh chúng với giá trị của hàm số trên biên của D.

Phương pháp giải bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $u = f(x,y)$ trong miền đóng, bị chặn D:

+ Tính giá trị của u tại các điểm tới hạn thuộc D

+ Tính giá trị của u tại biên của D.

+ Kết luận.

Ví dụ 1: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $z = x^2 + y^2 - 2x - y$ trên miền $D = \{x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 2\}$

$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1/2 \end{cases}$ Hàm số có một điểm tới hạn $M\left(1, \frac{1}{2}\right) \in D$, $\boxed{z(M) = -\frac{5}{4}}$

Xét biên OA có phương trình $y = 0, x \in [0,2]$. Thay vào hàm số đã cho ta được: $z = x^2 - 2x$

$z' = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \in [0,2]$. $\boxed{z(0) = 0, \quad z(2) = 0, \quad z(1) = -1}$

Xét biên OB có pt $x = 0, y \in [0,2] \Rightarrow z = y^2 - y \Rightarrow z' = 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \in [0,2]$

$\boxed{z(0) = 0; \quad z(2) = 2; \quad z\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}}$

Biên AB: $x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - x, x \in [0,2]$, nên $z = x^2 + (2-x)^2 - 2x - (2-x) = 2x^2 - 5x + 2$

$\Rightarrow z' = 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{4} \in [0,2]$ $\boxed{z(0) = 2; \quad z(2) = 0; \quad z\left(\frac{5}{4}\right) = -\frac{9}{8}}$

Kết luận: Giá trị lớn nhất của hàm số là $z_{max} = 2$ đạt tại điểm $(0,2)$; Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $z_{min} = -\frac{5}{4}$ đạt tại điểm $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

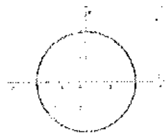
Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $z = -x^2 + 2xy^2 + 3$ trên miền $D = \{x^2 + y^2 \le 4\}$

$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y^2 = 0 \\ 4xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ Hàm số có một điểm tới hạn $M(0,0) \in D$, $\boxed{z(M) = 3}$

Xét biên miền D có phương trình $x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 4 - x^2, x \in [-2,2]$.

Thay vào hàm số đã cho ta được: $z = -x^2 + 2x(4 - x^2) + 3 = -2x^3 - x^2 + 8x + 3$

$z' = -6x^2 - 2x + 8 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [-2,2] \\ x = -\frac{4}{3} \in [-2,2] \end{array}\right.$



$\boxed{z(-2) = -1; \quad z(2) = -9; \quad z(1) = 8; \quad z\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{127}{27}}$

Kết luận: Giá trị lớn nhất của hàm số là $z_{max} = 8$ đạt tại hai điểm $(1, \pm\sqrt{3})$; Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $z_{min} = -\frac{127}{27}$ đạt tại điểm $\left(-\frac{4}{3}, \pm\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$

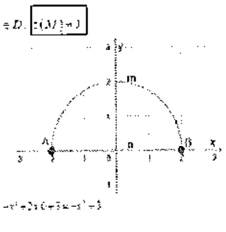
Ví dụ 3: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $z = -x^2 + 2xy^2 + 3$ trên miền $D = \{x^2 + y^2 \le 4; y \ge 0\}$

$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y^2 = 0 \\ 4xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ Hàm số có một điểm tới hạn $M(0,0) \in D$, $\boxed{z(M) = 3}$

Xét biên $\overset{\frown}{AmB}$ có phương trình $y = \sqrt{4 - x^2}, x \in [-2,2]$

Thay vào hàm số đã cho ta được: $z = -x^2 + 2x(4 - x^2) + 3 = -2x^3 - x^2 + 8x + 3$

$z' = -6x^2 - 2x + 8 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [-2,2] \\ x = -\frac{4}{3} \in [-2,2] \end{array}\right.$



$\boxed{z(-2) = -1; \quad z(2) = -9; \quad z(1) = 8; \quad z\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{127}{27}}$

Xét biên AnB có phương trình $y = 0, x \in [-2,2]$. Thay vào hàm số đã cho, ta được: $z = -x^2 + 2x \cdot 0 + 3 = -x^2 + 3$

$z' = -2x = 0 \rightarrow x = 0 \in [-2,2]$. $\boxed{z(0) = 3; \quad z(-2) = z(2) = -1}$

Kết luận: Giá trị lớn nhất của hàm số là $z_{max} = 8$ đạt tại điểm $(1, \sqrt{3})$; Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $z_{min} = -\frac{127}{27}$ đạt tại điểm $\left(-\frac{4}{3}, \frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$

Ví dụ 4: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $z = x^2 - 2xy - 4x - 8y$ trên miền $D = \{(x,y) | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\}$

$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - 4 = 0 \\ -2x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -6 \end{cases}$ Hàm số có một điểm tới hạn $M(-4,-6) \notin D$

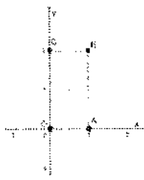
Xét biên $\overline{OA}$ có phương trình $y = 0, x \in [0,1]$

Thay vào hàm số đã cho, ta được:

$z = x^2 - 4x \Rightarrow z' = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \notin [0,1] \Rightarrow$ $\boxed{z(0) = 0, \quad z(1) = -3}$

Xét biên $\overline{AB}$ có phương trình $x = 1, y \in [0,2]$.

Thay vào hàm số đã cho, ta được: $z = -10y - 3 \Rightarrow z' = -10 \ne 0 \Rightarrow$ $\boxed{z(0) = -3; \quad z(2) = -23}$



Xét biên $\overline{BC}$ có phương trình $y = 2, x \in [0,1]$

Thay vào hàm số đã cho, ta được: $z = x^2 - 8x - 16 \Rightarrow z' = 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 4 \notin [0,1]$

$\Rightarrow$ $\boxed{z(0) = -16; \quad z(1) = -23}$

Xét biên $\overline{OC}$ có phương trình $x = 0, y \in [0,2]$.

Thay vào hàm số đã cho, ta được: $z = -8y \Rightarrow z' = -8 \ne 0 \Rightarrow$ $\boxed{z(0) = 0; \quad z(2) = -16}$

Kết luận: Giá trị lớn nhất của hàm số là $z_{max} = 0$ đạt tại điểm $O(0,0)$; Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $z_{min} = -23$ đạt tại điểm $B(1,2)$

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

BÀI GIẢNG HỌC PHẦN: GIẢI TÍCH

Chương 5. **TÍCH PHÂN BỘI**

Tích phân phụ thuộc tham số

$$\int_0^2 (2x+3)dx \qquad \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \qquad \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 y dy$$

$$I(y) = \int_0^3 x^2 y dx \qquad I(x) = \int_{x^2}^{2x} (x^2+y^2)dy$$

$$I(y) = \int_0^3 x^2 y dx = \frac{x^3}{3} y \Big|_0^3 = 9y \qquad I(x) = \int_{x^2}^{2x} (x^2+y^2)dy = \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Big|_{x^2}^{2x}$$

$$= \left[x^2(2x) + \frac{(2x)^3}{3} \right] - \left[x^2 x^2 + \frac{(x^2)^3}{3} \right] = -\frac{x^6}{3} - x^4 + \frac{14x^3}{3}$$

Tích phân lặp

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx \qquad \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

Nếu hàm số f(x, y) liên tục trên [a, b] × [c, d], thì

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

$$I = \int_0^3 \int_1^2 x^2 y dydx$$

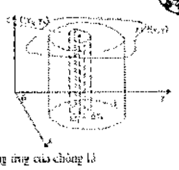
$$I = \int_0^3 \left(\int_1^2 x^2 y dy \right) dx = \int_0^3 \left(x^2 \frac{y^2}{2} \Big|_1^2 \right) dx = \int_0^3 \left(x^2 2 - x^2 \frac{1}{2} \right) dx = \int_0^3 \frac{3}{2} x^2 dx = \frac{1}{2} x^3 \Big|_0^3 = \frac{27}{2}$$

$$I = \int_1^2 \int_0^3 x^2 y dxdy = \int_1^2 \left(\int_0^3 x^2 y dx \right) dy = \int_1^2 \frac{x^3}{3} y \Big|_0^3 dy = \int_1^2 9y dy = 9 \frac{y^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{27}{2}$$

5.1 Tích phân bội hai

Bài toán tính thể tích vật thể hình trụ

Giả sử f(x, y) liên tục và không âm trong miền đóng bị chặn D với biên L. Tính thể tích của vật thể hình trụ giới hạn bởi mặt phẳng Oxy, mặt z = f(x, y) và mặt trụ có đường sinh song song với Oz tựa trên L.



Chia miền D thành n mảnh nhỏ tùy ý là $S_1, S_2, \ldots, S_n$ và gọi diện tích tương ứng của chúng là $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$. Trên mỗi mảnh S_k lấy điểm $M_k(\xi_k, \eta_k)$ tùy ý. Ta thấy thể tích V của vật thể xấp xỉ với $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k$

Sự xấp xỉ càng chính xác nếu n càng lớn và các ΔS_k càng nhỏ. Vì vậy thể tích V được định nghĩa bằng giới hạn (nếu có) của tổng trên khi n dần ra vô hạn sao cho đường kính lớn nhất trong các S_k dần về không. Giới hạn đó không phụ thuộc cách chia miền D và cách lấy các điểm M_k.

Định nghĩa tích phân bội hai

– Cho hàm số f(x, y) xác định trong miền đóng bị chặn $D \subset R^2$.

– Chia D thành n mảnh nhỏ không dẫm lên nhau, $D = S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_n$.

– Với k = 1, 2, ..., n, lấy tuỳ ý $M_k(\xi_k, \eta_k) \in S_k$ và ký hiệu $\Delta S_k = |S_k|$ (số đo diện tích của S_k)

– Nếu $\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i \xrightarrow[Max(\Delta S_i)\to 0]{n \to +\infty} I$ (hữu hạn)

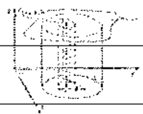
(không phụ thuộc: cách chia D, cách chọn các điểm M_k) thì giới hạn đó được gọi là tích phân bội hai (hay tích phân kép) của f(x, y) trên miền D, ký hiệu là $\iint_D f(x,y)dS$

Trong đó: D là miền lấy tích phân, dS là yếu tố diện tích, f(x, y) là hàm dưới dấu tích phân, f(x, y)dS là biểu thức dưới dấu tích phân.

Nếu tích phân $\iint_D f(x,y)dS$ tồn tại, ta nói hàm f(x, y) khả tích trên D.

Người ta chứng minh được, nếu f(x, y) liên tục trong miền đóng bị chặn thì nó khả tích trên đó.

Vì tích phân bội hai không phụ thuộc cách chia miền D, nên ta có thể chia D bởi hai họ đường thẳng song song với các trục Ox và Oy, vì thế dS = dxdy.



Vậy ta thường viết $\iint_D f(x,y)dxdy$ thay cho $\iint_D f(x,y)dS$

Nếu f(x, y) không âm và khả tích trên D thì thể tích của hình trụ (giới hạn bởi mặt phẳng Oxy, mặt z = f(x, y) và mặt trụ có đường sinh song song với Oz tựa trên L – biên của D) chính bằng tích phân bội hai trên D của f(x, y), tức là $V = \iint_D f(x,y)dS = \iint_D f(x,y)dxdy$

Xét f(x, y) = 1, ta thu được công thức tính diện tích S của miền D là: $S = \iint_D 1dS = \iint_D dxdy$

Các tính chất của tích phân bội hai

Tích phân bội hai cũng có các tính chất tương tự như tích phân xác định

$$\iint_D [f(x,y)+g(x,y)]dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_D g(x,y)dxdy$$

$$\iint_D kf(x,y)dxdy = k\iint_D f(x,y)dxdy$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy \qquad D = D_1 \cup D_2$$

Cách tính tích phân bội hai trong tọa độ Dề Các

a) Miền lấy tích phân là hình chữ nhật có các cạnh song song với các trục toạ độ D = [a, b]×[c, d]

Nếu f(x, y) liên tục trên D = [a, b]×[c, d] thì:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx \qquad \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$$

Ví dụ: Tính các tích phân sau

$$I = \iint_D (x-3y^2)dxdy, \quad D = [0, 2] \times [1, 2]$$

$$I = \iint_D (x-3y^2)dxdy = \int_1^2\left[\int_0^2 (x-3y^2)dx\right]dy$$

$$= \int_1^2\left[\left(\frac{x^2}{2} - 3y^2x\right)\Big|_0^2\right]dy = \int_1^2 (2-6y^2)dy = (2y-2y^3)\Big|_1^2 = -12$$

$$I = \iint_D (x-3y^2)dxdy = \int_0^2\left[\int_1^2 (x-3y^2)dy\right]dx = \int_0^2 (xy-y^3)\Big|_1^2 dx = \int_0^2 (x-7)dx = \left(\frac{x^2}{2}-7x\right)\Big|_0^2 = -12$$

$$I = \iint_D x^2 \sin y dxdy, \quad D = [0, 1] \times [0, \pi]$$

$$I = \int_0^1\left(\int_0^\pi x^2\sin y dy\right)dx = \int_0^1\left(-x^2\cos y\Big|_0^\pi\right)dx = \int_0^1 2x^2dx = \frac{2x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{I = \int_0^\pi\left(\int_0^1 x^2\sin y dx\right)dy} = \int_0^\pi\left(\frac{x^3}{3}\sin y\Big|_0^1\right)dy = \int_0^\pi \frac{1}{3}\sin y dy = -\frac{1}{3}\cos y\Big|_0^\pi = \frac{2}{3}$$

$$I = \int_0^\pi\left(\int_0^1 x^2\sin y dx\right)dy = \int_0^\pi\left(\sin y\int_0^1 x^2dx\right)dy = \boxed{\int_0^1 x^2dx\int_0^\pi \sin y dy} = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1\left(-\frac{1}{3}\cos y\Big|_0^\pi\right) = \frac{1}{3}.2 = \frac{2}{3}$$

Chú ý: *Nếu* $f(x, y) = f_1(x).f_2(y)$ *và* D = [a, b]×[c, d] *thì*

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b f_1(x)dx.\int_c^d f_2(y)dy$$

$I = \iint_D y^3 e^{2x} dxdy;\quad D = [0,2]\times[0,4]$ $\qquad I = \int_0^2 e^{2x}dx.\int_0^4 y^3 dy = \frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^2.\frac{y^4}{4}\Big|_0^4 = \frac{e^4-1}{2}.64 = 32(e^4-1)$

$K = \iint_D \frac{y}{x^2+1} dxdy,\quad D = [0,1]\times[2,3]$ $\qquad K = \iint_D \frac{1}{x^2+1} y\,dxdy = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx.\int_2^3 y\,dy = \arctan x\Big|_0^1.\frac{y^2}{2}\Big|_2^3 = \frac{\pi}{4}.\frac{5}{2} = \frac{5\pi}{8}$

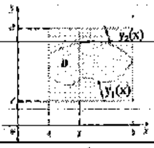
$J = \iint_D \cos y\,dxdy;\quad D = [-1,5]\times[\pi/6, \pi/2]$ $\qquad J = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos y\,dy.\int_{-1}^{5} dx = \sin y\Big|_{\pi/6}^{\pi/2}.x\Big|_{-1}^{5} = \frac{1}{2}.6 = 3$

Cách tính tích phân bội hai trong tọa độ Đề Các

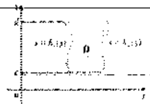
b) Miền lấy tích phân là miền bị chặn

Giá sử f(x, y) là hàm khả tích trên $D = \{(x, y) : a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$

với $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là các hàm khả tích trên [a, b].



$D = \{(x, y) : c \le y \le d, h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$



$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right)dx \qquad \iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d\left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx\right)dy$$

Ví dụ: Tính tích phân sau

$$I = \iint_D (x-y)\,dxdy \qquad D = \{(x,y): -1 \le x \le 1;\ x^2 \le y \le 1\}$$

$$I = \iint_D (x-y)dxdy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{x^2}^{1}(x-y)dy\right)dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(xy - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{x^2}^{1} dx = \int_{-1}^{1}\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)-\left(x^3-\frac{x^4}{2}\right)\right]dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{10}\right)\Big|_{-1}^{1} = -\frac{4}{5}$$

$$J = \iint_D x\,dxdy \qquad D = \left\{(x,y): \frac{1}{2}y \le x \le \sqrt{y};\ 0 \le y \le 4\right\}$$

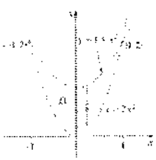
$$J = \int_0^4\left(\int_{y/2}^{\sqrt{y}} x\,dx\right)dy = \int_0^4 \frac{x^2}{2}\Big|_{y/2}^{\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^4\left(\frac{y}{2} - \frac{y^2}{8}\right)dy = \left(\frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{24}\right)\Big|_0^4 = \frac{4}{3}$$

Ví dụ: Tính $\quad J = \iint_D (x+2y)\,dxdy$

D là miền được giới hạn bởi các parabol $y = 2x^2$ và $y = 1 + x^2$.

$D = \{(x,y): -1 \le x \le 1, 2x^2 \le y \le 1 + x^2\}$



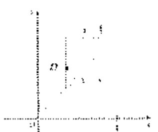
$$J = \int_{-1}^{1}\left[\int_{2x^2}^{1+x^2}(x+2y)dy\right]dx = \int_{-1}^{1}(xy+y^2)\Big|_{2x^2}^{1+x^2} dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[x(1+x^2)+(1+x^2)^2 - x(2x^2)-(2x^2)^2\right]dx$$

$$= \int_{-1}^{1}(-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1)dx = \left(-3\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{32}{15}$$

$$J = \iint_D (x+2y)\,dxdy, \quad D: \{y = x, y = 1, x = 0\}$$

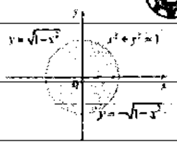
$$D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x \le y \le 1 \end{cases}$$



$$J = \iint_D (x+2y)\,dxdy = \int_0^1\left[\int_x^1 (x+2y)\,dy\right]dx$$

$$= \int_0^1 (xy+y^2)\Big|_x^1 dx = \int_0^1 (-2x^2+x+1)dx = \left(-2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{6}$$

$$J=\iint_D (y+1)\,dxdy,\quad D:\{x^2+y^2\le 1\}$$



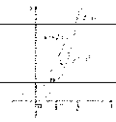
$$D:\{-1\le x\le 1;\ -\sqrt{1-x^2}\le y\le \sqrt{1-x^2}\}$$

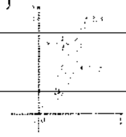
$$J=\iint_D (y+1)\,dxdy=\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(y+1)\,dy\right)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(\frac{y^2}{2}+y\right)\Bigg|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}2\sqrt{1-x^2}\,dx=\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)\Big|_{-1}^{1}=\pi$$

$$J=\iint_D x\,dxdy,\quad D:\{y=2x,\ y=x^2\}$$





$$D=\{(x,y):0\le x\le 2;\ x^2\le y\le 2x\}$$

$$J=\iint_D x\,dxdy=\int_0^2\left[\int_{x^2}^{2x}x\,dy\right]dx$$

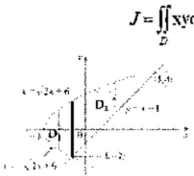
$$=\int_0^2 xy\Big|_{x^2}^{2x}dx=\int_0^2(2x^2-x^3)\,dx=\left(2\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2=\frac{4}{3}$$

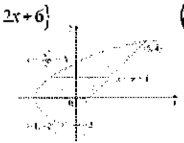
$$D=\left\{(x,y):\frac{1}{2}y\le x\le\sqrt{y},\ 0\le y\le 4\right\}$$

$$J=\iint_D x\,dxdy=\int_0^4\left(\int_{y/2}^{\sqrt{y}}x\,dx\right)dy$$

$$=\int_0^4\frac{x^2}{2}\Bigg|_{y/2}^{\sqrt{y}}dy=\int_0^4\left(\frac{y}{2}-\frac{y^2}{8}\right)dy=\left(\frac{y^2}{4}-\frac{y^3}{24}\right)\Bigg|_0^4=\frac{4}{3}$$

$$J=\iint_D xy\,dxdy,\quad D:\{y=x-1,\ y^2=2x+6\}$$





$$D=D_1\cup D_2$$

$$D_1=\{(x,y):-3\le x\le -1;\ -\sqrt{2x+6}\le y\le\sqrt{2x+6}\}$$

$$D_2=\{(x,y):-1\le x\le 5,\ x-1\le y\le\sqrt{2x+6}\}$$

$$J=\iint_D xy\,dxdy=\iint_{D_1}xy\,dxdy+\iint_{D_2}xy\,dxdy$$

$$D=\left\{(x,y)\mid -2\le y\le 4,\ \tfrac{1}{2}y^2-3\le x\le y+1\right\}$$

$$J=\iint_D xy\,dxdy=\int_{-2}^{4}\int_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1}xy\,dx\,dy=\int_{-2}^{4}\left[\frac{x^2}{2}y\right]_{x=\frac{1}{2}y^2-3}^{x=y+1}dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{4}y\left[(y+1)^2-\left(\tfrac{1}{2}y^2-3\right)^2\right]dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{4}\left(-\frac{y^5}{4}+4y^3+2y^2-8y\right)dy$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{y^6}{24}+y^4+2\frac{y^3}{3}-4y^2\right]_{-2}^{4}=36$$

Đổi biến trong tích phân bội hai

Xét phép đổi biến $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ (*) thoả mãn

1) Các hàm $x(u,v)$ và $y(u,v)$ liên tục và có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trong miền đóng D' của mặt phẳng O'uv.
2) Các công thức (*) xác định một song ánh từ miền D' sang miền D của mặt phẳng Oxy.
3) Định thức Jacobi khác không trong D': $J=\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}x'_u & x'_v\\ y'_u & y'_v\end{vmatrix}\ne 0\ \forall (u,v)\in D'$

Khi đó $\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_{D'} f[x(u,v),y(u,v)]\,|J|\,dudv$

Ví dụ:

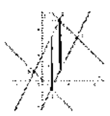
Tính $I=\iint_D (x+y)\,dxdy$, với D được giới hạn bởi các đường $y=-x$, $y=-x+3$, $y=2x-1$, $y=2x+1$

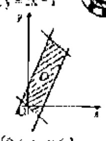
$$D=D_1\cup D_2\cup D_3$$

$$D_1=\left\{(x,y):-\frac{1}{3}\le x\le\frac{1}{3},\ -x\le y\le 2x+1\right\}$$

$$D_2=\left\{(x,y):\frac{1}{3}\le x\le\frac{2}{3},\ 2x-1\le y\le 2x+1\right\}$$

$$D_3=\left\{(x,y):\frac{2}{3}\le x\le\frac{4}{3},\ 2x-1\le y\le -x+3\right\}$$





Phương trình các đường có thể viết lại dưới dạng

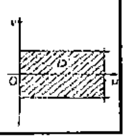
$y+x=0,\ y+x=3,\ y-2x=-1,\ y-2x=1$

$$D:\begin{cases}0\le x+y\le 3\\ -1\le -2x+y\le 1\end{cases}$$

Ta thực hiện phép đổi biến $u=x+y,\ v=-2x+y$

$$\begin{cases}x=\frac{1}{3}u-\frac{1}{3}v\\ y=\frac{2}{3}u+\frac{1}{3}v\end{cases}\Rightarrow J=\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{vmatrix}=\frac{1}{3}$$

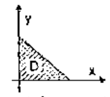
$$I=\iint_{D'}u\frac{1}{3}\,dudv=\frac{1}{3}\iint_{D'}u\,dudv$$



$$D'=\{(u,v):0\le u\le 3,\ -1\le v\le 1\}\qquad I=\frac{1}{3}\int_0^3 u\,du\int_{-1}^{1}dv=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}u^2\Big|_0^3\right)\left(v\Big|_{-1}^{1}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{2}\cdot 2=3$$

Ví dụ: Tính $I=\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dxdy$ với D được giới hạn bởi các đường $x=0,\ y=0,\ x+y=1$

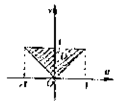
Thực hiện phép đổi biến $\begin{cases}x-y=u\\ x+y=v\end{cases}$ $\quad\begin{cases}x=\frac{1}{2}(u+v)\\ y=\frac{1}{2}(-u+v)\end{cases}$



$$D:\{x\ge 0;\quad y\ge 0;\quad x+y\le 1\}$$

$$J=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}$$

$$I=\iint_{D'}e^{\frac{u}{v}}\frac{1}{2}\,dudv=\frac{1}{2}\iint_{D'}e^{\frac{u}{v}}\,dudv$$

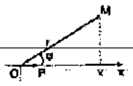


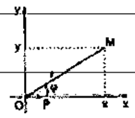
$$D'=\{(u,v):-v\le u\le v,\ 0\le v\le 1\}$$

$$D':\{u+v\ge 0;\quad u-v\ge 0,\quad v\le 1\}$$

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\int_{-v}^{v}e^{\frac{u}{v}}du\right]dv=\frac{1}{2}\int_0^1 v\,e^{\frac{u}{v}}\Big|_{-v}^{v}dv=\frac{1}{2}\int_0^1(e-e^{-1})\,v\,dv=\frac{1}{2}(e-e^{-1})\frac{v^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{4}(e-e^{-1})$$

Tính tích phân kép trong toạ độ cực

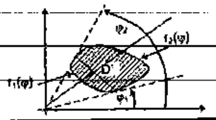




Mối liên hệ giữa toạ độ cực và toạ độ Đề các: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $\quad J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi$$

$$D' = \{(r,\varphi) : \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2, r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi)\}$$

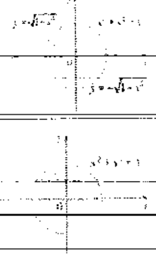


Ví dụ: Tính các tích phân sau

$$I = \iint_D (y+1)dxdy, \quad D: \{x^2 + y^2 \le 1\}$$

$$D: \{-1 \le x \le 1; -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$$

$$I = \iint_D (y+1)dxdy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (y+1)dy\right)dx = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}dx = \left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right)\Big|_{-1}^{1} = \pi$$



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad D': \{0 \le r \le 1; \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\}$$

$$I = \iint_{D'} (r\sin\varphi + 1)rdrd\varphi = \iint_{D'} (r^2\sin\varphi + r)drd\varphi$$

$$I = \int_0^1 dr\int_0^{2\pi} (r^2\sin\varphi + r)d\varphi = \int_0^1 \left(-r^2\cos\varphi + r\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} dr = \int_0^1 2\pi rdr = \pi$$

$$I = \iint_D \sin(x^2 + y^2)dxdy, \quad D: \{1 \le x^2 + y^2 \le 4; y \ge 0\}$$

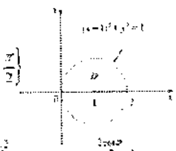
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad D': \{1 \le r \le 2; \quad 0 \le \varphi \le \pi\}$$

$$I = \iint_{D'} \sin r^2 .rdrd\varphi = \int_0^{\pi} d\varphi . \int_1^2 \sin r^2 .rdr$$

$$= \pi\int_1^2 \frac{1}{2}\sin r^2 dr^2 = \pi\left(-\frac{1}{2}\cos r^2\right)\Big|_1^2 = -\frac{\pi}{2}(\cos 4 - \cos 1)$$

$$I = \iint_D xydxdy, \quad D: \{x^2 + y^2 \le 2x\}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad D': \left\{0 \le r \le 2\cos\varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

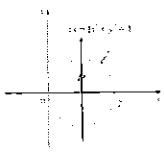


$$I = \iint_{D'} r\cos\varphi . r\sin\varphi . rdrd\varphi = \iint_{D'} r^3\sin\varphi\cos\varphi drd\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^3 dr$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^4}{4}\Big|_0^{2\cos\varphi} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\sin\varphi\cos^5\varphi d\varphi = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos^5\varphi d(\cos\varphi) = -4\frac{\cos^6\varphi}{6}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0$$

$$I = \iint_D xydxdy, \quad D: \{x^2 + y^2 \le 2x\}$$

$$\begin{cases} x - 1 = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 + r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad D': \{0 \le r \le 1; \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\}$$



$$I = \iint_D (1 + r\cos\varphi)r\sin\varphi rdrd\varphi = \iint_D r^2\sin\varphi drd\varphi + \iint_D r^3\cos\varphi\sin\varphi drd\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi . \int_0^1 r^2 dr + \int_0^{2\pi} \cos\varphi\sin\varphi d\varphi . \int_0^1 r^3 dr = 0.\frac{1}{3} + 0.\frac{1}{4} = 0$$

Chương 5. **TÍCH PHÂN BỘI**

5.2. Ứng dụng của tích phân bội hai

(1) Tìm diện tích hình phẳng

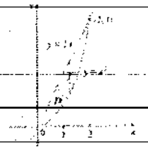
Diện tích hình phẳng D được tính theo công thức $S = \iint\limits_D dxdy$

Ví dụ: Tìm diện tích miền D giới hạn bởi đường thẳng $y = 2x$ và đường parabol $y = x^2$

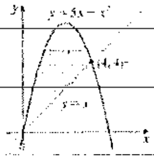
$$S = \iint\limits_D dxdy$$

$$D = \{(x,y): 0 \le x \le 2;\ x^2 \le y \le 2x\}$$

$$S = \int_0^2 \left[\int_{x^2}^{2x} dy\right] dx = \int_0^2 (2x - x^2)dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{4}{3}$$



Ví dụ: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = 5x - x^2$; $y = x$



$$S = \iint\limits_D dxdy$$

$$D = \{(x,y): 0 \le x \le 4;\ x \le y \le 5x - x^2\}$$

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int_0^4 \left[\int_x^{5x-x^2} dy\right] dx = \int_0^4 y\Big|_x^{5x-x^2} dx$$

$$= \int_0^4 [(5x - x^2) - x]dx = \int_0^4 (4x - x^2)dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{32}{3}$$

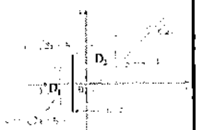
Ví dụ: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = x - 1$; $y^2 = 2x + 6$

$$S = \iint\limits_D dxdy \qquad S = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_{D_1} dxdy + \iint\limits_{D_2} dxdy$$

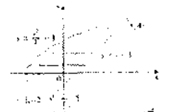
$$D = D_1 \cup D_2$$

$$D_1 = \{(x,y): -3 \le x \le -1;\ -\sqrt{2x+6} \le y \le \sqrt{2x+6}\}$$

$$D_2 = \{(x,y): -1 \le x \le 5;\ x-1 \le y \le \sqrt{2x+6}\}$$



$$D = \left\{(x,y): \frac{1}{2}y^2 - 3 \le x \le y+1;\ -2 \le y \le 4\right\}$$



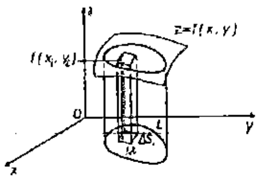
$$S = \iint\limits_D dxdy = \int_{-2}^{4}\left[\int_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1} dx\right]dy = \int_{-2}^{4} x\Big|_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1} dy$$

$$= \int_{-2}^{4}\left[(y+1) - \left(\frac{1}{2}y^2 - 3\right)\right]dy = \int_{-2}^{4}\left(-\frac{1}{2}y^2 + y + 4\right)dy = \left(-\frac{y^3}{6} + \frac{y^2}{2} + 4y\right)\Bigg|_{-2}^{4} = 18$$

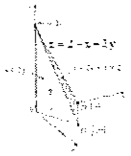
(2) Tìm thể tích vật thể

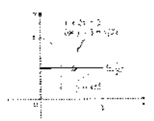
Thể tích của vật thể hình trụ có đáy là miền D, mặt trên được mô tả bởi $z = f(x, y)$, đường sinh song song với Oz:

$$V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$$



Ví dụ: Tính thể tích khối tứ diện giới hạn bởi các mặt $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$, $z = 0$





$$D = \left\{(x,y): 0 \le x \le 1;\ \frac{x}{2} \le y \le 1 - \frac{x}{2}\right\}$$

$$V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}.1.1\right).2 = \frac{1}{3}$$

Tứ diện là vật thể hình trụ có đáy là tam giác D trong mặt phẳng Oxy với các đỉnh $(0,0)$; $\left(1, \frac{1}{2}\right)$; $(0,1)$.

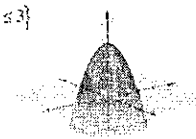
mặt trên giới hạn bởi $z = 2 - x - 2y$

$$V = \iint\limits_D (2 - x - 2y)dxdy = \int_0^1\left[\int_{x/2}^{1-x/2}(2 - x - 2y)dy\right]dx = \int_0^1 (2y - xy - y^2)\Big|_{x/2}^{1-x/2} dx = \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Ví dụ: Tính thể tích khối paraboloit giới hạn bởi các mặt $z = 3 - x^2 - y^2$, $z = 0$

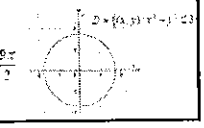
$$V = \iint\limits_D (3 - x^2 - y^2)dxdy \qquad D = \{(x,y): x^2 + y^2 \le 3\}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad D': \{0 \le r \le \sqrt{3};\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$$



$$V = \iint\limits_{D'} (3 - r^2)r\,dr\,d\varphi = \iint\limits_{D'} (3r - r^3)\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} (3r - r^3)dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \left(3\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} .2\pi = \frac{9\pi}{2}$$



(3) Tính diện tích mặt cong

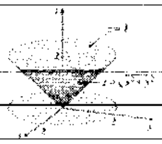
Diện tích mặt cong S được mô tả bởi phương trình $z = f(x, y)$ với $(x, y) \in D$ được xác định bởi công thức:

$$S = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy$$

Ví dụ: Tìm diện tích phần mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 2$

$$S = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy \qquad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 4\}$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2} = \sqrt{2}$$



$$S = \iint_D \sqrt{2}\,dxdy = \sqrt{2}\iint_D dxdy = \sqrt{2}.S_D = \sqrt{2}.\pi 2^2 = 4\pi\sqrt{2}$$

(4) Tìm khối lượng và toạ độ trọng tâm của bản phẳng chiếm miền D

Cho một bản phẳng chiếm miền **D** trong mặt phẳng Oxy, có khối lượng riêng tại M(x, y) là hàm liên tục ρ(x, y). Khi đó khối lượng của bản phẳng được xác định bởi công thức:

$$m = \iint_D \rho(x, y)\,dxdy \qquad \overline{x} = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x, y)\,dxdy \qquad \overline{y} = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x, y)\,dxdy$$

Nếu bản phẳng là đồng chất thì $\rho(x, y) = k > 0$

$$m = \iint_D k\,dxdy = k\iint_D dxdy = k.S_D \qquad \overline{x} = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x, y)\,dxdy = \frac{1}{k.S_D}\iint_D xk\,dxdy = \frac{\iint_D x\,dxdy}{S_D}$$

$$\overline{y} = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x, y)\,dxdy = \frac{\iint_D y\,dxdy}{S_D}$$

Ví dụ: Tìm khối lượng của một tấm kim loại không đồng chất chiếm miền $D : \{y = 2x^2;\ \ y = 1 + x^2\}$, biết hàm mật độ là $\rho(x, y) = x + 2y$

$$m = \iint_D (x + 2y)\,dxdy$$

$$D = \{(x, y) : -1 \le x \le 1, 2x^2 \le y \le 1 + x^2\}$$

$$m = \int_{-1}^{1}\left[\int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y)\,dy\right]dx = \int_{-1}^{1} \left(xy + y^2\right)\Big|_{2x^2}^{1+x^2} dx$$

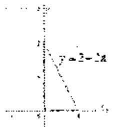
$$= \int_{-1}^{1}\left[x(1 + x^2) + (1 + x^2)^2 - x.(2x^2) - (2x^2)^2\right]dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1\right)dx = \left(-3\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{32}{15}$$

Ví dụ: Tìm khối lượng và trọng tâm của một tấm kim loại chiếm tam giác có 3 đỉnh là (0, 0); (1, 0); (0, 2), biết hàm khối lượng riêng là $\rho(x, y) = 1 + 3x + y$

$$m = \iint_D (1 + 3x + y)\,dxdy \qquad D = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2 - 2x\}$$

$$m = \int_0^1\left[\int_0^{2-2x} (1 + 3x + y)\,dy\right]dx = \int_0^1 \left(y + 3xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2-2x} dx = 4\int_0^1 (1 - x^2)\,dx = \frac{8}{3}$$



$$\overline{x} = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x, y)\,dxdy = \frac{1}{8/3}\iint_D x(1 + 3x + y)\,dxdy = \frac{3}{8}\int_0^1\left[\int_0^{2-2x} (x + 3x^2 + xy)\,dy\right]dx = \frac{3}{4}\int_0^1 (x + x^2 - 2x^3)\,dx = \frac{3}{8}$$

$$\overline{y} = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x, y)\,dxdy = \frac{3}{8}\iint_D y(1 + 3x + y)\,dxdy = \frac{3}{8}\int_0^1\left[\int_0^{2-2x} (y + 3xy + y^2)\,dy\right]dx = \frac{1}{4}\int_0^1 [illegible]\,dx = \frac{11}{16}$$

$$m = \iint_D k\,dxdy = k.S_D = k\frac{1}{2}.1.2 = k \qquad \overline{x} = \frac{\iint_D x\,dxdy}{S_D} = \frac{1/3}{1} = \frac{1}{3} \qquad \overline{y} = \frac{\iint_D y\,dxdy}{S_D} = \frac{2/3}{1} = \frac{2}{3}$$

Chương 5. TÍCH PHÂN BỘI

5.3. Tích phân bội ba

Khái niệm tích phân bội ba

Cho hàm số f(x, y, z) xác định trên miền đóng bị chặn $V \subset R^3$

- Chia V thành n miền nhỏ không dẫm lên nhau

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n$$

- Đặt $\Delta V_k = |V_k|$ (thể tích của V_k)
- Với k = 1, 2, ..., n, lấy tuỳ ý $M_k(x_k, y_k, z_k) \in V_k$
- Lập tổng $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta V_k$

Cho $n \to +\infty$ sao cho $\max V_k \to 0$ mà $S_n \to I$ không phụ thuộc vào cách chia miền V và cách chọn điểm M_k thì I được gọi là tích phân bội 3 của f(x,y,z) trên V.

Kí hiệu: $\iiint_V f(x, y, z)\,dV$

Đặc biệt: nếu f(x,y,z)=1 thì thể tích miền V là $\iiint_V 1\,dV$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV$$

Trong đó: V là miền lấy tích phân, dV là yếu tố thể tích, f(x, y, z) là hàm dưới dấu tích phân

Nếu tích phân $\iiint\limits_V f(x,y,z)dV$ tồn tại, ta nói hàm f(x, y, z) khả tích trên V. Người ta chứng minh được rằng, nếu f(x, y, z) liên tục trong miền đóng bị chặn thì nó khả tích trên đó.

Vì tích phân bội ba không phụ thuộc cách chia miền V, nên ta có thể chia V bởi các mặt phẳng song song với các mặt phẳng toạ độ, tức là dV = dxdydz. Do đó:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$$

Tích phân bội ba có tính chất tương tự tích phân kép

$$\iiint\limits_V [f(x,y,z)+g(x,y,z)]dxdydz = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_V g(x,y,z)dxdydz$$

$$\iiint\limits_V kf(x,y,z)dxdydz = k\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)dxdydz$$

$V = V_1 \cup V_2$

Cách tính tích phân bội 3 trong tọa độ Dềcác

V là khối hộp chữ nhật

Cho hàm số f(x,y,z) liên tục trên miền $V = \{a \le x \le b;\ c \le y \le d;\ p \le z \le q\}$

$$V = [a,b] \times [c,d] \times [p,q]$$

Khi đó:
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_p^q f(x,y,z)dz$$
$$= \int_c^d dy \int_p^q dz \int_a^b f(x,y,z)dx = \ldots$$

Ví dụ: Tính các tích phân sau

$$I = \iiint\limits_V (xy+z)dxdydz \qquad V = [0,1] \times [-1,2] \times [0,2]$$

$$I = \int_0^1 dx \int_{-1}^2 dy \int_0^2 (xy+z)dz = \int_0^1 dx \int_{-1}^2 \left(xyz + \frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 dy = \int_0^1 dx \int_{-1}^2 (2xy+2)dy = \int_0^1 \left(xy^2+2y\right)\Big|_{-1}^2 dx$$
$$= \int_0^1 (3x+6)dx = \left(3\frac{x^2}{2}+6x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{15}{2}$$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^2 dz \int_{-1}^2 (xy+z)dy \qquad I = \int_{-1}^2 dy \int_0^2 dz \int_0^1 (xy+z)dx$$

$I = \ldots$

$$I = \iiint\limits_V (xy+z)dxdydz \qquad V = [0,1] \times [-1,2] \times [0,2]$$

$$I = \iiint\limits_V (xy+z)dxdydz = \iiint\limits_V xydxdydz + \iiint\limits_V zdxdydz$$
$$= \int_0^1 xdx.\int_{-1}^2 ydy.\int_0^2 dz + \int_0^1 dx.\int_{-1}^2 dy.\int_0^2 zdz$$
$$= \frac{1}{2}.\frac{3}{2}.2 + 1.3.2 = \frac{15}{2}$$

$$J = \iiint\limits_V x^2 \sin y dxdydz \qquad V: \begin{cases} x \in [0,2] \\ y \in [0,\pi] \\ z \in [0,2\pi] \end{cases}$$

$$J = \int_0^2 dx \int_0^{2\pi} dz \int_0^{\pi} x^2 \sin y dy = \int_0^{2\pi} dz \int_0^{\pi} dy \int_0^2 x^2 \sin y dx = \ldots$$

$$J = \int_0^2 x^2 dx.\int_0^{\pi} \sin y dy.\int_0^{2\pi} dz = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 .(-\cos y)\Big|_0^{\pi}.z\Big|_0^{2\pi} = \frac{8}{3}.2.2\pi = \frac{32\pi}{3}$$

$$J=\iiint\limits_V\left[\frac{e^{3x}z\cos z^2}{y}-2z\right]dxdydz$$

$$V:\{0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2,\ 0\le z\le 2\}$$

$$J=\int_0^1 dx\int_1^2 dy\int_0^2\left[\frac{e^{3x}z\cos z^2}{y}-2z\right]dz=\ldots$$

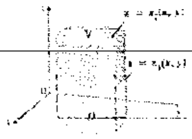
$$J=\iiint\limits_V\frac{e^{3x}z\cos z^2}{y}dxdydz-\iiint\limits_V 2zdxdydz=\int_0^1 e^{3x}dx.\int_1^2\frac{1}{y}dy\boxed{\int_0^2 z\cos z^2dz}-\int_0^1 dx.\int_1^2 dy.\int_0^2 2zdz$$

$$=\frac{e^3-1}{3}.\ln 2.\frac{\sin 4}{2}-1.1.4$$

Cách tính tích phân bội 3 trong tọa độ Đềcác

Nếu miền V được giới hạn bởi các mặt $z=z_1(x,y)$, $z=z_2(x,y)$, trong đó $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ là những hàm số liên tục trong miền D, D là hình chiếu của miền V lên mặt phẳng Oxy

$$V:\begin{cases}z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\\ D=Ch_{Oxy}(V)\end{cases}$$



$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz=\iint\limits_D\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz\right]dxdy$$

$$D=\{(x,y):a\le x\le b;\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz$$

$$V:\begin{cases}x_1(y,z)\le x\le x_2(y,z)\\ D=Ch_{Oyz}(V)\end{cases}$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_D dydz\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)}f(x,y,z)dx=\iint\limits_D\left[\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)}f(x,y,z)dx\right]dydz$$

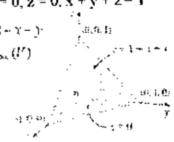
$$V:\begin{cases}y_1(z,x)\le y\le y_2(z,x)\\ D=Ch_{Oxz}(V)\end{cases}$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_D dzdx\int_{y_1(z,x)}^{y_2(z,x)}f(x,y,z)dy=\iint\limits_D\left[\int_{y_1(z,x)}^{y_2(z,x)}f(x,y,z)dy\right]dzdx$$

Ví dụ: Tính tích phân sau

$I=\iiint\limits_V 2xdxdydz$ V là miền được giới hạn bởi các mặt: x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1

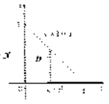
$$V:\begin{cases}0\le z\le 1-x-y\\ D=Ch_{Oxy}(V)\end{cases}$$



$$I=\iiint\limits_V 2xdxdydz=\iint\limits_D\left[\int_0^{1-x-y}2xdz\right]dxdy$$

$$=\iint\limits_D 2xz\Big|_0^{1-x-y}dxdy=\iint\limits_D 2x(1-x-y)dxdy$$

$$D:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1-x\end{cases}$$



$$I=\iint\limits_D(2x-2x^2-2xy)dxdy=\int_0^1\int_0^{1-x}(2x-2x^2-2xy)dydx$$

$$=\int_0^1\left[2xy-2x^2y-xy^2\right]_0^{1-x}dx=\int_0^1(x^3-2x^2+x)dx=\left(\frac{x^4}{4}-2\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{12}$$

$$I=\iiint\limits_V 2xdxdydz\qquad V:\begin{cases}0\le z\le 1-x-y\\ D=Ch_{Oxy}(V)\end{cases}\qquad D:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1-x\end{cases}$$

$$V:\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x,\ 0\le z\le 1-x-y\}$$

$$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}2xdz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(2x-2x^2-2xy)dy$$

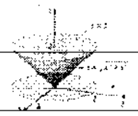
$$=\int_0^1(x^3-2x^2+x)dx=\left(\frac{x^4}{4}-2\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{12}$$

$$I=\iiint\limits_V ydxdydz\qquad V:\begin{cases}0\le x\le y+z\\ 0\le y\le z\\ 0\le z\le 3\end{cases}$$

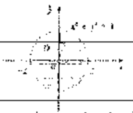
$$I=\int_0^3 dz\int_0^z dy\int_0^{y+z}ydx=\int_0^3 dz\int_0^z xy\Big|_0^{y+z}dy=\int_0^3 dz\int_0^z(y^2+yz)dy=\int_0^3\left(\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}z\right)\Bigg|_0^z dz$$

$$=\int_0^3\frac{5z^3}{6}dz=\frac{5z^4}{24}\Bigg|_0^3=\frac{5}{24}$$

Tính tích phân $I = \iiint\limits_V z\,dxdydz$ trong đó $V = \{(x, y, z): \ z = \sqrt{x^2 + y^2}; \ z = 2\}$



$$V: \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 2 \\ D = Ch_{Oxy}(V) \end{cases}$$



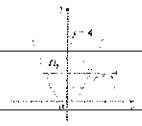
$D = \{(x, y): x^2 + y^2 \le 4\}$

$$I = \iiint\limits_V z\,dxdydz = \iint\limits_D \left[\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} z\,dz \right] dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_D (4 - x^2 - y^2)\,dxdy$$

Đổi sang tọa độ cực, ta được: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $\quad D': \{0 \le r \le 2; \ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$

$$I = \frac{1}{2}\iint\limits_{D'} (4 - r^2)\,r\,dr\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^2 (4r - r^3)\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2}\left(2r^2 - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 .2\pi = 4\pi$$

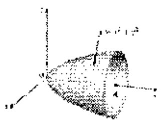
Tính tích phân $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + z^2}\,dxdydz$ trong đó $V = \{(x, y, z): \ y = x^2 + z^2; \ y = 4\}$



$$V: \left\{-2 \le x \le 2, x^2 \le y \le 4, \ -\sqrt{y - x^2} \le z \le \sqrt{y - x^2}\right\}$$

$$I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + z^2}\,dxdydz = \int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} dy \int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}} \sqrt{x^2 + z^2}\,dz$$

Tính tích phân $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + z^2}\,dxdydz$ trong đó $V = \{(x, y, z): \ y = x^2 + z^2; \ y = 4\}$



$$V: \begin{cases} x^2 + z^2 \le y \le 4 \\ D = Ch_{Oxz}(V) \end{cases}$$

$$I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + z^2}\,dxdydz = \iint\limits_D \left[\int_{x^2+z^2}^{4} \sqrt{x^2 + z^2}\,dy \right] dzdx \qquad D = \{(z, x): x^2 + z^2 \le 4\}$$

$$= \iint\limits_D \sqrt{x^2 + z^2}\,(4 - x^2 - z^2)\,dzdx$$

$\begin{cases} z = r\cos\varphi \\ x = r\sin\varphi \end{cases}$ $\quad D' = \begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$ $\quad I = \iint\limits_{D'} r(4 - r^2)\,r\,dr\,d\varphi = \int_0^2 (4r^2 - r^4)\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{64}{15}.2\pi = \frac{128\pi}{15}$

Bài tập. Tính các tích phân sau

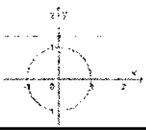
$I = \iiint\limits_V z\,dxdydz$ trong đó $V = \{(x, y, z): 0 \le x \le 1, x \le y \le 2x; 0 \le z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$

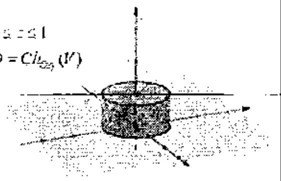
$J = \iiint\limits_V (xy + z)\,dxdydz$ trong đó V là miền giới hạn bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$ và các mặt $z = 0$; $z = 1$.

Đáp số: $I = -\frac{1}{6}$ $\quad J = \frac{\pi}{2}$

$$V: \begin{cases} 0 \le z \le 1 \\ D = Ch_{Oxy}(V) \end{cases}$$

$D = \{(x, y): x^2 + y^2 \le 1\}$





Đổi biến số trong tích phân bội ba

Xét tích phân $\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz$, trong đó $f(x, y, z)$ là hàm liên tục trên V.

Phép đổi biến $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ (*) thoả mãn:

1) Các hàm $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$ liên tục và có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trong miền đóng V' của không gian O'uvw.

2) Các công thức (*) xác định một song ánh từ miền V' sang miền V của không gian Oxyz.

3) Định thức Jacobi khác không trong V'.

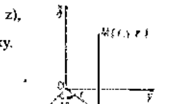
$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \ne 0 \ \forall (u, v, w) \in V'$$

Khi đó: $\boxed{\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))\,|J|\,dudvdw}$

Đổi biến trong tọa độ trụ

Tọa độ trụ của điểm M(x, y, z) trong không gian là bộ ba (r, φ, z), trong đó cặp (r, φ) chính là tọa độ cực của hình chiếu của M lên Oxy.

Mối liên hệ giữa tọa độ Đề Các và tọa độ trụ là: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$



$0 \le \varphi \le 2\pi, r \ge 0, -\infty \le z \le +\infty$

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \Rightarrow dxdydz = r\,dr\,d\varphi\,dz$$

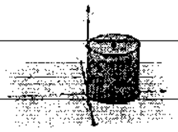
Vậy $\boxed{\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,r\,dr\,d\varphi\,dz}$

Ví dụ: Tính $I=\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,z\,dxdydz$, V là hình trụ được giới hạn bởi các mặt

$z=0,\ z=2$ và $x^2+y^2=2y$

Đổi sang tọa độ trụ, ta được

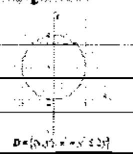
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad I=\iiint\limits_{V'} r.z.r\,drd\varphi dz$$



$$V'=\{0\le\varphi\le\pi;\quad 0\le r\le 2\sin\varphi;\quad 0\le z\le 2\}$$

$$I=\iiint\limits_{V'} r^2 z\,drd\varphi dz=\int_0^2 zdz.\int_0^\pi d\varphi\int_0^{2\sin\varphi} r^2dr=2.\int_0^\pi \frac{r^3}{3}\Bigg|_0^{2\sin\varphi}d\varphi$$

$$=2\int_0^\pi\frac{8}{3}\sin^3\varphi d\varphi=\frac{16}{3}\int_0^\pi\left(-1+\cos^2\varphi\right)d\cos\varphi=\frac{16}{3}\left(-\cos\varphi+\frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^\pi=\frac{16}{3}.\frac{4}{3}=\frac{64}{9}$$



Tính tích phân $I=\iiint\limits_V 2x^2z\,dxdydz$ trong đó $V=\{(x,y,z):\ z=-x^2-y^2;\ z=-1\}$

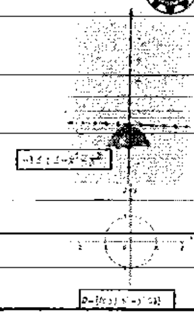
Đổi sang tọa độ trụ, ta được $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$

$$I=\iiint\limits_{V'} 2(r\cos\varphi)^2\,zrdrd\varphi dz$$

$$V'=\{0\le\varphi\le 2\pi;\quad 0\le r\le 1;\quad -1\le z\le -r^2\}$$

$$I=\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi.\int_0^1 dr\int_{-1}^{-r^2}2zr^3dz=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos2\varphi}{2}d\varphi.\int_0^1 r^3z^2\Big|_{-1}^{-r^2}dr$$

$$=\left[\frac{1}{2}\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{2\pi}\int_0^1\left(r^7-r^3\right)dr=\pi.\left(-\frac{1}{8}\right)=-\frac{\pi}{8}$$

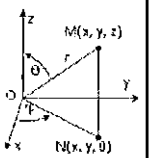


Đổi biến trong tọa độ cầu

Trong không gian xét điểm M(x, y, z) và hình chiếu N của M lên Oxy.

Gọi φ là góc tạo bởi trục Ox với $\overrightarrow{ON}$, θ là góc tạo bởi trục Oz với $\overrightarrow{OM}$, và $r=|\overrightarrow{OM}|$

Tọa độ cầu của điểm M(x, y, z) là bộ ba (r, φ, θ)



Mối liên hệ giữa tọa độ Đề các và tọa độ cầu là:

$x=r\cos\varphi\sin\theta,\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\ z=r\cos\theta,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\theta\le\pi,\ r\ge 0$

Khi đó, $J=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{vmatrix}=-r^2\sin\theta$

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\,r^2\sin\theta drd\varphi d\theta}$$

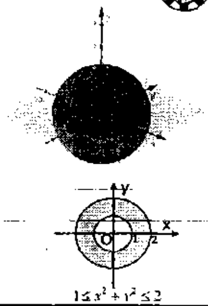
Ví dụ: Tính $I=\iiint\limits_V\frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $V=\{(x,y,z): 1\le x^2+y^2+z^2\le 4\}$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$I=\iiint\limits_{V'}\frac{1}{r}r^2\sin\theta drd\varphi d\theta=\iiint\limits_{V'} r\sin\theta drd\varphi d\theta$$

$$V'=\{1\le r\le 2;\ 0\le\varphi\le 2\pi;\ 0\le\theta\le\pi\}$$

$$I=\int_1^2 rdr.\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\pi\sin\theta d\theta=\frac{r^2}{2}\Bigg|_1^2.2\pi.(-\cos\theta)\Big|_0^\pi=\frac{3}{2}.2\pi.2=6\pi$$



Ví dụ: Tính $I=\iiint\limits_V(x^2+y^2)dxdydz$, V là nửa trên của hình cầu $x^2+y^2+z^2\le 4$

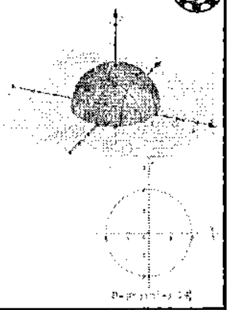
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$I=\iiint\limits_{V'} r^2\sin^2\theta\, r^2\sin\theta drd\varphi d\theta=\iiint\limits_{V'} r^4\sin^3\theta drd\varphi d\theta$$

$$V'=\{(r,\varphi,\theta):\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le r\le 2\}$$

$$I=\int_0^2 r^4dr.\int_0^{2\pi}d\varphi.\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta d\theta=\frac{r^5}{5}\Bigg|_0^2.2\pi.\int_0^{\pi/2}\left(-1+\cos^2\theta\right)d\cos\theta$$

$$=\frac{32}{5}.2\pi\left(-\cos\theta+\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{32}{5}.2\pi.\frac{2}{3}=\frac{128\pi}{15}$$



Chương 5. **TÍCH PHÂN BỘI**

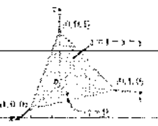
5.4. Ứng dụng của tích phân bội ba

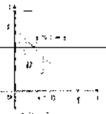
(1) Tìm thể tích vật thể

Thể tích vật thể giới hạn bởi miền V được xác định bởi: $\iiint\limits_V dV = \iiint\limits_V dxdydz$

Ví dụ: Tính thể tích của vật thể V giới hạn bởi mặt phẳng $x+y+z=1$ và các mặt phẳng tọa độ.

Thể tích cần tìm là: $\iiint\limits_V dxdydz$





$$\iiint\limits_V dxdydz = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} dzdydx$$

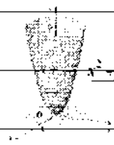
$$= \int_0^1\int_0^{1-x}(1-x-y)dydx = \int_0^1\left(\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{6}$$

$$V:\begin{cases}0\le z\le 1-x-y\\ D = Ch_{Oxy}(V)\end{cases} \qquad D:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1-x\end{cases}$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\right)\cdot 1 = \frac{1}{6}$$

Ví dụ: Tính thể tích của vật thể V giới hạn bởi mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$ và mặt phẳng $z = 9$.

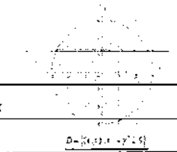
Thể tích cần tìm là: $\iiint\limits_V dxdydz$



Đổi sang tọa độ trụ, ta được

$$\begin{cases}x = r\cos\varphi\\ y = r\sin\varphi\\ z = z\end{cases} \qquad \iiint\limits_V dxdydz = \iiint\limits_{V'} rdrd\varphi dz = I$$

$$V' = \{0\le\varphi\le 2\pi;\ 0\le r\le 3;\ r^2\le z\le 9\}$$



$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^3 dr\int_{r^2}^9 rdz = 2\pi\int_0^3 rz\Big|_{r^2}^9 dr = 2\pi\int_0^3 (9r - r^3)dr = 2\pi\cdot\frac{81}{4} = \frac{81\pi}{2}$$

(2) Tìm khối lượng và trọng tâm vật thể

Cho vật thể chiếm miền V trong không gian, có khối lượng riêng tại M(x, y, z) là hàm ρ(x, y, z) liên tục trên V.

Khi đó khối lượng của vật thể được tính theo công thức: $m = \iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz$

Tọa độ trọng tâm G được tính theo công thức:

$$x_G = \frac{1}{m}\iiint\limits_V x\rho(x,y,z)dxdydz,\quad y_G = \frac{1}{m}\iiint\limits_V y\rho(x,y,z)dxdydz,\quad z_G = \frac{1}{m}\iiint\limits_V z\rho(x,y,z)dxdydz$$

Nếu vật thể đồng chất thì: $x_G = \frac{1}{V}\iiint\limits_V xdxdydz,\quad y_G = \frac{1}{V}\iiint\limits_V ydxdydz,\quad z_G = \frac{1}{V}\iiint\limits_V zdxdydz$

Ví dụ: Tìm khối lượng của một khối thép có dạng nón, chiếm khối $V:\{z = \sqrt{x^2+y^2}, z = 2\}$. Biết hàm mật độ là $\rho(x,y,z) = z$

$$m = \iiint\limits_V zdxdydz$$

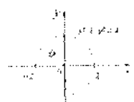
Đổi sang tọa độ trụ, ta được

$$\begin{cases}x = r\cos\varphi\\ y = r\sin\varphi\\ z = z\end{cases} \qquad m = \iiint\limits_{V'} zrdrd\varphi dz \qquad V' = \{0\le\varphi\le 2\pi;\ 0\le r\le 2;\ r\le z\le 2\}$$

$$m = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^2 dr\int_r^2 zrdz = 2\pi\int_0^2 r\frac{z^2}{2}\Big|_r^2 dr = 2\pi\int_0^2 r\left(2 - \frac{r^2}{2}\right)dr = 2\pi\cdot 2 = 4\pi$$

$$m = \iiint\limits_V zdxdydz$$

$$V:\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2\\ D = Ch_{Oxy}(V)\end{cases}$$



$D = \{(x,y): x^2+y^2\le 4\}$

$$m = \iiint\limits_V zdxdydz = \iint\limits_D\left[\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 zdz\right]dxdy \quad \boxed{= \frac{1}{2}\iint\limits_D (4 - x^2 - y^2)dxdy} \qquad D:\{-2\le x\le 2;\ -\sqrt{4-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2}\}$$

Đổi sang tọa độ cực, ta được: $\begin{cases}x = r\cos\varphi\\ y = r\sin\varphi\end{cases} \qquad D':\{0\le r\le 2;\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$

$$m = \frac{1}{2}\iint\limits_{D'}(4 - r^2)rdrd\varphi = \frac{1}{2}\int_0^2(4r - r^3)dr\int_0^{2\pi}d\varphi = \frac{1}{2}\left(2r^2 - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^2\cdot 2\pi = 4\pi$$

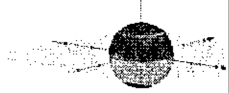
Ví dụ: Xác định trọng tâm của vật thể đồng chất giới hạn bởi $V = \{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 1, z\ge\sqrt{x^2+y^2}\}$

$$x_G = \frac{1}{V}\iiint\limits_V xdxdydz,\quad y_G = \frac{1}{V}\iiint\limits_V ydxdydz \quad \boxed{z_G = \frac{1}{V}\iiint\limits_V zdxdydz}$$

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2 = 1\\ z = \sqrt{x^2+y^2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}z = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ x^2+y^2 = \frac{1}{2}\end{cases}$$

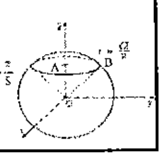
Do tính đối xứng nên $x_G = y_G = 0$

Đổi sang tọa độ cầu, ta được



$$\begin{cases}x = r\cos\varphi\sin\theta\\ y = r\sin\varphi\sin\theta\\ z = r\cos\theta\end{cases} \qquad V' = \left\{0\le r\le 1;\ 0\le\varphi\le 2\pi;\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}$$

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \iiint\limits_{V'} r^2\sin\theta drd\varphi d\theta = \int_0^1 r^2dr\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/4}\sin\theta d\theta = \frac{r^3}{3}\Big|_0^1\cdot 2\pi\cdot(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi$$



$$\iiint\limits_V zdxdydz = \iiint\limits_{V'} r\cos\theta\, r^2\sin\theta drd\varphi d\theta = \iiint\limits_{V'} r^3\cos\theta\sin\theta drd\varphi d\theta = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/4}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^1 r^3dr = \frac{\pi}{8}$$

$$z_G = \frac{\frac{\pi}{8}}{\frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi} = \frac{3}{16}(2+\sqrt{2})$$

Chương 6. **PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN**

6.1. Phương trình vi phân cấp 1

6.2. Phương trình vi phân cấp 2

6.3. Hệ phương trình vi phân

6.1. Phương trình vi phân cấp 1

1. Đại cương về phương trình vi phân cấp 1:

Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp một là: $F(x, y, y') = 0$

Nếu giải ra được y', phương trình sẽ có dạng: $y' = f(x, y)$

Hoặc $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

Ví dụ: Các phương trình sau là các phương trình vi phân cấp một

$\boxed{(x^2+1)y' + xy - 1 = 0}$ $\boxed{y' = \frac{x+y}{x-y}}$ $\boxed{(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0}$

$\boxed{y^2 + y'^2 = 1}$ $\boxed{x = y'^2 + y' + 1 \quad y' = \cos x}$

$$F(x, y, y') = 0$$

Ta gọi nghiệm của phương trình vi phân là mọi hàm số thoả mãn phương trình ấy.

Nghiệm tổng quát dạng: $y = y(x, C)$ Nghiệm riêng dạng: $y = y(x, C_0)$

Tích phân tổng quát dạng: $\varphi(x, y, C) = 0$ Tích phân riêng dạng: $\varphi(x, y, C_0) = 0$

Nghiệm tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t, C) \end{cases}$ $\begin{cases} x = x(t, C) \\ y = y(t) \end{cases}$

Nghiệm kỳ dị của phương trình vi phân cấp một là nghiệm nhưng không suy ra được từ nghiệm tổng quát hoặc tích phân tổng quát.

Phương trình $y' = \cos x$ có nghiệm tổng quát là $\boxed{y = \sin x + C}$ với $C = 1$: $y = \sin x + 1$ là một nghiệm riêng của phương trình đã cho.

Phương trình $(1 + x)ydx + (1 - y)xdy = 0$ có nghiệm là $\boxed{\ln|xy| + x - y = C}$ đây là tích phân tổng quát của phương trình, với $C = 2$: $\ln|xy| + x - y = 2$ là tích phân riêng của phương trình. Dễ thấy $x = 0$, $y = 0$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho, chúng là các nghiệm kì dị của phương trình.

Phương trình $x = y'^2 + y' + 1$ có nghiệm là $\boxed{x = t^2 + t + 1,\ y = \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + C}$ đây là nghiệm tham số của phương trình đã cho.

Định lý: *(sự tồn tại và duy nhất nghiệm)*

Cho phương trình vi phân cấp một dạng $y' = f(x, y)$.

Giả sử $f(x, y)$ liên tục trong miền D nào đó của mặt phẳng Oxy và (x_0, y_0) là một điểm của D.

Khi đó trong lân cận nào đó của điểm $x = x_0$ tồn tại ít nhất một nghiệm $y = y(x)$ sao cho $y(x_0) = y_0$.

Nếu ngoài ra $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ cũng liên tục trong miền D thì nghiệm ấy là duy nhất.

Điều kiện $y(x_0) = y_0$ được gọi là *điều kiện đầu* và thường được viết là $y\big|_{x=x_0} = y_0$

Về mặt hình học, nghiệm tổng quát của phương trình $y' = f(x, y)$ được biểu diễn bởi một họ đường tích phân $y = \varphi(x, C)$ phụ thuộc một tham số, định lí trên khẳng định rằng với các điều kiện đã nêu, trong một lân cận nào đó của (x_0, y_0) tồn tại duy nhất một đường tích phân của phương trình $y' = f(x, y)$ đi qua điểm ấy

2. Phương trình khuyết

Phương trình khuyết y: $F(x, y') = 0$

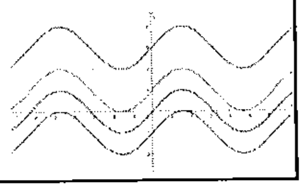
Ví dụ: Giải phương trình $y' = \cos x$

Ta có $y = \int \cos x dx = \sin x + C$ là nghiệm tổng quát của phương trình đã cho.

Giải phương trình $y' = \cos x$ thỏa mãn điều kiện $y\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 4$

Từ nghiệm tổng quát $y = \sin x + C \Rightarrow 4 = \sin\frac{\pi}{2} + C \Rightarrow C = 3$

Vậy nghiệm riêng thỏa mãn bài toán là $y = \sin x + 3$



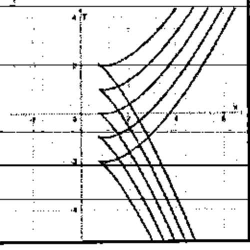
Ví dụ: Giải phương trình $x = y'^2 + y' + 1$

Đặt $y' = t$, suy ra $x = t^2 + t + 1$, $dx = (2t + 1)\,dt$

Vì $dy = y'dx \Rightarrow dy = t(2t + 1)dt = (2t^2 + t)dt \Rightarrow y = \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + C$

Phương trình tham số của đường tích phân là:

$x = t^2 + t + 1,\ y = \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + C$



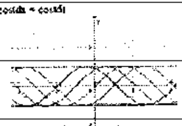
Phương trình khuyết x: $F(y, y') = 0$

Ví dụ: Giải các phương trình sau $\quad y'^2 + y^2 = 1$

Đặt $y = \sin t$ và $y' = \cos t$, ta có $dy = y'dx = \cos t\,dx$. Mặt khác, do $y = \sin t$ nên $dy = \cos t\,dt$. Vậy $\cos t\,dx = \cos t\,dt$

Xét hai trường hợp:

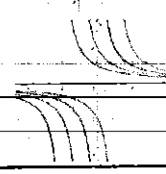
- $\cos t \neq 0$: $\Rightarrow dt = dx \Rightarrow t = x + C$. Kết hợp với $y = \sin t$ ta có họ nghiệm $y = \sin(x + C)$
- $\cos t = 0$: $\Rightarrow t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Kết hợp với $y = \sin t$ ta có hai nghiệm riêng $y = \pm 1$



Ta thấy hai nghiệm riêng $y = \pm 1$ không nằm trong họ nghiệm tổng quát $y = \sin(x + C)$, nên đó là hai nghiệm kỳ dị của phương trình.

$y^3 + 2yy' = 0$

$$y\left(y^2 + 2y'\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y^2 + 2y' = 0 \Rightarrow 2\frac{dy}{dx} = -y^2 \Rightarrow 2\frac{dy}{-y^2} = dx \Rightarrow \frac{2}{y} = x + C \end{cases}$$



3. Phương trình phân li biến số

Đó là phương trình có dạng $\quad f(x)dx = g(y)dy$

Tích phân hai vế ta được $\int f(x)dx = \int g(y)dy$, hay $F(x) = G(y) + C$, trong đó $F(x)$ và $G(x)$ tương ứng là một nguyên hàm của $f(x)$ và $g(x)$

Ví dụ: Giải các phương trình vi phân sau

$$xdy = \left(3x^2 + 1\right)\left(1 + y^2\right)dx$$

Dễ thấy x = 0 là một nghiệm của phương trình

$$x \neq 0 \Rightarrow \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{3x^2 + 1}{x}dx \quad \Rightarrow \int \frac{dy}{1 + y^2} = \int \frac{3x^2 + 1}{x}dx$$

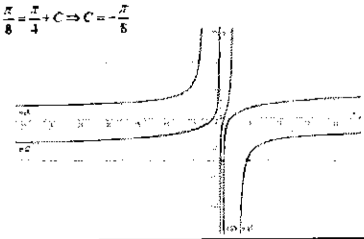
$$\Rightarrow \arctan y + C = \int\left(3x + \frac{1}{x}\right)dx \Rightarrow \arctan y + C = 3\frac{x^2}{2} + \ln|x|$$

Tìm nghiệm của phương trình $(x^2 + 1)y' = y^2 + 4$ thoả mãn $y\big|_{x=1} = 2$

$$\left(x^2 + 1\right)\frac{dy}{dx} = y^2 + 4 \Rightarrow \frac{dy}{y^2 + 4} = \frac{dx}{x^2 + 1} \quad \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2 + 4} = \int \frac{dx}{x^2 + 1} \Rightarrow \frac{1}{2}\arctan\frac{y}{2} = \arctan x + C$$

$$y\big|_{x=1} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2}\arctan\frac{2}{2} = \arctan 1 + C \Rightarrow \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} + C \Rightarrow C = -\frac{\pi}{8}$$

$$\frac{1}{2}\arctan\frac{y}{2} = \arctan x - \frac{\pi}{8}$$



4. Phương trình thuần nhất (phương trình đẳng cấp):

Đó là phương trình vi phân có dạng: $\quad y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

(Ta thấy phương trình ấy không đổi khi ta thay x = kx, y = ky với k là hằng số khác 0)

Ví dụ: Các phương trình vi phân sau là phương trình thuần nhất.

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{\sin(y/x)} \qquad y' - \frac{y}{x} - e^{y/x} = 0$$

$$y' = \frac{x + 2y}{2x - y} \qquad (x + y)dx = (x - y)dy$$

$$xyy' + x^2 - 2y^2 = 0 \qquad xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$$

Cách giải phương trình thuần nhất:

$$y' = f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Đặt: $\quad u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = u.x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u.1$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx}x + u = \varphi(u) \Rightarrow x\frac{du}{dx} = \varphi(u) - u$$

Phương trình thu được là phương trình phân li biến số (phương trình vi phân hàm u, biến x).

Ví dụ: Giải các phương trình vi phân sau

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{\sin(y/x)}$$

Đặt: $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = u.x \Rightarrow y' = u'x + u.1$

Phương trình có dạng: $u'x + u = u + \dfrac{1}{\sin u}$

$$\Rightarrow u'x = \frac{1}{\sin u} \Rightarrow \frac{du}{dx}x = \frac{1}{\sin u} \Rightarrow \sin u\,du = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int \sin u\,du = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow -\cos u = \ln|x| + C \Rightarrow -\cos\frac{y}{x} = \ln|x| + C$$

$$y' = \frac{x+2y}{2x-y}$$

Dễ thấy x = 0 không là nghiệm của phương trình.

$x \neq 0 \Rightarrow y' = \dfrac{1 + 2\frac{y}{x}}{2 - \frac{y}{x}}$ Đặt: $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = u.x \Rightarrow y' = u'x + u.1$

Phương trình có dạng: $u'x + u = \dfrac{1+2u}{2-u} \Rightarrow u'x = \dfrac{1+2u}{2-u} - u \Rightarrow \dfrac{du}{dx}x = \dfrac{1+u^2}{2-u} \Rightarrow \dfrac{2-u}{1+u^2}du = \dfrac{dx}{x}$

$$\Rightarrow \int \frac{2-u}{1+u^2}du = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow 2\arctan u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln|x| + C$$

$$\Rightarrow 2\arctan\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = \ln|x| + C$$

5. Phương trình vi phân toàn phần

Là phương trình có dạng: P(x,y)dx + Q(x, y)dy = 0 (*)

trong đó P(x, y), Q(x, y) là những hàm số liên tục và có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trong một miền đơn liên D thoả mãn điều kiện $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

Khi đó Pdx + Qdy là vi phân toàn phần của một hàm số u(x, y) nào đó

Nếu D = R^2, hàm số u(x, y) được cho bởi công thức:

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy + K \quad \text{hoặc } u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy + K$$

trong đó x_0, y_0 là hai số nào đó, K là hằng số tuỳ ý.

Phương trình (*) có thể viết là du(x, y) = 0, tích phân tổng quát của nó là u(x, y) = C

Ví dụ: Giải phương trình $[(1 + x + y)e^x + e^y]dx + [e^x + xe^y]dy = 0$

Ta có $P(x, y) = (1 + x + y)e^x + e^y$, $Q(x, y) = e^x + xe^y \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = e^x + e^y = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

Vậy Pdx + Qdy là vi phân toàn phần của hàm số u(x, y).

Chọn $x_0 = y_0 = 0$, ta được

$$u(x, y) = \int_0^x [(1+x)e^x + 1]dx + \int_0^y (e^x + xe^y)dy + K =$$

$$= (xe^x + x) + (e^x y + xe^y - x) + K = (x + y)e^x + xe^y + K$$

Tích phân tổng quát của phương trình là $(x + y)e^x + xe^y = C$

Chú ý: Trường hợp phương trình P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 không phải là phương trình vi phân toàn phần. Nếu ta tìm được một hàm số α(x, y) sao cho: α(x, y)[P(x, y)dx + Q(x, y)dy] = 0 trở thành phương trình vi phân toàn phần, tức là sao cho $\dfrac{\partial(\alpha P)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\alpha Q)}{\partial x}$, thì α(x, y) được gọi là *thừa số tích phân* của phương trình P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.

Ví dụ: Giải phương trình $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$ bằng cách tìm một thừa số tích phân α(y).

Ta có: $\alpha(y)P(x, y) = \alpha(y).(2xy^2 - 3y^3)$; $\alpha(y)Q(x, y) = \alpha(y).(7 - 3xy^2)$

$$[\alpha(y)P(x,y)]'_y = [\alpha(y)Q(x,y)]'_x \Leftrightarrow \alpha'(y)(2xy^2 - 3y^3) + \alpha(y)(4xy - 9y^2) = -3y^2\alpha(y)$$

$$2y\alpha(y)(2x - 3y) + y^2\alpha'(y)(2x - 3y) = 0$$

Với điều kiện $y \neq 0$, $2x - 3y \neq 0$, ta thu được: $2\alpha + y\dfrac{d\alpha}{dy} = 0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{C}{y^2}$

Chọn C = 1, ta được phương trình vi phân toàn phần: $(2x - 3y)dx + \left(\dfrac{7}{y^2} - 3x\right)dy = 0 \Leftrightarrow du(x, y) = 0$

Chọn $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, ta được $u(x, y) = \int_0^x (2x - 3)dx + \int_1^y \left(\dfrac{7}{y^2} - 3x\right)dy = x^2 - \dfrac{7}{y} - 3xy + 7$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $x^2 - \dfrac{7}{y} - 3xy + 7 = C$, C là hằng số tuỳ ý.

Dễ kiểm tra rằng y = 0 cũng là một nghiệm của phương trình, nhưng $y = \dfrac{2}{3}x$ không là nghiệm của phương trình

6. Phương trình tuyến tính cấp 1

Đó là phương trình có dạng: $y' + p(x)y = q(x)$ (1), trong đó $p(x)$ và $q(x)$ là những hàm số liên tục trong khoảng (a, b) nào đó.

Phương trình tuyến tính *thuần nhất* tương ứng có dạng: $y' + p(x)y = 0$ (2)

Trước hết ta giải phương trình thuần nhất tương ứng (2).

Nếu $y \neq 0$, ta có $\frac{dy}{y} = -p(x)dx \Rightarrow \ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C|$, với C là hằng số tuỳ ý

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (2) là: $y = Ce^{-\int p(x)dx}$

Dễ thấy rằng $y = 0$ cũng là một nghiệm riêng của (2) ứng với $C = 0$.

Xem C là một hàm số sao cho $y = Ce^{-\int p(x)dx}$ thoả mãn phương trình không thuần nhất: $y' + p(x)y = q(x)$ (1)

tức là: $\boxed{e^{-\int p(x)dx}.C'(x) - C(x).p(x).e^{-\int p(x)dx} + p(x).C(x).e^{-\int p(x)dx} = q(x)}$

hay $\frac{dC}{dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}$

Do đó $C = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + K$, với K là một hằng số tuỳ ý.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (1) là: $y = Ke^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}.\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$ (3)

Phương pháp trên được gọi là phương pháp *biến thiên hằng số*.

$y' + p(x)y = q(x)$ (1) $\qquad y' + p(x)y = 0$ (2)

$y = Ke^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}.\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$ (3)

Ta thấy rằng số hạng thứ hai trong vế phải của (3) là một nghiệm riêng của phương trình (1) ứng với K = 0, còn số hạng thứ nhất là nghiệm tổng quát của phương trình (2).

Có thể chứng minh một cách tổng quát rằng: nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất bằng nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng cộng với một nghiệm riêng nào đó của phương trình không thuần nhất.

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[K + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right]$$

Ví dụ: Giải phương trình sau

$$y' - 6xy = (x+1)e^{3x^2}$$

Đây là phương trình tuyến tính với $p(x) = -6x$ và $q(x) = (x+1)e^{3x^2}$

Áp dụng công thức nghiệm: $y = e^{-\int p(x)dx}\left[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right]$

$\int p(x)dx = \int -6xdx = -3x^2 \quad \Rightarrow e^{\int p(x)dx} = e^{-3x^2}; \quad e^{-\int p(x)dx} = e^{3x^2}$

$\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx = \int (x+1)e^{3x^2}e^{-3x^2}dx = \int (x+1)dx = \frac{x^2}{2} + x$

Nghiệm của phương trình là: $y = e^{3x^2}\left[C + \frac{x^2}{2} + x\right]$

Ví dụ: Tìm nghiệm riêng của phương trình $(x^2+1)y' + xy = 1$ thoả mãn điều kiện $y(0) = 2$

Phương trình trên được viết lại là $y' + \frac{x}{x^2+1}y = \frac{1}{x^2+1}$. Khi đó $p(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $q(x) = \frac{1}{x^2+1}$

$\int p(x)dx = \int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) \quad \Rightarrow e^{\int p(x)dx} = \sqrt{x^2-1}, \quad e^{-\int p(x)dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx = \int \frac{1}{x^2+1}\sqrt{x^2+1}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right|$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\left[K - \ln\left|x - \sqrt{x^2-1}\right|\right]$

Thay điều kiện đầu $y(0) = 2$ ta tìm được $K = 2$. Vậy nghiệm riêng cần tìm là $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\left[2 - \ln\left|x - \sqrt{x^2-1}\right|\right]$

Ví dụ: Giải phương trình sau $(xe^y - 1)y' + e^y = 0$

$(xe^y - 1)\frac{dy}{dx} + e^y = 0 \Rightarrow e^y\frac{dx}{dy} = 1 - xe^y \Rightarrow x' + x = e^{-y}$

Đây là phương trình tuyến tính với $p(y) = 1$ và $q(y) = e^{-y}$

Áp dụng công thức nghiệm: $x = e^{-\int p(y)dy}\left[C + \int q(y)e^{\int p(y)dy}dy\right]$

$$x = e^{-\int 1dy}\left[C + \int e^{-y}e^{\int 1dy}dy\right] = e^{-y}\left[C + \int e^{-y}e^{y}dy\right] = e^{-y}(C + y)$$

7. Phương trình Bernoulli

Đó là phương trình có dạng: $y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$, ($\alpha \neq 0$ và $\alpha \neq 1$)

Phương trình luôn có nghiệm $y = 0$.

Với $y \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho y^{α}, ta được

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x)$$

Đặt $z = y^{1-\alpha}$, ta có $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, phương trình trên trở thành: $z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x)$,

đó là một phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 hàm z biến x.

Ví dụ: Giải phương trình $y' + \frac{2}{x+1}y = -(x+1)^3y^2$

Phương trình có nghiệm $y = 0$

Với $y \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho y^2, ta được $y'.y^{-2} + \frac{2}{x+1}y^{-1} = -(x+1)^3$

Đặt $z = y^{-1}$, phương trình trở thành: $z' - \frac{2}{x+1}z = (x+1)^3$

Đây là phương trình tuyến tính hàm z với $p(x) = -\frac{2}{x+1}$ và $q(x) = (x+1)^3$

Áp dụng công thức nghiệm: $z = e^{-\int p(x)dx}\left[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right]$

Ta tìm được nghiệm tổng quát của phương trình trên là $z = K(x+1)^2 + \frac{1}{2}(x+1)^4$

Do đó, nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu là $y = \frac{2}{(x+1)^4 + C(x+1)^2}$

Chương 6. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

6.2. Phương trình vi phân cấp 2

1. Các khái niệm chung

Phương trình vi phân cấp hai là phương trình có dạng: $F(x, y, y', y'') = 0$

Hoặc: $y'' = f(x, y, y')$

- Nghiệm tổng quát của phương trình dạng: $y = y(x, C_1, C_2)$
- Nghiệm riêng dạng: $y = y(x, C_1^0, C_2^0)$
- Tích phân tổng quát dạng: $\varphi(x, y, C_1, C_2) = 0$
- Tích phân riêng dạng: $\varphi(x, y, C_1^0, C_2^0) = 0$
- Nghiệm tham số.

Định lý : Cho phương trình vi phân cấp 2 có dạng: $y'' = f(x, y, y')$ (*)

Nếu hàm $f(x, y, y')$ trong phương trình (*) liên tục và có các đạo hàm riêng cấp một theo y và y' liên tục trong một miền $D \subset R^3$ thì với mọi điểm $(x_0, y_0, y_0') \in D$, tồn tại một lân cận nào đó để trong đó phương trình (*) tồn tại duy nhất nghiệm $y = y(x)$ thoả mãn: $y\big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\big|_{x=x_0} = y_0'$

Về mặt hình học, định lí khẳng định rằng nếu $(x_0, y_0, y_0') \in D$ thì trong một lân cận nào đó của điểm (x_0, y_0) có một đường tích phân duy nhất của phương trình $y'' = f(x, y, y')$ đi qua điểm ấy, hệ số góc của tiếp tuyến của nó tại điểm ấy bằng y_0'

2. Phương trình khuyết

a) Phương trình dạng: $F(x, y'') = 0$

Ví dụ: Giải phương trình $y'' - \sin x + x = 0$

$p = y' \Rightarrow p' = \sin x - x \Rightarrow p = \int(\sin x - x)dx = -\cos x - \frac{x^2}{2} + C_1$

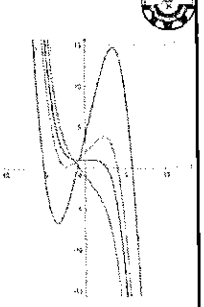
$\Rightarrow y' = -\cos x - \frac{x^2}{2} + C_1 \Rightarrow y = \int\left(-\cos x - \frac{x^2}{2} + C_1\right)dx = -\sin x - \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$

Giải phương trình $y'' - \sin x + x = 0$

thỏa mãn điều kiện: $y\big|_{x=0} = 1, y'\big|_{x=0} = 0$

$y = -\sin x - \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2 \xrightarrow{y|_{x=0}=1} C_2 = 1$

$\Rightarrow y' = -\cos x - \frac{x^2}{2} + C_1 \xrightarrow{y'|_{x=0}=0} C_1 = 1 \qquad y = -\sin x - \frac{x^3}{6} + x + 1$



b) Phương trình dạng: $F(x, y', y'') = 0$

Ví dụ: Giải phương trình $y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' = 1 + x^2$

$$z = y' \Rightarrow z' - \frac{2x}{1+x^2}z = 1 + x^2$$

Đây là phương trình tuyến tính cấp một hàm z biến x, với $p(x) = -\frac{2x}{1+x^2}$ và $q(x) = 1 + x^2$

$$z = e^{-\int p(x)dx}\left[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right] \qquad z = \left(1+x^2\right)\left(x + C_1\right)$$

$$y' = \left(1+x^2\right)\left(x+C_1\right)$$

$$\Rightarrow y = \int\left(1+x^2\right)\left(x+C_1\right)dx = \int\left(x^3 + C_1x^2 + x + C_1\right)dx = \frac{x^4}{4} + C_1\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2$$

c) Phương trình dạng: $F(y, y', y'') = 0$

Cách giải: Đặt $y' = p \quad (p = p(y)) \quad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy} = p.p'$

$\Rightarrow F(y, p, p.p') = 0$ Là phương trình vi phân cấp 1 hàm p biến y

Ví dụ: Giải phương trình $2y.y'' = y'^2 + 1$

Đặt $y' = p \Rightarrow y'' = p\frac{dp}{dy}$. Thế vào ta có: $2yp\frac{dp}{dy} = p^2 + 1 \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2pdp}{p^2+1}$

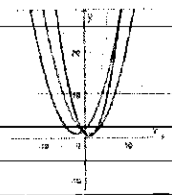
$\ln|y| = \ln(p^2+1) + \ln|C_1| \Rightarrow y = C_1(p^2+1) \Rightarrow y = C_1(y'^2+1)$

Đặt $y' = t \Rightarrow y = C_1(t^2+1) \Rightarrow dy = 2C_1tdt$

Mặt khác $dx = \frac{dy}{t} \Rightarrow dx = 2C_1dt \Rightarrow x = 2C_1t + C_2$

Vậy ta có nghiệm dạng tham số là $y = C_1(t^2+1)$, $x = 2C_1t + C_2$

$t = \frac{x - C_2}{2C_1} \Rightarrow y = C_1\left[\left(\frac{x-C_2}{2C_1}\right)^2 + 1\right] = C_1 + \frac{(x-C_2)^2}{4C_1} \Rightarrow 4C_1(y - C_1) = (x - C_2)^2$



3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2

Là phương trình có dạng : y''+p(x)y'+q(x)y = f(x) (1)

trong đó p(x), q(x), f(x) là những hàm số liên tục.

Phương trình thuần nhất tương ứng là: y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 (2)

Định lý 1: Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất bằng nghiệm riêng của nó cộng với nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng.

Định lý 2: *(nguyên lý chồng chất nghiệm)*

Cho ba phương trình y'' + p(x)y' + q(x)y = $f_1(x) + f_2(x)$ (*)

y'' + p(x)y' + q(x)y = $f_1(x)$ (1)

y'' + p(x)y' + q(x)y = $f_2(x)$ (2)

Nếu $y_1(x)$ và $y_2(x)$ tương ứng là các nghiệm riêng của phương trình (1) và (2) thì y = $y_1(x) + y_2(x$ là nghiệm riêng của phương trình (*)

Tìm nghiệm của phương trình thuần nhất: y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 (2)

Định lý: Nếu phương trình (2) có 2 nghiệm riêng $y_1(x)$, $y_2(x)$ độc lập tuyến tính thì nghiệm tổng quát của (2) là: y = $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$

Hai hàm số $y_1(x)$ và $y_2(x)$ được gọi là độc lập tuyến tính trên đoạn [a, b] nếu trên đó ta luôn có $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ khác hằng số

Định lý: Nếu biết nghiệm riêng $y_1(x) \neq 0$ của phương trình tuyến tính thuần nhất (2), ta có thể tìm được nghiệm riêng $y_2(x)$ độc lập tuyến tính với $y_1(x)$ dưới dạng $y_2(x) = y_1(x)u(x)$

Ví dụ: Giải phương trình: $(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$

biết một nghiệm riêng của phương trình là y = x

Ta tìm một nghiệm riêng của phương trình đã cho dạng $y_2 = xu$

Thế $y_2' = u + xu'$ và $y_2'' = 2u' + xu''$ vào phương trình đã cho ta được $u''x(1-x^2) + 2u' = 0$

Đây là phương trình cấp hai khuyết u, đặt u' = v, ta có $v'x(1-x^2) + 2v = 0$ (*)

Vì u khác hằng số và x = ±1 không phải là nghiệm nên ta đưa phương trình (*) về dạng

$\frac{dv}{v} = -\frac{2dx}{x(1-x^2)}$; Từ đó suy ra $v = k_1\frac{1-x^2}{x^2} = k_1\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)$ với k_1 là hằng số tuỳ ý.

Chọn $k_1 = -1$ ta được $v = 1 - \frac{1}{x^2}$, do đó $u = x + \frac{1}{x} + k_2$; Chọn $k_2 = 0$ ta được $u = x + \frac{1}{x}$, vậy $y_2 = xu = x^2 + 1$

Hai nghiệm $y_1 = x$ và $y_2 = x^2 + 1$ là độc lập tuyến tính, nên nghiệm tổng quát của phương trình là $y = C_1x + C_2(x^2 + 1)$ với C_1, C_2 là hai hằng số tuỳ ý

Phương pháp biến thiên hằng số tìm nghiệm của phương trình tuyến tính tổng quát

y''+p(x)y'+q(x)y = f(x) (1)

Giả sử nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 (2) là:

$y = C_1y_1 + C_2y_2$ (3)

trong đó C_1, C_2 là hằng số tuỳ ý.

Tìm nghiệm của phương trình không thuần nhất (1) dưới dạng (3) bằng cách xem C_1 và C_2 là các hàm của x. C_1 và C_2 phải thoả mãn hệ hai phương trình sau:

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x) \end{cases}$$

Ví dụ: Giải phương trình $(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = 1 - x^2$

Với $x \neq \pm 1$, phương trình được viết lại như sau: $y'' + \frac{2x}{1-x^2}y' - \frac{2}{1-x^2}y = 1$

Ta đã biết nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là: $\boxed{y = C_1x + C_2(x^2+1)}$

với C_1, C_2 là hai hằng số tuỳ ý.

Để biểu thức ấy là nghiệm của phương trình đã cho, ta đi tìm các hàm số $C_1(x)$ và $C_2(x)$ thỏa mãn

hệ: $\begin{cases} C_1'x + C_2'(x^2+1) = 0 \\ C_1' + C_2'2x = 1 \end{cases}$ ta thu được $C_1' = \frac{x^2+1}{x^2-1} = -1 - \frac{2}{x^2-1}$, $C_2' = \frac{x}{x^2-1}$

Do đó $C_1 = -\left(x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) + K_1$, $C_2 = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + K_2$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y = -x\left(x - \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) - \frac{1}{2}(x^2-1)\ln|x^2-1| - K_1x - K_2(x^2+1)$

4. Phương trình tuyến tính có hệ số không đổi

Phương trình tuyến tính có hệ số không đổi có dạng: $y'' + py' + qy = f(x)$ (1)

trong đó p và q là các hằng số.

Phương trình thuần nhất tương ứng là: $y'' + py' + qy = 0$ (2)

Nghiệm tổng quát của (1) là $y = \bar{y} + y_R$ $\bar{y}$ là nghiệm tổng quát của (2)

y_R là một nghiệm riêng của (1)

Giải phương trình thuần nhất $y'' + py' + qy = 0$ *(2)*

Ta sẽ tìm nghiệm riêng của (2) dưới dạng $y = e^{kx}$, trong đó k là hằng số nào đó.

Thế $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$ vào (2) ta được $(k^2 + pk + q)e^{kx} = 0 \Rightarrow k^2 + pk + q = 0$

Phương trình $k^2 + pk + q = 0$ được gọi là phương trình đặc trưng của (2)

Giả sử k_1 và k_2 là hai nghiệm của phương trình đặc trưng, có thể xảy ra ba trường hợp:

1) Hai nghiệm thực phân biệt $k_1 \neq k_2$: Nghiệm tổng quát của (2) là $y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$

2) Nghiệm kép $k_1 = k_2 = k$: Nghiệm tổng quát của (2) là $y = (C_1 + C_2x)e^{kx}$

3) Nghiệm phức liên hợp $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$: Nghiệm tổng quát của (2) là $y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

Ví dụ: Giải các phương trình tuyến tính thuần nhất sau

$y'' + y' - 2y = 0$

Phương trình đặc trưng: $k^2 + k - 2 = 0 \Leftrightarrow k_1 = 1$ và $k_2 = -2$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là: $y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$

$y'' - 6y' + 9y = 0$

Phương trình đặc trưng $k^2 - 6k + 9 = 0$ có nghiệm kép $k = 3$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là: $y = e^{3x}(C_1x + C_2)$

$y'' - 2y' + 5y = 0$

Phương trình đặc trưng $k^2 - 2k + 5 = 0$ có hai nghiệm phức liên hợp $k_1 = 1 + i2$, $k_2 = 1 - i2$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là: $y = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$

Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất

Xét phương trình: $y'' + py' + qy = f(x)$ trong đó p, q là hai hằng số.

Trường hợp 1: $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$; trong đó $P_n(x)$ là một đa thức bậc n, α là một hằng số.

Nếu α không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng: $y_R = e^{\alpha x}[Q_n(x)]$

Nếu α là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng: $y_R = e^{\alpha x}[x.Q_n(x)]$

Nếu α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng: $y_R = e^{\alpha x}[x^2.Q_n(x)]$

Tìm $Q_n(x)$ bằng phương pháp hệ số bất định

Trường hợp 2: $f(x) = \cos\beta x.[P_m(x)] + \sin\beta x.[P_n(x)]$

trong đó $P_m(x)$ và $P_n(x)$ là các đa thức bậc tương ứng là m và n, còn β là hằng số.

Nếu $\pm i\beta$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng: $y_R = Q_h(x)\cos\beta x + R_h(x)\sin\beta x$

Nếu $\pm i\beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng: $y_R = x[Q_h(x)\cos\beta x + R_h(x)\sin\beta x]$

Với $Q_h(x)$ và $R_h(x)$ là các đa thức bậc $h = \max(m, n)$.

***Trường hợp 3*: $f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x]$**

Đưa về phương trình có vế phải dạng 2 bằng phép đặt $y = z\,e^{\alpha x}$

Trường hợp 4: $f(x)$ bất kỳ

Dùng phương pháp biến thiên hằng số

Ví dụ: Giải phương trình $y'' + y' - 2y = (x+1)e^{-x}$

Phương trình đặc trưng $k^2 + k - 2 = 0$ có hai nghiệm $k = 1$ và $k = -2$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $\boxed{y_{TN} = C_1e^x + C_2e^{-2x}}$

Vế phải của phương trình có dạng $e^{\alpha x}P_1(x)$, trong đó $\alpha = -1$, $P_1(x) = x + 1$

Do $\alpha = -1$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên ta tìm nghiệm riêng của phương trình đã cho dưới dạng $y = e^{-x}[ax + b]$

Ta có: $y' = e^{-x}[-ax - b + a]$, $y'' = e^{-x}[ax + b - 2a]$. Thế vào phương trình ban đầu ta được

$$e^{-x}[x(a - a - 2a) + (b - 2a - b + a - 2b)] = e^{-x}[x + 1] \Rightarrow e^{-x}[x(-2a) + (-a - 2b)] = e^{-x}[x + 1]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a = 1 \\ -a - 2b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1/2 \\ b = -1/4 \end{cases} \Rightarrow \text{Nghiệm riêng là } \boxed{y_R = e^{-x}[-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}]}$$

Vậy nghiệm tổng quát là $y = y_R + y_{TN} = e^{-x}[-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}] + C_1e^x + C_2e^{-2x}$

Ví dụ: Giải phương trình $y'' - 2y' + y = 2e^x$

Phương trình đặc trưng: $k^2 - 2k + 1 = 0$ có nghiệm kép $k = 1$, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $\boxed{y_{TN} = (C_1x + C_2)e^x}$

Vế phải có dạng $e^{\alpha x}P_0(x)$, trong đó $\alpha = 1$, $P_0(x) = 2$. Do $\alpha = 1$ là nghiệm kép của phương trình đặc trưng nên ta tìm nghiệm riêng của phương trình đã cho dưới dạng $y = e^x[x^2.a]$

Ta có $y' = e^x[ax^2 + 2ax]$, $y'' = e^x[ax^2 + 4ax + 2a]$

Thế vào phương trình ban đầu ta được

$e^x[x^2(a - 2a + a) + x(4a - 4a) + (2a)] = e^x[2] \Rightarrow e^x[2a] = e^x[2] \Rightarrow a = 1$,

do đó nghiệm riêng là $\boxed{y_R = e^x[x^2]}$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là: $y = y_{TN} + y_R = (C_1x + C_2)e^x + x^2e^x$

Ví dụ: Giải phương trình $y'' + y = 2\sin x$

Phương trình đặc trưng: $k^2 + 1 = 0$ có nghiệm phức $k_1 = i$ và $k_2 = -i$, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $\boxed{y_{TN} = e^{0x}(C_1\cos x + C_2\sin x)}$

Vế phải của phương trình có dạng $[P_0(x)]\sin x$, trong đó $\beta = 1$, $P_0(x) = 2$

Do $\pm i\beta = \pm i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng nên ta tìm nghiệm riêng của phương trình đã cho dưới dạng $y = [ax]\cos x + [bx]\sin x$

Ta có $y' = [bx + a]\cos x + [-ax + b]\sin x$, $y'' = [-ax + 2b]\cos x + [-bx - 2a]\sin x$.

Thay vào ta được $[2b]\cos x + [-2a]\sin x = 2\sin x$. Ta có hệ $\begin{cases} 2b = 0 \\ -2a = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -1 \end{cases}$

Vậy nghiệm riêng $\boxed{y_R = -x\cos x}$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là: $y = -x\cos x + C_1\cos x + C_2\sin x$

Ví dụ: Giải phương trình $y'' + 2y' + 2y = [2\sin x]e^{-x}$

Đặt $y = e^{-x}z$, ta có $y' = -e^{-x}z + e^{-x}z'$, $y'' = e^{-x}z - 2e^{-x}z' + e^{-x}z''$

Thế vào phương trình đã cho rồi giản ước, ta được $z'' + z = 2\sin x$

Nghiệm tổng quát của phương trình này là $z = -x\cos x + C_1\cos x + C_2\sin x$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu là $y = [-x\cos x + C_1\cos x + C_2\sin x]e^{-x}$

Ví dụ: Giải phương trình $y'' - y' = 2\cos^2 x$

Phương trình đặc trưng: $k^2 - k = 0$ có nghiệm $k_1 = 0$ và $k_2 = 1$, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $\boxed{y_{TN} = C_1e^{0x} + C_2e^x}$

Vế phải của phương trình là: $f(x) = 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$. Theo nguyên lý chồng chất nghiệm, ta tìm một nghiệm riêng của phương trình đã cho dưới dạng tổng $y_R = y_1 + y_2$, trong đó y_1 là một nghiệm riêng của phương trình $y'' - y' = 1$, y_2 là một nghiệm riêng của phương trình $y'' - y' = \cos 2x$

Tìm y_1: Vế phải của phương trình $y'' - y' = 1$ có dạng $P_n(x).e^{\alpha x}$, trong đó $P_0(x) = 1$, $\alpha = 0$ là một nghiệm của phương trình đặc trưng, nên $y_1 = A.x$, thế vào phương trình ta tìm được $A = -1$, nên $\boxed{y_1 = -x}$

Tìm y_2: Vế phải của phương trình $y'' - y' = \cos 2x$ có dạng $[P_0(x)]\cos\beta x + [P_0(x)]\sin\beta x$ trong đó $P_0(x) = 1$, $P_0(x) = 0$, $\beta = 2$. $\pm i\beta = \pm 2i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên $y_2 = B.\cos 2x + C.\sin 2x$, thế vào phương trình ta tìm được $B = -2/10$, $C = -1/10$, vậy $\boxed{y_2 = -\frac{2}{10}\cos 2x - \frac{1}{10}\sin 2x}$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là: $\boxed{y = C_1 + C_2e^x - x - \frac{2}{10}\cos 2x - \frac{1}{10}\sin 2x}$

Ví dụ: Giải phương trình $y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}$

Phương trình đặc trưng: $k^2 - 1 = 0$ có nghiệm $k_1 = 1$ và $k_2 = -1$, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $y_{TN} = C_1e^x + C_2e^{-x}$

Dùng phương pháp biến thiên hằng số, biểu thức trên là nghiệm của phương trình không thuần nhất nếu C_1 và C_2 là những hàm số thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} C_1'e^x - C_2'e^{-x} = 0 \\ C_1'e^x - C_2'e^{-x} = \frac{e^x}{e^x + 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = \frac{1}{2(e^x + 1)} \\ C_2' = -\frac{e^{2x}}{2(e^x + 1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2}[x - \ln(e^x + 1) - K_1] \\ C_2 = -\frac{1}{2}[e^x - \ln(e^x + 1) - K_2] \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $y = \frac{1}{2}e^x[x - \ln(e^x + 1) - K_1] - \frac{1}{2}e^{-x}[e^x - \ln(e^x + 1) - K_2]$

Chương 6. **PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN**

6.3. Hệ phương trình vi phân

Hệ phương trình vi phân chuẩn tắc cấp một là hệ có dạng:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \quad (*)$$

trong đó x là biến độc lập, các hàm phải tìm là $y_1, y_2, \ldots, y_n$

Định lý: (Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm)

Giả sử các hàm số $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ liên tục và có các đạo hàm riêng cấp một $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ liên tục trong một miền $D \subset R^{n+1}$ và điểm $M_0 = (x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0) \in D$. Khi đó trong một lân cận nào đó của M_0 có một nghiệm duy nhất của hệ (*) thoả mãn các điều kiện $y_k(x_0) = y_k^0$

Nghiệm tổng quát của hệ (*) là bộ n hàm $y_k = \varphi_k(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ với $C_1, C_2, \ldots, C_n$ là các hằng số tuỳ ý, thoả mãn các điều kiện sau:

1) Nó thoả mãn hệ (*) với mọi giá trị của $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

2) Với mọi điểm $M_0 = (x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ mà ở đó các điều kiện của định lý tồn tại và duy nhất nghiệm được thoả mãn, có thể tìm được một bộ giá trị $C_k = C_k^0$ sao cho các hàm số $y_k = \varphi_k(x, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0)$ thoả mãn các điều kiện đầu $y_k(x_0) = y_k^0$

Nghiệm riêng của hệ (*) là nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát bằng cách cho các C_k những giá trị cụ thể.

- Mọi phương trình vi phân cấp n dạng $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ đều có thể đưa về hệ n phương trình vi phân chuẩn tắc cấp một bằng cách đặt $y_1 = y, y_2 = y', \ldots, y_n = y^{(n-1)}$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \ldots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases}$$

- Ngược lại, một hệ n phương trình vi phân chuẩn tắc cấp một đều có thể đưa về phương trình vi phân cấp cao đối với một hàm số chưa biết bằng cách khử những hàm số chưa biết khác từ các phương trình của hệ.

Ví dụ: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \boxed{y' = 5y + 4z} & (1) \\ z' = 4y - 5z & (2) \end{cases}$

Đạo hàm hai vế phương trình (1) ta được: $y'' = 5y' + 4z'$

Thay z' từ phương trình (2) ta có: $y'' = 5y' + 16y + 20z$

Rút z từ phương trình (1) và thay vào phương trình vừa nhận được: $\boxed{z = \frac{y' - 5y}{4}}$

$$y'' = 5y' + 16y + 5y' - 25y \text{ hay } y'' - 10y' + 9y = 0$$

Phương trình đặc trưng $k^2 - 10k + 9 = 0$ có hai nghiệm là $k_1 = 1$ và $k_2 = 9$, nên nghiệm tổng quát của nó là $\boxed{y = C_1e^x + C_2e^{9x}}$

Từ đó: $y' = C_1e^x + 9C_2e^{9x}$, thay y và y' vào phương trình (1) ta được $\boxed{z = -C_1e^x + C_2e^{9x}}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $y = C_1e^x + C_2e^{9x}$, $z = -C_1e^x + C_2e^{9x}$

Ví dụ: Giải hệ phương trình $\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$

Cộng hai phương trình từng vế một, ta được:

$$y' + z' = y + z \Rightarrow \frac{d(y+z)}{dx} = y + z \Rightarrow \frac{d(y+z)}{y+z} = dx \Rightarrow y + z = C_1e^x$$

Trừ hai phương trình từng vế một, ta được:

$$y' - z' = -(y - z) \Rightarrow \frac{d(y-z)}{y-z} = -dx \Rightarrow y - z = C_2e^{-x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y + z = C_1e^x \\ y - z = C_2e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}\left(C_1e^x + C_2e^{-x}\right) \\ z = \frac{1}{2}\left(C_1e^x - C_2e^{-x}\right) \end{cases}$$

Hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất có hệ số không đổi

Đó là hệ có dạng: $\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ \dots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases}$ (*), trong đó a_{ij} là các hằng số.

Ta ký hiệu $\overline{Y}$ thay cho nghiệm $(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Nếu $\overline{Y}_1, \overline{Y}_2, \dots, \overline{Y}_m$ là các nghiệm của hệ thì mọi tổ hợp tuyến tính $C_1\overline{Y}_1 + C_2\overline{Y}_2 + \dots + C_m\overline{Y}_m$ cũng là nghiệm của hệ.

Ta tìm nghiệm của hệ (*) dưới dạng $y_k = p_k e^{\lambda x}$, trong đó p_k và λ là các hằng số cần xác định.

Thế các $y'_k = \lambda p_k e^{\lambda x}$ vào (*), ta nhận được hệ đại số tuyến tính thuần nhất

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)p_1 + a_{12}p_2 + \dots + a_{1n}p_n = 0 \\ a_{21}p_1 + (a_{22}-\lambda)p_2 + \dots + a_{2n}p_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1}p_1 + a_{n2}p_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda)p_n = 0 \end{cases} \quad (**)$$

Hệ trên phải có nghiệm không tầm thường, nên định thức của nó phải bằng không

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (***)$$

Phương trình (***) được gọi là phương trình đặc trưng của hệ (*), nghiệm của nó được gọi là giá trị riêng của hệ.

Giả sử hệ (***) có n nghiệm thực phân biệt là $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Ứng với mỗi λ_k, từ hệ (**) ta tìm được bộ n số $p_{1k}, p_{2k}, \dots, p_{nk}$. Véc tơ $(p_{1k}, p_{2k}, \dots, p_{nk})$ được gọi là véc tơ riêng ứng với trị riêng λ_k.

Khi đó hệ (*) có n nghiệm, gọi là hệ nghiệm cơ bản $y_{1k} = p_{1k}e^{\lambda_k x}$, $y_{2k} = p_{2k}e^{\lambda_k x}$, ..., $y_{nk} = p_{nk}e^{\lambda_k x}$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Khi đó nghiệm tổng quát của hệ (*) là

$$\begin{cases} y_1 = C_1y_{11} + C_2y_{12} + \dots + C_ny_{1n} \\ y_2 = C_1y_{21} + C_2y_{22} + \dots + C_ny_{2n} \\ \dots \\ y_n = C_1y_{n1} + C_2y_{n2} + \dots + C_ny_{nn} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} y_1 = C_1p_{11}e^{\lambda_1 x} + C_2p_{12}e^{\lambda_2 x} + \dots + C_np_{1n}e^{\lambda_n x} \\ y_2 = C_1p_{21}e^{\lambda_1 x} + C_2p_{22}e^{\lambda_2 x} + \dots + C_np_{2n}e^{\lambda_n x} \\ \dots \\ y_n = C_1p_{n1}e^{\lambda_1 x} + C_2p_{n2}e^{\lambda_2 x} + \dots + C_np_{nn}e^{\lambda_n x} \end{cases}$$

Nếu phương trình đặc trưng có s nghiệm thực ($s < n$), giả sử nghiệm λ_k bội l_k

Khi đó ta tìm nghiệm của hệ dưới dạng: $\begin{cases} y_1 = p_{11}(x)e^{\lambda_1 x} + p_{12}(x)e^{\lambda_2 x} + \dots + p_{1s}(x)e^{\lambda_s x} \\ y_2 = p_{21}(x)e^{\lambda_1 x} + p_{22}(x)e^{\lambda_2 x} + \dots + p_{2s}(x)e^{\lambda_s x} \\ \dots \\ y_n = p_{n1}(x)e^{\lambda_1 x} + p_{n2}(x)e^{\lambda_2 x} + \dots + p_{ns}(x)e^{\lambda_s x} \end{cases}$

trong đó $p_{kj}(x)$ là các đa thức bậc $l_j - 1$ ($j = 1, 2, \dots, s$), ($k = 1, 2, \dots, n$)

Các hệ số của các đa thức này phụ thuộc n hằng số tuỳ ý $C_1, C_2, \dots, C_n$

Dựa vào hệ (*) ta có thể tìm được các hằng số đó bằng phương pháp hệ số bất định.

Nếu phương trình đặc trưng có nghiệm phức, thì dùng công thức Euler và lấy các nghiệm riêng là phần thực và phần ảo của nghiệm phức tương ứng.

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Ví dụ: Giải hệ phương trình $\begin{cases} y' = y + 2z \\ z' = 4y + 3z \end{cases}$

Phương trình đặc trưng là $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1$

Với $\lambda = 5$, ta xác định các véc tơ riêng từ hệ phương trình: $\begin{cases} -4p_{11} + 2p_{21} = 0 \\ 4p_{11} - 2p_{21} = 0 \end{cases} \Rightarrow (p_{11}, p_{21}) = (1, 2)$

Hệ nghiệm cơ bản ứng với $\lambda = 5$ là: $y_1 = 1.e^{5x}$, $z_1 = 2.e^{5x}$

Với $\lambda = -1$, ta xác định các véc tơ riêng từ hệ phương trình: $\begin{cases} 2p_{12} + 2p_{22} = 0 \\ 4p_{12} + 4p_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow (p_{12}, p_{22}) = (1, -1)$

Hệ nghiệm cơ bản ứng với $\lambda = -1$ là: $y_2 = 1.e^{-x}$, $z_2 = -1.e^{-x}$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ là: $y = C_1e^{5x} + C_2e^{-x}$, $z = 2C_1e^{5x} - C_2e^{-x}$

Ví dụ: Giải hệ phương trình $\begin{cases} y' = y - z \\ z' = y + 3z \end{cases}$

Phương trình đặc trưng là $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2$

Do đó ta tìm nghiệm dưới dạng: $y = (ax + b)e^{2x}$, $z = (cx + d)e^{2x}$

Thế vào hệ ta được: $\begin{cases} 2ax + 2b + a = (a-c)x + b - d \\ 2cx + 2d + c = (a+3c)x + b + 3d \end{cases}$

Đồng nhất các hệ số ta thu được hệ: $\begin{cases} a + c = 0 \\ a + b + d = 0 \\ -a - c = 0 \\ -b + c - d = 0 \end{cases}$

Giải hệ ta chọn $a = C_1$, $b = C_2$, suy ra $c = -C_1$, $d = -(C_1 + C_2)$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ là: $y = (C_1x + C_2)e^{2x}$, $z = (-C_1x - C_1 - C_2)e^{2x}$

Ví dụ: Giải hệ phương trình $\begin{cases} y' = y - 5z \\ z' = 2y - z \end{cases}$

Phương trình đặc trưng là $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i3, \lambda_2 = -i3$

Với $\lambda = i3$, ta xác định các véc tơ riêng từ hệ phương trình

$\begin{cases} (1-i3)p_1 - 5p_2 = 0 \\ 2p_1 + (-1-i3)p_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ véc tơ riêng $(p_{11}, p_{21}) = (5, 1 - i3)$

Ta có nghiệm:

$y_1 = 5e^{i3x} = \underline{5\cos 3x} + i\underline{5\sin 3x}$

$z_1 = (1-i3)e^{i3x} = (\underline{\cos 3x + 3\sin 3x}) + i(\underline{\sin 3x - 3\cos 3x})$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ đã cho là

$y = \underline{C_1 5\cos 3x + C_2 5\sin 3x} = 5C_1\cos 3x + 5C_2\sin 3x$

$z = \underline{C_1(\cos 3x + 3\sin 3x) + C_2(\sin 3x - 3\cos 3x)}$

KẾT LUẬN

- Đề tài "Xây dựng video bài giảng học phần Giải tích" hoàn thành gồm 48 video đã khái quát được toàn bộ nội dung học phần Giải tích.
- Đề tài có ý nghĩa quan trọng đối với quá trình chuyển đổi số của Nhà trường.
- Kết quả của đề tại là tài liệu phục vụ giảng dạy và học tập học phần Giải tích trong trường Đại học kỹ thuật Công nghiệp.

DANH MỤC TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] James Stewart (2010), Single variable calculus Early Transcendentals 7th edition, Cengage Learning.

[2] James Stewart (2010), Multivariable Calculus 7th edition, Cengage Learning.

[3] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh (2004), Toán học cao cấp Tập 2- NXB Giáo dục, 2004.

[4] Nguyễn Đình Trí , Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh- Toán học cao cấp tập 3- NXB Giáo dục, 2004.

[5] Nguyễn Đình Trí , Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh- Bài tập Toán cao cấp tập 2- NXB Giáo dục, 2004.

[6] Nguyễn Đình Trí , Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh- Bài tập Toán cao cấp tập 3- NXB Giáo dục, 2004.

LỜI CẢM ƠN

Chúng tôi xin chân thành cảm ơn Trường Đại Học Kỹ Thuật Công Nghiệp, ĐH Thái Nguyên đã tài trợ kinh phí cho chúng tôi hoàn thành đề tài này. Xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các thầy cô giáo bộ môn Toán, Khoa Khoa học Cơ bản và Ứng dụng đã giúp đỡ chúng tôi trong quá trình hoàn thiện đề tài.

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

THUYẾT MINH
ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP TRƯỜNG
NĂM 2022

TÊN ĐỀ TÀI: XÂY DỰNG VIDEO BÀI GIẢNG HỌC PHẦN GIẢI TÍCH

MÃ SỐ: T2022- VD16

Chủ nhiệm đề tài: ThS Lê Bích Ngọc

THÁI NGUYÊN, NĂM 2022

THUYẾT MINH ĐỀ TÀI
KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP TRƯỜNG NĂM 2022

1. TÊN ĐỀ TÀI: Xây dựng video bài giảng học phần Giải tích				**2. MÃ SỐ: T2022-VD16**	
3. LĨNH VỰC NGHIÊN CỨU				**4. LOẠI HÌNH NGHIÊN CỨU**	
Khoa học Tự nhiên	x	Khoa học Kỹ thuật và Công nghệ	☐	Cơ bản	Ứng dụng	Triển khai
Khoa học Y, dược	☐	Khoa học Nông nghiệp	☐			
Khoa học Xã hội	☐	Khoa học Nhân văn	☐	x	☐	☐

5. THỜI GIAN THỰC HIỆN DỰ KIẾN: 12 tháng

Từ tháng 04 năm 2022 đến tháng 04 năm 2023

6. CHỦ NHIỆM ĐỀ TÀI

Họ và tên: Lê Bích Ngọc — Học vị: Thạc sỹ

Chức danh khoa học: — Năm sinh: 1985

Địa chỉ cơ quan: ĐH KTCN — Điện thoại di động: 0978437966

Điện thoại cơ quan: — Fax:

E-mail: lebichngoc@tnut.edu.vn

7. NHỮNG THÀNH VIÊN THAM GIA NGHIÊN CỨU ĐỀ TÀI

TT	Họ và tên	Đơn vị công tác và lĩnh vực chuyên môn	Nội dung nghiên cứu cụ thể được giao	Chữ ký
1	Phạm Thị Thu	Khoa KHCB – ĐH KTCN. Lĩnh vực chuyên môn: Toán học	Thiết kế bài giảng power point chương 1, 2.	
2	Vũ Hồng Quân	Khoa KHCB – ĐH KTCN. Lĩnh vực chuyên môn: Toán học	Thiết kế bài giảng power point chương 3,4.	
3	Phạm Thị Minh Hạnh	Khoa KHCB – ĐH KTCN. Lĩnh vực chuyên môn: Toán học	Thiết kế bài giảng power point chương 5,6.	

8. ĐƠN VỊ PHỐI HỢP CHÍNH

Tên đơn vị trong và ngoài nước	Nội dung phối hợp nghiên cứu	Họ và tên người đại diện đơn vị

9. TỔNG QUAN TÌNH HÌNH NGHIÊN CỨU THUỘC LĨNH VỰC CỦA ĐỀ TÀI Ở TRONG VÀ NGOÀI NƯỚC

9.1. Trong nước *(phân tích, đánh giá tình hình nghiên cứu thuộc lĩnh vực của đề tài ở Việt Nam, liệt kê danh mục các công trình nghiên cứu, tài liệu có liên quan đến đề tài được trích dẫn khi đánh giá tổng quan)*

- Học tập trực tuyến đã và đang trở nên phổ biến trên thế giới cũng như ở Việt Nam, nhất là trong tình hình diễn biến phức tạp của dịch bệnh Covid 19.

- Hệ thống các video bài giảng của lĩnh vực Toán học nói chung đang phát triển mạnh mẽ và rất được quan tâm trong giai đoạn hiện nay. Các video bài giảng về các nội dung kiến thức Giải tích cũng đang được quan tâm trong giai đoạn hiện nay, tuy nhiên số lượng video bài giảng về lĩnh vực này chưa được nhiều và phong phú như các lĩnh vực khác của Toán học.

9.2. Ngoài nước

9.3. Danh mục các công trình đã công bố thuộc lĩnh vực của đề tài của chủ nhiệm và những thành viên tham gia nghiên cứu (*họ và tên tác giả; bài báo; ấn phẩm; các yếu tố về xuất bản*)

a) Của chủ nhiệm đề tài

b) Của các thành viên tham gia nghiên cứu

(Những công trình được công bố trong 5 năm gần nhất)

10. TÍNH CẤP THIẾT CỦA ĐỀ TÀI

- Trước tình hình diễn biến phức tạp của dịch bệnh Covid 19, việc học tập và giảng dạy trực tuyến đang là giải pháp phù hợp hiện nay tại trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp Thái Nguyên. Học tập trực tuyến đem lại lợi ích đột phá so với cách học truyền thống, người học giờ đây đóng vai trò trung tâm và chủ động trong qua trình đào tạo. Tuy nhiên, hình thức học tập này chưa thực sự đạt được chất lượng như mong muốn do nhiều yếu tố chủ quan và khách quan như điều kiện về cơ sở vật chất, ý thức học tập của sinh viên, khó khăn trong việc quản lý sinh viên trong giờ học của giảng viên, …

- Học phần Giải tích là một học phần được giảng dạy cho sinh viên khối ngành Công nghệ của trường ĐH KTCN. Nội dung kiến thức của học phần này được sử dụng nhiều trong các môn học chuyên ngành của sinh viên trong những năm học tiếp theo. Với mong muốn nâng cao chất lượng học tập học phần Giải tích cho sinh viên trường ĐH KTCN trong giai đoạn học online cũng như sau này, nhóm nghiên cứu đề xuất đề tài: *"Xây dựng video bài giảng học phần Giải tích"* để sinh viên có thể tiếp thu kiến thức tốt hơn khi xem các video giảng dạy trước và sau mỗi buổi học cũng như ôn tập cuối kỳ.

11. MỤC TIÊU ĐỀ TÀI

- Nghiên cứu tìm hiểu cách xây dựng và biên tập video bài giảng.

- Xây dựng các video tóm tắt được các nội dung cơ bản của học phần Giải tích giúp cho sinh viên học tập tốt hơn học phần này.

12. ĐỐI TƯỢNG, PHẠM VI NGHIÊN CỨU

12.1. Đối tượng nghiên cứu: Nghiên cứu nội dung học phần Giải tích.

12.2. Phạm vi nghiên cứu: Xây dựng video bài giảng các nội dung cơ bản của học phần Giải tích.

13. CÁCH TIẾP CẬN, PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

13.1. Cách tiếp cận: Phương pháp tổng hợp tài liệu, thiết kế bài giảng, quay video.

13.2. Phương pháp nghiên cứu: Đề tài sử dụng các phương pháp nghiên cứu:

- Thiết kế nội dung từng tiết dạy.
- Quay video các tiết dạy.

14. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU VÀ TIẾN ĐỘ THỰC HIỆN

14.1. Nội dung nghiên cứu (***Mô tả chi tiết những nội dung nghiên cứu của đề tài***)

14.2. Tiến độ thực hiện

STT	Các nội dung, công việc thực hiện	Sản phẩm	Thời gian (bắt đầu-kết thúc)	Người thực hiện
1	Xây dựng thuyết minh đề tài, xây dựng đề cương cho các video bài giảng, nghiên cứu tìm hiểu các phần mềm thiết kế xây dựng video bài giảng.	Thuyết minh	03/2022	Lê Bích Ngọc
2	Xây dựng các video bài giảng chương 1, 2, 3 của học phần Giải tích.	Các video bài giảng chương 1, 2, 3	04/2022-09/2022	Lê Bích Ngọc, Phạm Thị Thu, Vũ Hồng Quân
3	Xây dựng các video bài giảng chương 4, 5, 6 của học phần Giải tích.	Các video bài giảng chương 4, 5, 6	09/2022-03/2023	Lê Bích Ngọc, Phạm Thị Minh Hạnh, Vũ Hồng Quân

15. SẢN PHẨM

Stt	Tên sản phẩm	Số lượng	Yêu cầu chất lượng sản phẩm *(mô tả chi tiết chất lượng sản phẩm đạt được như nội dung, hình thức, các chỉ tiêu, thông số kỹ thuật,...)*
I	Sản phẩm khoa học (Các công trình khoa học sẽ được công bố: sách, bài báo khoa học, ..)		
1.1			
II	Sản phẩm đào tạo (cử nhân, thạc sĩ, tiến sĩ,...)		
2.1			
III	Sản phẩm ứng dụng		
3.1	Các video bài giảng học phần Giải tích		

16. PHƯƠNG THỨC CHUYỂN GIAO KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU VÀ ĐỊA CHỈ ỨNG DỤNG

16.1. Phương thức chuyển giao

16.2. Địa chỉ ứng dụng

17. TÁC ĐỘNG VÀ LỢI ÍCH MANG LẠI CỦA KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

17.1. Đối với lĩnh vực giáo dục và đào tạo: tạo ra sản phẩm học thuật có chất lượng và có ý nghĩa thực tiễn trong dạy và học các học phần Toán cho sinh viên khối trường đại học chuyên ngành kỹ thuật.

17.2. Đối với lĩnh vực khoa học và công nghệ có liên quan: Phát triển hướng nghiên cứu đổi mới phương pháp dạy và học theo định hướng phát triển năng lực người học và đổi mới giáo dục trong thời đại 4.0.

17.3. Đối với phát triển kinh tế-xã hội: Tạo ra cở sở khoa học cho việc xây dựng và phát triển thương hiệu một trường đại học, cơ sở giáo dục nghề nghiệp cho đất nước trong thời đại công nghiệp hóa ngày nay.

17.4. Đối với tổ chức chủ trì và các cơ sở ứng dụng kết quả nghiên cứu: nâng cao chất lượng dạy và học trong quá trình đào tạo của trường ĐH Kỹ Thuật Công Nghiệp, giúp định hướng vai trò truyền thông ngày nay trong công cuộc xây dựng niềm tin của khách hàng vào cơ sở đào tạo nghề nghiệp.

18. KINH PHÍ THỰC HIỆN ĐỀ TÀI

Tổng kinh phí: 7.200.000đ

Bằng chữ: Bảy triệu hai trăm nghìn đồng chẵn.

(Dự toán chi tiết các mục chi đính kèm có xác nhận của các đơn vị liên quan.)

Ngày tháng năm 20

Chủ nhiệm đề tài	**PHÒNG KHCN&HTQT**
Lê Bích Ngọc	
HỘI ĐỒNG KHOA KHCB	**KT. HIỆU TRƯỞNG** **PHÓ HIỆU TRƯỞNG**
Nguyễn Văn Trường	BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP **PGS.TS. Vũ Ngọc Pi**

ĐVT: VNĐ

DỰ TOÁN KINH PHÍ ĐỀ TÀI KH&CN CẤP TRƯỜNG NĂM 2022

Tên đề tài: Xây dựng video bài giảng học phần Giải tích

Chủ nhiệm đề tài: ThS. Lê Bích Ngọc

Thành viên chính: ThS. Vũ Hồng Quân; ThS. Phạm Thị Thu; ThS. Phạm Thị Minh Hạnh

Thành viên:

ĐVT: VNĐ

STT	Nội dung	Dự toán			
		Người thực hiện	**Số ngày công**	**Hệ số tiền công theo ngày (2)***	**Thành tiền**
1	***Mục chi tiền công lao động tham gia trực tiếp (1)***				
1.1	Xây dựng thuyết minh đề tài. Nghiên cứu tìm hiểu các phần mềm thiết kế xây dựng video bài giảng.	Lê Bích Ngọc	0,5	0,45	335.250
1.2	Xây dựng các video bài giảng chương 1, 2, 3	Lê Bích Ngọc	2	0,45	1.341.000
		Phạm Thị Thu	2	0,3	894.000
		Vũ Hồng Quân	2	0,3	894.000
1,3	Xây dựng các video bài giảng chương 4, 5, 6	Lê Bích Ngọc	2	0,45	1.341.000
		Phạm Thị Minh Hạnh	2	0,3	894.000
		Vũ Hồng Quân	2	0,3	894.000
1,4	Viết báo cáo nghiệm thu	Lê Bích Ngọc	0,5	0,45	335.250
	Tổng 1		**13**		**6.928.500**
2	***Chi khác***				
2,1	Văn phòng phẩm, in ấn				271.500
	Tổng 2				**271.500**
	Tổng 1 + 2				**7.200.000**

Cơ quan chủ trì
KT. HIỆU TRƯỞNG
PHÓ HIỆU TRƯỞNG

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

PGS.TS. Vũ Ngọc Pi

TRƯỞNG PHÒNG KHCN&HTQT

CHỦ NHIỆM ĐỀ TÀI

Lê Bích Ngọc

TRƯỞNG PHÒNG KH-TC